Прикладная математика и механика. Том XX, 1956

Институт механики Академии наук Союза ССР

О СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Л. А. Толоконников

(Москва)

В. В. Новожилов [1,2] предлагает несколько вариантов внутренне не противоречивых формулировок соотношений между напряжениями и неограниченными по величине деформациями. Показано при этом, что механические свойства медленно деформируемых тел можно описать посредством экспериментального определения трех функций, зависящих от трех независимых инвариантов тензора деформаций.

Ниже предлагается еще вариант возможной связи между главными истинными напряжениями и удлинениями главных материальных волокон. Посредством введения обобщенных координат формоизменения и изменения объема элемента тела удается ввести модули формоизменения, зависящие только от двух координат формоизменения.

1. Инварианты деформации. Деформированное состояние среды в окрестности некоторой точки определяется при известных главных направлениях тремя главными удлинениями λ_k $(k = 1, 2, 3)$, представляющими собой отношения длин элементарных главных волокон после деформации к их длинам в естественном состоянии.

Следуя терминологии А. А. Ильюшина [3], назовем результирующим материальное волокно, одинаково наклоненное в естественном состоянии к направлениям главных волокон.

Не ограничивая величин деформаций, назовем результирующим сдвигом γ синус угла θ, на который повертывается результирующее волокно при деформации относительно тройки главных волокон. Направляющие косинусы результирующего волокна в деформированном состоянии относительно направлений главных волокон можно выразить через главные удлинения:

$$\cos\theta_k = \frac{\lambda_k}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

если геометрию деформирования окрестности точки представлять себе как превращение куба с ребрами — главными волокнами — в прямоугольный параллелепипед. Это же геометрическое представление позволяет легко найти выражение квадрата результирующего сдвига:

$$\gamma^2 = \frac{1}{3}\,\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \tag{1.2}$$

обобщающее известное определение этой величины в теории малых деформаций [3].

В качестве второй из независимых координат деформированного состояния возьмем относительную объемную деформацию Δ:

$$1 + \Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{1.3}$$

Наряду с общими главными удлинениями рассмотрим главные удлинения, обусловленные только формоизменением элемента

$$l_k = \frac{\lambda_k}{(1 + \Delta)^{1/3}} \tag{1.4}$$

поэтому не изменяющиеся при наложении на некоторое деформированное состояние тела чисто объемной деформации или формальной замене λ_k на $t\lambda_k$. Очевидна инвариантность и результирующего сдвига по отношению к изменению объема тела.

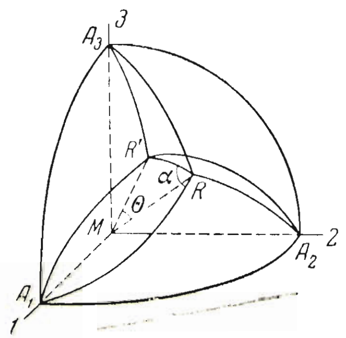
Главные удлинения формоизменения не независимы, поскольку

$$l_1 l_2 l_3 = 1 \tag{1.5}$$

Удлинение формоизменения результирующего волокна назовем результирующим удлинением, обозначим l и определим соотношением

$$3l^2(1+\Delta)^{2/3} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \tag{1.6}$$

Покажем, что формоизменение элемента тела в окрестности некоторой точки вполне определяется заданием обобщенных координат формоизменения — результирующего сдвига и результирующего удлинения. Для этого достаточно привести однозначные выражения удлинений формоизменения через параметры γ и l либо λ_k через Δ, γ, l. Это достигается посредством следующей геометрической интерпретации процесса деформирования. Будем следить за положением полюса — точки пересечения направлением результирующего волокна сферы единичного радиуса с центром в рассматриваемой материальной точке. Отметим положение полюса в естественном R и деформированном R' состояниях (фиг. 1), соединим эти точки дугами больших кругов между собой и с точками пересечения сферы направлениями главных волокон. Рассматривая получившиеся таким построением сферические треугольники A_1RR', найдем следующее представление направляющих косинусов результирующего волокна в деформированном состоянии:



Фиг. 1

$$\sqrt{3}\cos\theta_k = \cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta\cos\alpha_k$$

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha_2 = \alpha + \frac{2}{3}\pi, \qquad \alpha_3 = \alpha - \frac{2}{3}\pi \tag{1.7}$$

Геометрический смысл введенного здесь параметра α ясен из чертежа (фиг. 1); этим углом определяется направление дуги большого круга, вдоль которой переводится полюс по кратчайшему пути из естественного в рассматриваемое деформированное состояние.

На основании (1.7), (1.8), (1.5) нетрудно получить конечное соотношение между тремя координатами формоизменения:

$$l^3\left[(1-2.5\gamma^2)\sqrt{1-\gamma^2} + 0.5\sqrt{2}\gamma^3\cos 3\alpha\right] = 1 \tag{1.8}$$

а если учесть еще (1.4), то и выражения главных удлинений через инвариантные характеристики формоизменения и изменения объема элемента тела:

$$\lambda_k = l(1+\Delta)^{1/3}\left(\sqrt{1-\gamma^2} + \sqrt{2}\gamma\cos\alpha_k\right) \tag{1.9}$$

Приведенные формулы позволяют по заданным обобщенным координатам Δ, γ и α определить единственную систему главных удлинений либо по координатам Δ, γ и l — главные удлинения с точностью до наименования главных направлений.

Учитывая геометрическое содержание параметров формоизменения, а также условия неразрывности либо условие отсутствия бесконечного уплотнения материала, укажем некоторые ограничения возможных значений координат формоизменения:

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant \gamma < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$(1-2.5\gamma^2)\sqrt{1-\gamma^2} + 0.5\sqrt{2}\gamma^3\cos 3\alpha > 0$$

$$-0.5\sqrt{2}\gamma^3 \leqslant \frac{1}{l^3} - (1-2.5\gamma^2)\sqrt{1-\gamma^2} \leqslant 0.5\sqrt{2}\gamma^3$$

Наконец, отметим, что при $\gamma = 0$ необходимо $l = 1$, а угол α остается неопределенным, что согласуется с предполагаемым отсутствием формоизменения тела.

2. Обобщенные модули формоизменения. Считая установленным закон упругой объемной деформации, найдем соотношения между напряжениями и деформациями, содержащие функции инвариантов напряжений и деформаций, не изменяющиеся при наложении на некоторое напряженно-деформированное состояние тела гидростатического давления, вызывающего лишь изменение объема. Как известно [2], при совпадении главных направлений тензоров напряжений и деформаций элементарную работу внутренних сил можно представить в виде

$$\delta' A = \lambda_2\lambda_3\sigma_1\delta\lambda_1 + \lambda_3\lambda_1\sigma_2\delta\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\sigma_3\delta\lambda_3 \tag{2.1}$$

где σ_k — главные истинные напряжения.

С другой стороны, принимая за независимые координаты деформированного состояния Δ, γ, l и предполагая вместе с тем, что условие связи (1.9) и получающееся из него соотношение между вариациями координат

$$[(1 - 2.5\gamma^2)\sqrt{1-\gamma^2} + 0.5\sqrt{2}\gamma^3\cos 3\alpha]\,\delta l +$$
$$+ l\left[\gamma\frac{3\gamma^2 - 2}{\sqrt{1-\gamma^2}} + 0.5\sqrt{2}\gamma^2\cos 3\alpha\right]\delta\gamma - 0.5\sqrt{2}\gamma^3\sin 3\alpha\; l\delta\gamma = 0 \tag{2.2}$$

разрешимы относительно α и $\delta\alpha$ соответственно, можно найти

$$\delta' A = \sigma\delta\Delta + \sigma_\gamma\delta\gamma + \sigma_\gamma\delta l \tag{2.3}$$

Первая из введенных здесь обобщенных сил — гидростатическое напряжение

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{2.4}$$

считается известной из опытов функцией относительного изменения объема:

$$\sigma = K\Delta \tag{2.5}$$

Два других обобщенных напряжения не имеют столь простого физического содержания. В связи с возможностью представления этих величин формулами

$$\sigma_\gamma = \sum_{k=1}^{3}\sigma_k\frac{1}{\lambda_k}\Gamma_k, \qquad \sigma_l = \sum_{k=1}^{3}\sigma_k\frac{1}{\lambda_k}\Gamma_k \tag{2.6}$$

где

$$\Gamma_k = l(1+\Delta)^{4/3}\left[-\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \sqrt{2}\cos\alpha_k - \frac{\sin\alpha_k}{\sin 3\alpha}\left(\frac{2}{\gamma^3 l^3} - \frac{2-3\gamma^2}{\gamma^3\sqrt{1-\gamma^2}}\right)\right]$$
$$L_k = (1+\Delta)^{4/3}\left[\sqrt{1-\gamma^2} + \sqrt{2}\gamma\cos\alpha_k - \frac{2}{\gamma^2 l^3}\frac{\sin\alpha_k}{\sin 3\alpha}\right] \tag{2.7}$$

можно показать лишь, что σ_γ и σ_l пропорциональны некоторым касательным напряжениям на материальных результирующих площадках. Так мы называем материальные площади, одинаково наклоненные в естественном состоянии к направлениям главных волокон. Нетрудно видеть, что направляющие косинусы их нормалей в деформированном состоянии пропорциональны λ_k^{-1}, а непосредственными вычислениями подтверждаются тождества

$$\frac{1}{\lambda_k}\Gamma_k = 0, \qquad \frac{1}{\lambda_k}L_k = 0 \tag{2.8}$$

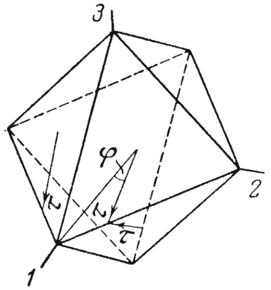
Если теперь вспомнить определение касательных напряжений на произвольных площадках по составляющим тензора напряжений, то становится очевидной высказанная выше интерпретация величин σ_γ и σ_l как составляющих касательного напряжения на результирующей материальной площадке. Используя тождества (2.8), можно показать, что величины $\sigma_l/(1+\Delta)$ и $\sigma_\gamma/(1+\Delta)$ не изменяются при наложении на некоторое состояние тела гидростатического давления, т. е. при замене σ_k и λ_k в формулах (2.6) величинами $p+\sigma_k$ и $t\lambda_k$ соответственно.

Возможно и другое представление обобщенных напряжений формоизменения, связанное с октаэдрическим напряжением.

Известно [3], что истинное нормальное напряжение на геометрической результирующей площадке совпадает с гидростатическим, а полное касательное или октаэдрическое напряжение

$$\tau_i = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2} \tag{2.9}$$

Направление вектора октаэдрического напряжения условимся определять его углом φ в плоскости грани октаэдра с направлением из центра тяжести грани к первому из главных направлений (фиг. 2). Используя формулы преобразования составляющих тензора, можно показать, что векторы касательных напряжений на двух гранях октаэдра, имеющих общее ребро, симметричны относительно этого ребра в том смысле, что после развертки этих граней на одну плоскость векторы касательных напряжений оказываются симметричными. Отмеченное свойство позволяет легко определить направления касательных напряжений на всех гранях октаэдра, если задано касательное напряжение на одной из них.



Фиг. 2

Те же формулы преобразования составляющих тензора позволяют найти известные [2] выражения главных напряжений через инварианты τ_i и φ:

$$\sigma_k = \sigma + \sqrt{2}\,\tau_i \cos\varphi_k \qquad (2.10)$$

$$\left(\varphi_1 = \varphi,\ \ \varphi_2 = \varphi + \frac{2}{3}\pi,\ \ \varphi_3 = \varphi - \frac{2}{3}\pi\right)$$

Используя их в (2.6), можно найти выражения обобщенных напряжений, отнесенных к единице объема деформированной среды, только через параметры $\tau_i, \varphi, \gamma, \alpha$. Это еще раз подтверждает независимость рассматриваемых величин от гидростатического давления и изменения объема.

Возвращаясь к выражению работы внутренних сил (2.3), представим вариации координат Δ, γ, l через вариации удлинений и сравним так преобразованное выражение с (2.1). При этом получаются тождества

$$\sigma_1 - \sigma = G_{\rm I}\left[l_1^2 - \frac{1}{2}(l_2^2 + l_3^2)\right] +$$

$$+ G_{\rm II}\left[\frac{2}{3}l_1 - \frac{1}{3}l_1(l_2 + l_3)(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2) - l_1^2 + \frac{1}{2}(l_2^2 + l_3^2)\right] \qquad (123) \qquad (2.11)$$

где

$$G_{\rm I} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{9}\,\frac{1}{1+\Delta}\left(\frac{\sigma_k\Gamma_k}{l^3\gamma\lambda_k} + \frac{2\sigma_k L_k}{\lambda_k}\right) = \frac{1}{3l^2}\,\frac{\tau_i}{\gamma}\left\{\frac{\sin(2\alpha+\varphi)}{\sin 3\alpha} - \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\,\frac{\cos\gamma\cos 2\alpha - 2\sin\varphi}{\sqrt{1-\gamma^2}} -\right.$$

$$- \sqrt{2}\,\gamma^3\,\frac{\sin\varphi\,(1-\sin 2\alpha)}{\sqrt{1-\gamma^2}} - \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\,\frac{1+5\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{1-\gamma^2}+1-\gamma^2}\,\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin 3\alpha} -$$

$$\left. - \gamma\left(\cos 3\alpha + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\,\frac{1+5\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{1-\gamma^2}+1-\gamma^2}\right)\frac{\sqrt{1-\gamma^2}\sin(2\alpha-\varphi) - 2\sqrt{2}\,\gamma\sin(\alpha-\varphi)}{\sqrt{2}\sin 3\alpha}\right\} \qquad (2.12)$$

$$G_{\rm II} = \frac{1}{3}\,\frac{\tau_i}{l^2\gamma^2}\left\{2\sqrt{2}\,\frac{1-2\gamma^2}{\sqrt{1-\gamma^2}}\,\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin 3\alpha} + \frac{\gamma}{\sin 3\alpha}\left[\sin(2\alpha+\varphi) + 2\sin(2\alpha-\varphi)\right] -\right.$$

$$- \frac{\gamma^2}{\sqrt{2}}\,\frac{\cos\varphi\cos 2\alpha - 2\sin\varphi}{\sqrt{1-\gamma^2}} - \frac{\gamma^3\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ctg}\,3\alpha\sin(2\alpha-\varphi) -$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2}\,\gamma^1\sin\varphi}{\sqrt{1-\gamma^2}}(1-\sin 2\alpha)\right\} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{\gamma}\,\frac{\sigma_\gamma}{1+\Delta}$$

Функции $G_{\rm I}$ и $G_{\rm II}$ инвариантны в отношении изменения объема и гидростатического давления. И если в результате обработки экспериментальных данных окажется, что зависимость функции $G_{\rm I}$, $G_{\rm II}$ от γ и α определяется только материалом и не изменяется при различных напряженных состояниях, то соотношения (2.11) получают значение физических законов, а функции $G_{\rm I}$ и $G_{\rm II}$ параметров γ и α — значение обобщенных модулей формоизменения. Так, обработку экспериментальных данных можно свести к определению двух функций от двух аргументов каждую.

Отметим некоторые случаи упрощения зависимости модулей формоизменения от координат формоизменения.

1. Пусть $\gamma \ll 1$, но $\alpha \neq \varphi$. Пренебрегая слагаемыми порядка γ по сравнению со слагаемыми порядка единицы в выражениях каждой из функций (2.12), получим

$$G_{\mathrm{I}} = \frac{1}{3}\frac{\tau_i}{\gamma}\frac{\sin(2\alpha+\varphi)}{\sin 3\alpha}, \qquad G_{\mathrm{II}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin 3\alpha}\frac{\tau_i}{\gamma^2} \tag{2.13}$$

если отличие параметров α и φ существенно. Если определить экспериментально функцию

$$G^\circ = \frac{1}{2}\frac{\tau_i}{\gamma} \tag{2.14}$$

то первые слагаемые в правых частях (2.11) будут иметь порядок величины $G^\circ\gamma\sin(2\alpha+\varphi)/\sin 3\alpha$, тогда как вторые — порядок величины $G^\circ\gamma\sin(\alpha-\varphi)/\sin 3\alpha$. Поэтому правые части соотношений (2.11) оказываются существенно двучленными и при малых деформациях, если $\varphi \neq \alpha$.

2. Пусть в рассматриваемом напряженно-деформированном состоянии

$$\varphi = \alpha \tag{2.15}$$

т. е. вектор октаэдрического напряжения и дуга большого круга, вдоль которой можно перевести полюс из естественного в данное деформированное состояние, лежат в одной плоскости. Поскольку τ_i и φ — независимые параметры напряженного состояния, в рассматриваемом случае достаточно экспериментального определения отношения (2.14) как функции только переменной γ, тогда как зависимость модулей формоизменения от параметра α оказывается выявленной:

$$G_{\mathrm{I}} = \frac{2}{3}G^\circ\frac{1}{l^2}\Big[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\Big(\cos\alpha\cos 2\alpha - 2\sin\alpha + \frac{\cos 3\alpha}{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\Big) - \\ - \frac{\gamma^2}{2}\frac{1+5\sqrt{1-\gamma^2}}{1-\gamma^2+\sqrt{1-\gamma^2}}\,\frac{1}{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\gamma^3}{\sqrt{1-\gamma^2}}\frac{\cos 3\alpha - 2\sin 3\alpha(1-\sin 2\alpha)}{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\Big]$$

$$G_{\mathrm{II}} = \frac{2}{3}G^\circ\frac{1}{l^2}\Big[1 + \frac{2-0.5\sqrt{2}\gamma^2\sqrt{1-\gamma^2}\cos 3\alpha}{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} - \frac{0.5\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}(\cos\alpha\cos 2\alpha - 2\sin\alpha) - \\ - \frac{\gamma^3}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\alpha(1-\sin 2\alpha)\Big]$$

Таким образом, требование совпадения углов α и φ еще недостаточно для непротиворечивости известного закона подобия девиаторов напряжений и деформаций при произвольных по величине сдвигах. Если же сдвиги малы и величинами сдвигов можно пренебречь по сравнению с единицей, то из (2.11) получим

$$\sigma_1 - \sigma = \frac{1}{(1+\Delta)^{2/3}}\,2G^\circ(e_1 - e) \qquad (123) \tag{2.16}$$

где главные нелинейные составляющие тензора деформаций [4]

$$e_k = \frac{1}{2}(\lambda_k{}^2 - 1), \qquad 3e = e_1 + e_2 + e_3 \tag{2.17}$$

В отличие от известной формулировки этого закона [3] здесь выявляется зависимость множителя при $(e_k - e)$ от изменения объема или гидростатического давления.

3. Если условие (2.15) выполняется в процессе всего деформирования:

$$\varphi = \alpha, \qquad \alpha = \mathrm{const} \tag{2.18}$$

т. е. если действительное движение полюса происходит по дуге большого круга и вектор октаэдрического напряжения лежит в плоскости этой дуги, то соотношения между напряжениями и деформациями можно представить в форме

$$\sigma_1 - \sigma = \frac{2}{3}C\,\frac{1}{(1+\Delta)^{2/3}}\Big[\lambda_1{}^2 - \frac{1}{2}(\lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2)\Big] \qquad (123) \tag{2.19}$$

где обобщенный модуль сдвига при простом деформировании

$$G = \frac{1}{l^2} G^\circ \frac{(1-\gamma^4)\sqrt{1-\gamma^2} - 0.5\sqrt{2}\gamma(\sqrt{1-\gamma^2}+\gamma^2)\cos 3\alpha}{1 - 0.25\sqrt{2}\gamma\sqrt{1-\gamma^2}\cos 3\alpha - 1.25\gamma^2} \qquad (2.20)$$

а G° является экспериментально определяемой функцией только результирующего сдвига. Эти соотношения получаются тем же путем, что и (2.11), необходимо лишь учесть наличие дополнительного условия связи, изложенного предположением (2.18) на вариации обобщенных координат деформированного состояния.

Такими же по форме соотношениями, но с постоянным модулем G пользовался Ривлин [5] при расчетах напряжений в так называемых нео-гуковских несжимаемых телах. Этого типа соотношения предложены Трелоаром [6], исходившим из простейшей статистической теории, и Муни [7] посредством формального выбора простейшего вида потенциала внутренних сил.

Эти соотношения подтверждаются опытами по простому растяжению резиновых образцов, но противоречат опытам с произвольным двухосным растяжением резиновых пластинок, поскольку в этих опытах не обеспечены условия простого деформирования.

Заметим еще, что соотношения типа (2.19) являются прямым обобщением закона подобия девиаторов; в отличие от закона подобия в теории малых деформаций здесь необходимо считаться с зависимостью обобщенного модуля сдвига не только от величины, но и от направления сдвига результирующего волокна.

Вопрос об ограничениях внешних сил, обеспечивающих выполнение условий (2.18), остается открытым.

Поступила 25 III 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
2. Новожилов В. В. О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
4. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.
5. Rivlin. Philos. Trans., A 240, 459, 491, 509, 1948.
6. Treloar. Trans. Faraday Soc., 39, 36, 1943.
7. Mooney. Journ. Appl. Phys., 11, 582, 1940.