Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

О НЕУСТАНОВИВШИМСЯ ДВИЖЕНИИ КОНСЕРВАТИВНЫХ ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассматриваются движения голономных систем со связями, не зависящими явно от времени. Приводятся критерии неустойчивости для движений таких систем.

Выводы о неустойчивости делаются на основании теорем о неустойчивости А. М. Ляпунова и Н. Г. Четаева.

1. Пусть задана голономная система со связями, не зависящими явно от времени. Запишем ее уравнения движения в форме Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1}$$

Пусть

$$p_1(t), \ldots, p_n(t), \qquad q_1(t), \ldots, q_n(t) \tag{2}$$

какое-либо частное решение системы (1), которое примем за невозмущенное движение. Если положить

$$\eta_i = p_i - p_i(t), \qquad \xi_i = q_i - q_i(t)$$

и предположить, что H — голоморфная функция своих аргументов в окрестности рассматриваемого решения, то уравнения возмущенного движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right)^\circ \xi_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^\circ \eta_j + X_j \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)^\circ \xi_j - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\right)^\circ \eta_j + Y_i \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

где X_i и Y_i — голоморфные функции степени не ниже второй относительно переменных с ограниченными и непрерывными коэффициентами — функциями времени. Символ $(\ldots)^\circ$ здесь, как и в дальнейшем, означает, что на место переменных подставлены функции (2).

2. Рассмотрим функцию $P = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n$ и ее производную, взятую в силу уравнений (3):

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\xi_j}{dt}\eta_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{d\eta_i}{dt}\xi_i =$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_j}\right)^\circ \eta_i\eta_j - \sum_{ij=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)^\circ \xi_i\xi_j + \sum_{i=1}^{n} X_i\eta_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i\xi_i$$

Теорема. Если

$$R = \sum_{ij=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^\circ \eta_i\eta_j$$

есть определенно положительная функция $\eta_1, \ldots, \eta_n$, а

$$W = \sum_{ij=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)^{\circ} \xi_i \xi_j$$

есть определенно отрицательная функция $\xi_1, \ldots, \xi_n$, то невозмущенное движение неустойчиво. Действительно, при выполнении условий теоремы функция dP/dt определенно положительна, а функция P, как не зависящая явно от времени, допускает бесконечно малый высший предел и может принимать положительные значения при сколь угодно малых $|\eta_1|, \ldots, |\eta_n|, |\xi_1|, \ldots, |\xi_n|$. Таким образом, выполнены все условия первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Отметим, что R не будет определенно положительной функцией $\eta_1, \ldots, \eta_n$ лишь в исключительных случаях. Действительно, так как

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{n} \alpha_{ij}(q_1, \ldots, q_n) p_i p_j$$

кинетическая энергия системы есть функция определенно положительная относительно $p_1, \ldots, p_n$ при любых конечных значениях $q_1, \ldots, q_n$, то становится ясно, что

$$R = \sum_{ij=1}^{n} (\alpha_{ij})^{\circ} \eta_i \eta_j$$

не может принимать отрицательных значений. Иногда, правда, в том случае, когда среди функций $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ найдется неограниченная, может случиться, что R будет лишь постоянно положительной.

3. Если в уравнениях (3) отбросить X_i и Y_i, то получатся уравнения первого приближения, которые носят название уравнений Пуанкаре.

Рассмотрим вопрос о характеристическом числе этих уравнений при выполнении условий предыдущей теоремы.

В этом случае dP/dt представляет определенно положительную квадратичную форму, и, следовательно, существует такая постоянная $\beta > 0$, что справедлива оценка

$$\frac{dP}{dt} = R - W \geqslant \beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \beta P$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\circ} \eta_i^{\circ} e^{\beta(t-t_0)}$$

Применяя теоремы о характеристичном числе и сумме произведения, приходим к выводу, что уравнения Пуанкаре имеют отрицательное характеристичное число.

4. В том интересном для практики случае, когда H не зависит явно от $q_{k+1}, \ldots, q_n$, W не может быть определенно отрицательной функцией, однако теорема из 3° переносима и на этот случай, если

$$W' = \sum_{ij=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)^{\circ} \xi_i \xi_j$$

есть определенно отрицательная функция $\xi_1, \ldots, \xi_k$,

$$R' = \sum_{ij=1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ} \eta_i \eta_j$$

есть определенно положительная функция $\eta_1, \ldots, \eta_k$.

Действительно, в этом случае любое движение типа (2) имеет вид:

$$p_1 = p_1(t), \ldots, p_k = p_k(t); \quad p_{k+1} = \alpha_{k+1}, \ldots, p_n = \alpha_n; \quad q_1 = q_1(t), \ldots, q_n = q_n(t) \quad (4)$$

где $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ — постоянные, а $q_{k+1}, \ldots, q_n$ найдутся квадратурами после интеграции системы $2k$ уравнений.

Если $\eta_{k+1}(t_0) = \cdots \eta_n(t_0) = 0$, то при всяком $t \geqslant t_0$

$$\eta_{k+1}(t) = \ldots \eta_n(t) = 0$$

так как $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_n$ суть интегралы системы (3).

Вопрос о неустойчивости решается аналогично при помощи рассмотрения функции $\xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_k\eta_k$ и ее производной, взятой в силу уравнений (3). Причем в результате неустойчивость устанавливается по отношению к $\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_k$ при условии, что $\eta_{k+1}(t_0) = \ldots \eta_n(t_0) = 0$. Теорема об отрицательном характеристичном числе переносима и на этот случай.

5. Если в решении вида (4)

$$q_1(t) = q_1^\circ, \quad q_2(t) = q_2^\circ, \ldots, q_k(t) = q_k^\circ, \quad p_1 = p_1^\circ, \ldots, p_k = p_k^\circ$$

где $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ$, $p_1^\circ, \ldots, p_k^\circ$ — постоянные, удовлетворяющие при фиксированных $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ системе $2k$ конечных уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \qquad (i=1, \ldots, k) \tag{5}$$

и если, кроме того, равенства

$$\left(\frac{\partial^r H}{\partial p_i \partial q_1^{m_1} \ldots \partial q_k^{m_k}}\right)^\circ = 0 \tag{6}$$

выполняются при любых $m_1 + m_2 + \ldots + m_k > 0$ и $i \leqslant k$, то $H - (H)^\circ$ представим в виде

$$H - (H)^\circ = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{k} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^\circ + \delta_{ij}\right] \eta_i \eta_j + W_1$$

где $\delta_{ij}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ уничтожаются, когда все $\xi_1, \ldots, \xi_k$ равны нулю, а W_1 — функция, зависящая только от $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Действительно, в разложение $H - (H)^\circ$ при условии, что $\eta_{k+1}(t_0) = \ldots \eta_n(t_0) = 0$, не войдут члены, зависящие от переменных линейно в силу уравнений (5). В силу условий (6) в это разложение не войдут члены, содержащие $\eta_1, \ldots, \eta_k$ в первой степени, а так как H представляет квадратичную относительно импульсов форму, то в разложении не встретится членов, содержащих $\eta_1, \ldots, \eta_k$ в степени выше второй, поэтому δ_{ij} и можно считать не зависящими от $\eta_1, \ldots, \eta_k$.

Уравнения (3) в этом случае приобретают вид:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{ij=1}^{k} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^\circ + \delta_{ij}\right] \eta_j, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_{l,\, j=1}^{k} \delta_{lj} \eta_l \eta_j - \frac{\partial W_1}{\partial \xi_i}$$

следовательно,

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{ij=1}^{k} \xi_i \eta_j = \sum_{ij=1}^{k} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^\circ + \gamma_{ij}\right] \eta_i \eta_j - \sum_{ij=1}^{k} \frac{\partial W_1}{\partial \xi_i} \xi_i$$

где

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} - \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \xi_l} \xi_l$$

Если W_1 есть форма степени r, то на основании теоремы Эйлера об однородных функциях имеем

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{ij=1}^{k} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_j}\right) + \gamma_{ij}\right] \eta_i \eta_j - r W_1$$

Покажем, что если W_1 может принимать отрицательные значения, то движение неустойчиво.

Для доказательства, следуя Н. Г. Четаеву[2], рассмотрим область C, в которой одновременно выполняются неравенства

$$H-(H)^\circ<0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i>0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2+\eta_i^2<R$$

где $R>0$ — некоторая малая постоянная, считая, что начальные возмущения стеснены равенствами

$$\eta_{k+1}(t_0)=\ldots \eta_n(t_0)=0$$

Рассмотрение функции

$$M=[-H+(H)^\circ] \sum_{i=1}^{k} \xi_i \eta_i$$

которая мало отличается от аналогичной функции, впервые предложенной Н. Г. Четаевым, и ее производной

$$\frac{dM}{dt}=\left[-H+(H)^\circ\right]\left[\sum_{ij=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^\circ+\gamma_{ij}\right] \eta_i \eta_j-r W_1\right]$$

взятой в силу (3), приводит к доказательству высказанного утверждения.

Действительно, если $M \geqslant \varepsilon>0$ ($\varepsilon>0$ — постоянная,) то $-H+(H)^\circ \geqslant \varepsilon / L$, так как сумма $\xi_1 \eta_1+\ldots+\xi_k \eta_k \leqslant L>0$, т. е. ограничена в области C. В данном случае

$$R=\sum_{ij=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^\circ \eta_i \eta_j$$

имеет постоянные коэффициенты и, следовательно, определенно положительна, так как в противном случае функция

$$T=\sum_{ij=1}^{n} \alpha_{ij}(q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ) p_i p_j$$

могла бы получить нулевые значения при условии, что не все $p_i=0$. Отсюда следует, что

$$W_1 \leqslant-\frac{\varepsilon}{L}, \qquad \frac{dM}{dt}>\frac{\varepsilon}{L} \frac{r \varepsilon}{L}=\frac{r \varepsilon^2}{L^2} \qquad \text{при } M>\varepsilon>0$$

т. е. dM / dt есть функция определенно положительная в области C, существующей для сколь угодно малых значений $|\eta_1|, \ldots,|\eta_k|,|\xi_1|, \ldots,|\xi_k|$. Применяя теорему Н. Г. Четаева [2], приходим к выводу, что рассматриваемое движение неустойчиво по отношению к $\eta_1, \ldots, \eta_k, \xi_1, \ldots, \xi_k$ при условии, что $\eta_{k+1}(t_0)=\ldots \eta_n(t_0)=0$.

6. В качестве примера к теореме из 3° можно рассмотреть случай полета артиллерийского снаряда по весьма настильной траектории [2] в предположении, что на него действует опрокидывающий момент, равный $a \sin \gamma$, где $a=a(v)>0$ считается постоянной, а γ — угол между горизонтальной скоростью полета центра тяжести и осью симметричного однородного снаряда.

Можно показать при рассмотрении движения снаряда вокруг центра тяжести, что функция H имеет вид:

$$H=\frac{1}{2} A(\omega'+\beta' \sin \alpha)^2+\frac{1}{2} B \beta'^2 \cos^2 \alpha+\frac{1}{2} B \alpha'^2+a \cos \alpha \cos \beta$$

Здесь A, B — моменты инерции снаряда относительно главных, центральных осей инерции, α — угол между осью снаряда и ее проекций на вертикальную плоскость стрельбы, β — угол между этой проекцией и горизонтальной неподвижной осью, выбранной в плоскости стрельбы, ω' — угловая скорость снаряда вокруг оси.

В качестве невозмущенного движения рассматривается решение

$$\alpha = \alpha' = 0, \qquad \beta = \beta' = 0, \qquad \omega' = \omega = \text{const} \neq 0$$

Для данного случая

$$p_1 = A(\omega' + \beta' \sin\alpha), \qquad p_2 = p_1 \sin\alpha + B\beta' \cos^2\alpha, \qquad p_3 = B\alpha$$

$$H = \frac{p_1^2}{2A} + \frac{(p_2 - p_1 \sin\alpha)^2}{2B\cos^2\alpha} + \frac{p_3^2}{2c} + a\cos\alpha\cos\beta$$

Выпишем

$$W' = \sum_{ij=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial\xi_i \partial\xi_j}\right)^\circ \xi_i \xi_j = \left[\frac{(p_1)^{02}}{B} - a\right]\alpha^2 - a\beta^2$$

Она будет определенно отрицательной функцией α, β, если $(p_1)^{02} - aB < 0$ или если переписать в первоначальных обозначениях, $A^2\omega^2 - aB < 0$.

При выполнении этого условия движение будет неустойчиво даже при условии, что $(p_1)^\circ$ не возмущается (см. п. 3) и уравнения первого приближения будут иметь отрицательное характеристичное число. Этот результат хорошо согласуется с предыдущими исследованиями.

7. В качестве иллюстрации к последней теореме можно рассмотреть движение свободной материальной точки массы [2] m в цилиндрических координатах r, θ, z под действием сил, допускающих силовую функцию $u = -\varphi(r, z)$.

Функция H в данном случае имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} m (r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2) + \varphi(r, z)$$

Если ввести обозначения $p_1 = mr'$, $p_2 = mr^2\theta'$, $p_3 = mz'$, то H примет вид:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + \frac{p_3^2}{2m} + \varphi(r, z)$$

В качестве невозмущенного движения рассмотрим движение

$$r = r_0, \qquad z' = r' = 0, \qquad z' = z_0, \qquad z' = 0 \qquad \theta' = \theta_0' \tag{7}$$

в котором изменяется одна лишь циклическая координата θ, причем r_0, z_0, θ_0' удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial H}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

Если

$$W_1 = \frac{(p_2)^{02}}{2mr_0^2} + \varphi$$

представляет форму, могущую принимать отрицательные значения, то движение (7) будет неустойчивым, так как условия (6) из п. 5 здесь, очевидно, выполняются.

Поступила 12 XII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. Четаев. Н. Г. Устойчивость движения. ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.