Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ТЕНЗОР МОМЕНТОВ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ВЕКТОРОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В МЕХАНИКЕ

Н. В. Истомин

(Ярославль)

В работе вводится понятие тензора моментов системы связанных векторов (подразумевается — с точкой приложения) и показывается его применение в механике, в частности к исследованию свойств центра Гамильтона.

§ 1. Пусть в прямоугольной прямолинейной системе координат $x^1x^2x^3$ задана система n связанных векторов

$$\left\{\begin{matrix} \mathbf{F}^1 & \mathbf{F}^2 \cdots \mathbf{F}^n \\ A_1 & A_2 \cdots A_n \end{matrix}\right\} \tag{1.1}$$

В случае, если система (1.1) есть система связанных векторов, *параллельных* некоторому единичному вектору $\mathbf{e}$, то, как известно [1], *скалярную величину*, равную сумме n произведений проекций на направление $\mathbf{e}$ векторов $\mathbf{F}^\nu$ на абсциссы x_ν^1 их точек приложения $A_\nu(x_\nu^1 x_\nu^2 x_\nu^3)$, называют моментом данной системы связанных векторов относительно координатной плоскости x^2x^3.

Представляется целесообразным расширить понятие момента системы связанных параллельных векторов относительно координатной плоскости на случай *произвольной системы* (1.1) связанных векторов. Назовем моментом S_1 системы (1.1) относительно координатной плоскости x^2x^3 *вектор*, равный сумме n произведений данных векторов $\mathbf{F}^\nu$ на абсциссы x_ν^1 их точек приложения $A_\nu(x_\nu^1 x_\nu^2 x_\nu^3)$:

$$\mathrm{S}_1 = x_\nu^1 \mathbf{F}^\nu, \qquad \mathrm{S}_2 = x_\nu^2 \mathbf{F}^\nu, \qquad \mathrm{S}_3 = x_\nu^3 \mathbf{F}^\nu \tag{1.2}$$

Здесь моменты S_2, S_3 системы (1.1) относительно двух других плоскостей x^3x^1, x^1x^2 записаны аналогично.

Проектируя векторные равенства (1.2) на оси декартовой системы координат $x^1x^2x^3$, получим

$$S_{ij} = x_\nu^i X_j^\nu \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ \nu = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Аффинный ортогональный тензор второго ранга

$$S = \{S_{ij}\}$$

будем называть тензором моментов системы (1.1) связанных векторов.

§ 2. В механике имеет большое значение понятие центра Гамильтона. Действительно, Г. В. Колосов [2] доказал, что центр Гамильтона системы параллельных сил совпадает с центром этой системы сил, и показал, что центр Гамильтона и его частный случай (центр Колосова) заслуживают в большей степени название центра, чем центр Миндинга, Дарбу и центр Мёбиуса, обычно цитируемые как центры непараллельных сил.

А. П. Минаков [3] показал, что при плоско-параллельном движении плоской материальной фигуры центр Гамильтона системы векторов количеств движения материальных точек совпадает с центром качаний, если считать мгновенный центр скоростей фигуры за точку подвеса.

Центр Гамильтона системы сил инерции твердого тела в случае вращения последнего вокруг неподвижной оси совпадает с центром удара, если только система сил инерции имеет равнодействующую [1], а в случае плоско-параллельного движения плоской материальной фигуры совпадает с центром качаний, если считать мгновенный центр ускорений за точку подвеса.

Заметим, что центр Гамильтона системы векторов количеств движения материальных точек тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси лежит на оси качаний и совпадает с центром удара, если только тело таково, что ось вращения является главной относительно некоторой своей точки [2], а при плоско-параллельном движении тела находится на оси качаний и совпадает с центром удара этого тела, если считать мгновенную ось вращения за ось подвеса и если тело таково, что эта мгновенная ось вращения является главной относительно некоторой своей точки [2].

Центр Гамильтона системы сил инерции твердого тела в случае плоско-параллельного движения этого тела совпадает с центром удара, если считать мгновенную ось ускорений за ось подвеса и если данное тело таково, что мгновенная ось ускорений является главной относительно некоторой своей точки.

При известных условиях [2] центр Гамильтона совпадает с центром Миндинга.

Можно доказать, что центр Гамильтона совпадает с так называемым полюсом инерции [4], применяемым при динамическом исследовании, и что в некоторых случаях центр Гамильтона касательных напряжений, действующих в поперечном сечении бруса при изгибе последнего, совпадает с центром изгиба.

Покажем, что введенное нами понятие тензора моментов может быть успешно применено к исследованию свойств центра Гамильтона системы связанных векторов.

Выясним: 1) как ведет себя центр Гамильтона в случае поворота на заданный угол φ всех векторов произвольной системы вокруг параллельных между собой осей заданного направления (α, β, γ), проходящих через соответствующие точки приложения векторов данной системы; 2) существуют ли системы векторов, отличные от системы параллельных векторов и произвольной плоской системы векторов, центры Гамильтона которых обладают свойствами, аналогичными свойствам центра системы параллельных векторов и известного центра плоской системы векторов.

Рассмотрим произвольную систему связанных векторов, для которой существует центр Гамильтона. (Для этого необходимо и достаточно, чтобы главный вектор данной системы векторов был отличен от нуля.)

Пусть направление осей поворота определяется единичным вектором

$$\mathbf{e} = \alpha\,\mathbf{e}_1 + \beta\,\mathbf{e}_2 + \gamma\,\mathbf{e}_3$$

Повернем все векторы данной системы на произвольный угол φ вокруг параллельных между собой осей заданного произвольным образом направления $\mathbf{e}$, проходящих через соответствующие точки приложения векторов, и вычислим координаты центра Гамильтона повернутой системы векторов.

Для осуществления такого поворота нужно каждый вектор $\mathbf{F}^{\nu}$ данной системы умножить на тензор поворота [5]

$$T_{\alpha,\beta,\gamma}^{\varphi} \equiv \{a_{ij}\}$$

где

$$a_{11} = \alpha^2 + (1-\alpha^2)\cos\varphi, \quad a_{12} = \alpha\beta(1-\cos\varphi) - \gamma\sin\varphi, \quad a_{13} = \alpha\gamma(1-\cos\varphi) + \beta\sin$$

$$a_{21} = \beta\alpha(1-\cos\varphi) + \gamma\sin\varphi, \quad a_{22} = \beta^2 + (1-\beta^2)\cos\varphi, \quad a_{23} = \beta\gamma(1-\cos\varphi) - \alpha\sin\varphi$$

$$a_{31} = \gamma\alpha(1-\cos\varphi) - \beta\sin\varphi, \quad a_{32} = \gamma\beta(1-\cos\varphi) + \alpha\sin\varphi, \quad a_{33} = \gamma^2 + (1-\gamma^2)\cos\varphi$$

Известно, что радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ центра Гамильтона C определяется по формуле

$$\mathbf{r}_c = \frac{\mathbf{R}\times\mathbf{L}_0 + V_0\mathbf{R}}{R^2}$$

---

[1] Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$I_{x^3x^1}\, x_{ц}^2 - I_{x^3x^2}\, x_{ц}^1 = 0,$$

т. е. чтобы ось вращения x^3 была главной относительно некоторой своей точки.

[2] Это условие будет всегда выполнено, если, например, рассматриваемое тело однородно и имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси.

где

$$\mathbf{R}=\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{F}^{\nu},\qquad \mathbf{L}_0=\sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{mom}_0\mathbf{F}^{\nu},\qquad V_0=S_{11}+S_{22}+S_{33}$$

Проделав соответствующие вычисления, получим

$$R^2x_c{}^1=\underset{(123)}{R_1S_{11}+R_2S_{12}+R_3S_{13}}+\begin{vmatrix}R_1 & R_2 & R_3\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}R_1 & R_2 & R_3\\ S_{21} & S_{22} & S_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем символы (1 2 3), а также $(\alpha\beta\gamma)$ означают, что остальные две формулы этой же группы получаются из выписанной циклической перестановкой индексов 1 2 3 и $\alpha\beta\gamma$.

Формулам (2.1) можно придать следующий вид:

$$x_c{}^1=a_1+b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi\qquad (1\ 2\ 3)\tag{2.2}$$

где

$$a_1=\frac{1}{R^2}\left\{R_1S_{11}+R_2S_{12}+R_3S_{13}+\beta\begin{vmatrix}R_1 & R_2 & R_3\\ \alpha & \beta & \gamma\\ S_{31} & S_{32} & S_{33}\end{vmatrix}+\gamma\begin{vmatrix}R_1 & R_2 & R_3\\ S_{21} & S_{22} & S_{23}\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}\right.\qquad \begin{matrix}(123)\\(\alpha\beta\gamma)\end{matrix}$$

$$b_1=\frac{1}{R^2}\left\{\begin{vmatrix}R_1 & R_2 & R_3\\ -\beta\alpha & 1-\beta^2 & -\beta\gamma\\ S_{31} & S_{32} & S_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}R_1 & R_2 & R_3\\ S_{21} & S_{22} & S_{23}\\ -\gamma\alpha & -\gamma\beta & 1-\gamma^2\end{vmatrix}\right.\qquad \begin{matrix}(123)\\(\alpha\beta\gamma)\end{matrix}\tag{2.3}$$

$$c_1=\frac{1}{R^2}\left\{\begin{vmatrix}R_1 & R_2 & R_3\\ \gamma & 0 & -\alpha\\ S_{31} & S_{32} & S_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}R_1 & R_2 & R_3\\ S_{21} & S_{22} & S_{23}\\ -\beta & \alpha & 0\end{vmatrix}\right.\qquad \begin{matrix}(123)\\(\alpha\beta\gamma)\end{matrix}$$

Докажем теоремы, характеризующие свойства центра Гамильтона.

Теорема 1. Для того чтобы центр Гамильтона некоторой системы векторов не менял своего положения в пространстве при операции поворота всех векторов на любой угол φ вокруг параллельных между собой осей некоторого направления, проходящих через соответствующие точки приложения векторов, достаточно, чтобы это направление было перпендикулярным к так называемой центральной плоскости, а прямоугольный треугольник ABC с катетами $CB=|R_1|$ и $CA=|R_2|$ был подобен треугольнику центров $A_1B_1C_1$ [6], соответствующих осям координат [1].

Действительно, выясним, каким условиям должна удовлетворять система векторов, чтобы ее центр Гамильтона не менял своего положения в пространстве при известной операции поворота всех векторов на любой угол φ вокруг осей, параллельных оси x^3 ($\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=1$). Из формул (2.2) видно, что центр Гамильтона не будет зависеть от угла поворота φ, если

$$b_1=b_2=b_3=c_1=c_2=c_3=0$$

Развертывая эти условия и учитывая, что $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=1$, будем иметь

$$R_1S_{33}-R_3S_{31}=0,\qquad R_2S_{33}-R_3S_{32}=0\tag{2.4}$$

$$(S_{11}+S_{22})R_3=R_1S_{13}+R_2S_{23},\qquad (S_{21}+S_{12})R_3=R_1S_{23}-R_2S_{13}\tag{2.5}$$

Из уравнений (2.4) имеем

$$\frac{S_{31}}{R_1}=\frac{S_{32}}{R_2}=\frac{S_{33}}{R_3}$$

значит, аппликаты трех центров равны между собой: $x_1{}^3=x_2{}^3=x_3{}^3$, т. е. ось x^3 (в нашем случае ось x^3 задает направление осей поворотов) перпендикулярна центральной плоскости.

---

[1] Эта теорема для системы сил в несколько иной редакции была доказана впервые, повидимому, Г. В. Колосовым методом комплексной переменной в работе, представленной Comptes Rendus 7 ноября 1927 г. [2].

Из (2.5) получаем

$$\frac{x_1^1 - x_3^1}{x_2^2 - x_3^2} = -\frac{R_2}{R_1}, \qquad \frac{x_2^1 - x_3^1}{x_1^2 - x_3^2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Геометрический смысл полученных условий заключается в том, что прямоугольный треугольник ABC подобен треугольнику центров $A_1B_1C_1$, где $A_1(x_1^1; x_1^2; x_1^3)$, $B_1(x_2^1; x_2^2; x_2^3)$, $C_1(x_3^1; x_3^2; x_3^3)$.

Теорема 2. Для того чтобы центр Гамильтона данной системы векторов не менял своего положения в пространстве при операции поворота всех векторов на любой угол φ вокруг параллельных между собой осей любого направления (α, β, γ), проходящих через соответствующие точки приложения векторов, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главные моменты данной системы векторов относительно трех координатных плоскостей были коллинеарными:

$$\mathbf{R} \parallel \mathbf{S}_1 \parallel \mathbf{S}_2 \parallel \mathbf{S}_3 \tag{2.6}$$

другими словами, чтобы три центра с астатическими координатами [6] совпадали между собой: $x_1^1 = x_2^1 = x_3^1 \quad (123)$.

Из формул (2.2) получаем $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Развертывая условия $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ по формулам (2.3) и пользуясь произвольностью направления (α, β, γ), получим

$$R_1(S_{32} - S_{23}) - R_2 S_{31} + R_3 S_{21} = 0, \qquad R_2 S_{23} - R_3 S_{22} = 0, \qquad R_3 S_{32} - R_2 S_{33} = 0 \quad (123)$$

Отсюда следует (2.6). Достаточность условий (2.6) легко усматривается из формул (2.1). Очевидно также, что центр Гамильтона системы векторов не изменит своего положения в пространстве, если величины всех векторов изменить в одном и том же отношении.

Условия (2.6) эквивалентны требованию, чтобы данная система векторов при указанном повороте не выходила из класса систем векторов, приводящихся к эквивалентному вектору [1].

Теорема 3. При повороте всех векторов данной системы с главным вектором, отличным от нуля, вокруг осей, параллельных заданному направлению и проходящих через соответствующие точки приложения векторов, центр Гамильтона этой системы, вообще говоря, движется в общем случае по эллипсу.

Действительно, исключая параметр φ из уравнений (2.2), получим

$$(x_c^1 - a_1)^2 (c_2^2 + b_2^2) - 2(c_1c_2 + b_1b_2)(x_c^1 - a_1)(x_c^2 - a_2) + (x_c^2 - a_2)^2 (c_1^2 + b_1^2) = \\ = (b_1c_2 - c_1b_2)^2$$

$$\begin{vmatrix} x_c^1 - a_1 & x_c^2 - a_2 & x_c^3 - a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.7}$$

Так как инварианты первого уравнения (2.7) суть

$$\varepsilon = b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2, \qquad \delta = (b_1c_2 - c_1b_2)^2, \qquad \Delta = -\delta^2$$

и коэффициент при $x_c^3 - a_3$ во втором уравнении (2.7) равен $\sqrt{\delta}$, то отсюда следует наше утверждение.

§ 3. Рассмотрим частные случаи нахождения центров Гамильтона.

1. Пусть дана плоская система сил с главным вектором, отличным от нуля. Расположим декартову систему координат так, чтобы координатная плоскость x^1x совпадала с плоскостью расположения сил. Тогда будем иметь $x_\nu^3 = 0$, $X3^\nu = 0$, $R_3 = 0$ и, следовательно,

$$S = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

[1] Две системы связанных векторов называются эквивалентными, если равны соответственно их главные векторы, главные моменты и главные вириалы для любой точки пространства.

Формулы (2.1) дают

$$x_c^1 = \frac{1}{R^2}\{R_1S_{11} + R_2S_{12} + [\gamma^2 + (1-\gamma^2)\cos\varphi](R_1S_{22} - R_2S_{21})\}$$

$$x_c^2 = \frac{1}{R^2}\{R_1S_{21} + R_2S_{22} + [\gamma^2 + (1-\gamma^2)\cos\varphi](R_2S_{11} - R_1S_{12})\}$$

$$x_c^3 = \frac{1}{R^2}\{[\gamma\alpha(1-\cos\varphi) + \beta\sin\varphi](R_2S_{21} - R_1S_{22}) + \\ + [\beta\gamma(1-\cos\varphi) - \alpha\sin\varphi](R_1S_{12} - R_2S_{11})\}$$

Если плоская система сил такова, что ее главный вектор коллинеарен главным моментам данной системы сил относительно трех координатных плоскостей, то будем иметь

$$x_c^1 = \frac{1}{R^2}(R_1S_{11} + R_2S_{12}), \qquad x_c^2 = \frac{1}{R^2}(R_1S_{21} + R_2S_{22}), \qquad x_c^3 = 0$$

Предположим теперь, что плоская система сил такова, что условия (2.6) не имеют места. Очевидно, что центр Гамильтона такой плоской системы сил не будет зависеть от угла поворота φ, если выбрать специальным образом направление осей поворота, а именно, перпендикулярно плоскости расположения сил: в этом случае $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ и поэтому координаты центра Гамильтона определяются по формулам

$$x_c^1 = \frac{1}{R^2}[R_2(S_{12} - S_{21}) + R_1(S_{11} + S_{22})],$$

$$x_c^2 = \frac{1}{R^2}[R_1(S_{21} - S_{12}) + R_2(S_{11} + S_{22})], \qquad x_c^3 = 0.$$

2. Существуют системы сил, отличные от системы параллельных сил и произвольной плоской системы сил, центры Гамильтона которых обладают свойством сохранять свое положение в пространстве при известной из предыдущего операции произвольного поворота сил. В самом деле, пусть точки приложения любых n сил взяты на прямой и пусть начало координат декартовой системы расположено в точке O этой прямой; тогда, если уравнения прямой суть $x^2 = k_1x^1$, $x^3 = k_2x^1$, будем иметь $S_2 = k_1S_1$, $S_3 = k_2S_1$, т. е. три вектора S_1 S_2 S_3 коллинеарны.

Если главный вектор $\mathbf{F}$ взятой системы n сил не коллинеарен S_1, то мы всегда сможем достроить пример так, чтобы имело место (2.6). С этой целью прибавим к взятой системе силу $\mathbf{F}^{n+1} = k_3S_1 - \mathbf{F}$ и приложим ее в точке O.

Новая система из $n+1$ сил будет иметь главный вектор $\mathbf{R} = k_3S_1$ и главные моменты $S_1S_2S_3$ относительно координатных плоскостей, совпадающие с первоначальными. Построенная система сил удовлетворяет условию (2.6), а следовательно, ее центр Гамильтона обладает тем же свойством, что и центр системы параллельных сил. В рассматриваемом случае координаты центра Гамильтона определяются на основании (2.1) по формулам

$$x_c^1 = \frac{1}{k_3}, \qquad x_c^2 = \frac{k_1}{k_3}, \qquad x_c^3 = \frac{k_2}{k_3}$$

Поступила 23 IX 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель П. Руководство теоретической механики, т. I, ч. 1, § 32, стр. 41. Париж, Изд. III, 1909.
2. Колосов Г. В. Sur le centre des forces non paralèlles. Comptes Rendus, т. 185, 1927.
3. Минаков А. П. О центрах в механике и о приведении систем сил инерции в твердом теле к простейшему виду. Научно-исследовательские труды Московского текстильного института, т. X, 1948.
4. Камен М. Ю. Полюс инерции и его применение к динамическому исследованию одной системы с принужденным плоским движением. Труды Ивановского химико-технологического ин-та, вып. 2, 1939.
5. Эйхенвальд А. А. Теоретическая физика, ч. 1. Гос. технико-теоретическое изд-во. М.—Л., 1932.
6. Prony R. Leçons de Mécanique analytique. I, Paris, 1810; II, Paris, 1815.