Прикладная математика и механика. Том XX, 1956

Институт механики Академии наук Союза ССР

О РАСЧЕТЕ КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЕЙ ВАЛА [1]

Н. Е. Кочин

При расчете критических скоростей вала авиационного мотора мы имеем дело со случаем, когда сам мотор, по характеру его прикрепления к крылу самолета при помощи подмоторной рамы, может совершать упругие колебания. Эти колебания через подшипники могут передаваться коленчатому валу, и возникает вопрос об учете влияния этих колебаний на критические скорости вала. Два обстоятельства, специфических для рассматриваемой задачи, позволяют сразу дать ответ на этот вопрос. Прежде всего нужно отметить, что масса мотора гораздо больше массы вала. Второе обстоятельство заключается в том, что частоты собственных поперечных колебаний вала значительно превосходят частоты собственных колебаний мотора на подмоторной раме.

Будем теперь рассматривать вопрос о поперечных колебаниях составной системы, состоящей из мотора, прикрепленного к лонжерону крыла при помощи подмоторной рамы и вала, один подшипник которого прикреплен к лонжерону крыла, а два других жестко соединены с мотором. В силу малости массы вала по сравнению с массой мотора можно ожидать, что одни из собственных частот колебаний системы будут близки к частотам собственных колебаний мотора на подмоторной раме. Так как эти частоты колебаний гораздо ниже частот собственных колебаний вала, то можно ожидать, что колебания вала будут происходить в основном за счет колебаний подшипника. Таким образом, колебания мотора вызовут колебания вала, который будет изгибаться в силу того, что его подшипники будут перемещаться вместе с мотором. Другие частоты колебаний всей системы будут близки к частотам собственных колебаний вала. Тут можно ожидать, что соответствующие колебания системы будут состоять в том, что мотор в силу своей большой массы и резкого различия собственных частот будет совершать колебания очень малой амплитуды по сравнению с амплитудами колебания вала. Таким образом, подшипники будут оставаться почти неподвижными, и форма колебаний вала будет очень близка к форме колебаний вала в неподвижных подшипниках. В результате мы приходим к заключению, что при выполнении указанных выше двух условий частоты свободных поперечных колебаний вала меняются очень мало. Поэтому и критические скорости вала изменятся очень мало.

Для подтверждения сделанных только что заключений, носящих качественный характер, нами был проделан расчет критических скоростей вала для одного случая, являющегося теоретической схемой рассмотренной выше системы. Вал ABC длины $2l$ лежит горизонтально в трех подшипниках, один из которых A неподвижен, а два других — B и C (B лежит посредине между A и C) жестко соединены с массой M, имитирующей мотор. К этой массе прикреплены пружины, на которых она может совершать колебания. Предположим для простоты, что свобода движения массы M, стеснена таким образом, что эта масса может перемещаться только поступательно и только в вертикальном направлении. Частоту свободных колебаний изолированной массы M на прикрепленных к ней пружинах обозначим через α. Обозначим далее через E модуль упругости Юнга материала вала, через J — момент инерции площади сечения вала относительно поперечной оси, проходящей через центр вала, и через

[1] Заметка покойного Н. Е. Кочина обнаружена в отчетах Института механики, выполнена в Казани в 1941 г. и печатается без изменений.

m — массу вала, приходящуюся на единицу его длины. Обозначим, наконец, через ω угловую скорость вращения вала. Выбирая оси x и y, как указано на чертеже, для определения прогиба y будем иметь уравнение

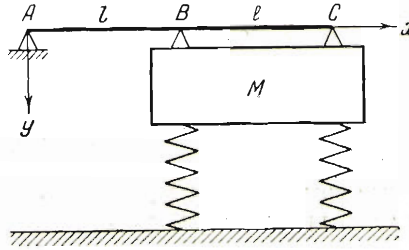
$$y^{\mathrm{IV}} = v^4 y$$

где

$$y^4 = \frac{m\omega^2}{EJ}$$

Решением этого уравнения будет

$$y = P \operatorname{ch} vx + Q \operatorname{sh} vx + R \cos vx + S \sin vx$$



Фиг. 1

причем постоянные P, Q, R, S имеют одни значения в промежутке AB и другие значения в промежутке BC. Для определения восьми постоянных мы имеем следующие восемь условий. В точке A два условия: $y = 0$, $y'' = 0$; в точке B три условия — непрерывность y, y', y''; в точке C одно условие: $y'' = 0$; седьмое условие вытекает из поступательного движения массы M: $y_B = y_C$, наконец, восьмое условие

$$EJ\,[-y'''(l+0) + y'''(l-0) + y'''(2l-0)] + M(\omega^2 - \alpha^2)\,y_B = 0$$

выражает равенство нулю суммы проекций на вертикаль всех сил, действующих на массу M, включая и силу инерции.

Для того чтобы полученная система восьми уравнений могла иметь решение, отличное от нуля, ее определитель должен равняться нулю. В результате мы получаем для определения критической скорости вала ω трансцендентное уравнение. Это уравнение имеет следующий вид:

$$4(\rho z^4 - \sigma)\sin z \operatorname{sh} z(\sin z \operatorname{ch} z - \cos z \operatorname{sh} z) + G(z) = 0$$

где положено

$$\rho = \frac{M}{ml}, \quad \sigma = \frac{M\alpha^2 l^3}{EJ}, \quad z^4 = \frac{ml^4\omega^2}{EJ}$$

$$G(z) = z^3\,[(\operatorname{sh} z - \sin z)^2 + 4\sin z \operatorname{sh} z\,(2\cos z + 2\operatorname{ch} z - 5\operatorname{ch} z\cos z)]$$

Деля обе части полученного уравнения на 4ρ, получим

$$\left(z^4 - \frac{\sigma}{\rho}\right)\sin z \operatorname{sh} z(\sin z \operatorname{ch} z - \cos z \operatorname{sh} z) + \frac{G(z)}{4\rho} = 0$$

Но ρ представляет отношение величины массы M к половине массы вала и есть, следовательно, большая величина. Поэтому второй член предыдущего уравнения будет очень мал и корни уравнения будут близки к корням уравнения

$$\left(z^4 - \frac{\sigma}{\rho}\right)\sin z \operatorname{sh} z(\sin z \operatorname{ch} z - \cos z \operatorname{sh} z) = 0$$

Первый из корней этого уравнения

$$z^4 = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{m\alpha^2 l^4}{EJ}$$

откуда $\omega = \alpha$. Таким образом, одна из критических частот близка к частоте колебаний массы M.

Остальные корни будут близки к корням уравнения

$$\sin z(\sin z \operatorname{ch} z - \cos z \operatorname{sh} z) = 0$$

но эти последние корни определяют как раз критические скорости вращения рассматриваемого вала для случая неподвижных подшипников.

Таким образом, высказанные выше качественные заключения подтверждены теперь и количественно для рассмотренной теоретической схемы.

Проиллюстрируем теперь численным примером, насколько мало отличаются частоты колебаний системы от частоты колебаний изолированной массы и изолированного вала.

Примем

$$l = 80 \text{ см}, \qquad m = 25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг сек}^2}{\text{см}^2}, \qquad E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$J = 8 \text{ см}^4, \qquad M = 0.8 \frac{\text{кг сек}^2}{\text{см}}, \qquad \alpha = 45 \frac{1}{\text{сек}} = 430 \frac{\text{кол}}{\text{мин}}$$

Подсчет приводит к следующим значениям ρ и σ:

$$\rho = 400, \quad \sigma = 51.84$$

Решая трансцендентное уравнение, мы находим для наинизшего положительного корня этого уравнения значение

$$z_0 = 0.604$$

чему соответствует

$$\omega_0 = 45.6 \frac{1}{\text{сек}} = 435 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$$

Как видим, наинизшая частота колебаний системы немного больше чем на 1% превышает частоту колебаний изолированной массы.

Следующий корень трансцендентного уравнения есть

$$z_1 = 3.1418$$

чему соответствует

$$\omega_1 = 1233.9 \frac{1}{\text{сек}} = 11782 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$$

в то время как для изолированного вала мы имели бы

$$z = \pi, \quad \omega = 1233.7 \frac{1}{\text{сек}} = 11780 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$$

В этом случае изменение критической скорости вала совсем ничтожно.

Такая же картина имеет место и для следующего корня уравнения:

$$z_2 = 3.929$$

чему соответствует

$$\omega_2 = 1930 \frac{1}{\text{сек}} = 18430 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$$

в то время как для изолированного вала было бы

$$\omega = 1927 \frac{1}{\text{сек}} = 18400 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$$