Прикладная математика и механика. Том XX, 1956

Институт механики Академии наук Союза ССР

УДАР КЛИНА ПРИ ОБТЕКАНИИ С ОТРЫВОМ СТРУЙ

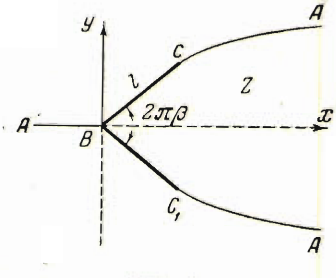
Я. Р. Берман

(Москва)

Постановка и общее решение задачи об ударе тела, обтекаемого с отрывом струй, были даны М. И. Гуревичем [1]. Общее решение указанной задачи получено при условии, что установившееся обтекание контура известно. В этой же работе [1] в качестве примера рассчитан импульс, действующий на плоскую пластинку при прямом ударе ее о жидкость. Однако рассмотренный пример не дал отчетливого представления об изменении присоединенной массы плоского контура, обтекаемого с отрывом струй, по сравнению с этой же величиной при ударе о невозмущенную поверхность жидкости, так как в случае плоской пластинки это изменение оказалось малым. В настоящей работе для установления влияния свободной поверхности при ударе тела, обтекаемого с отрывом струй, рассмотрены случаи прямого удара клина с конечным острым углом, а затем с бесконечно малым углом раствора. В рассмотренных в этой заметке случаях влияние формы поверхности струй на присоединенную массу является существенным.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим неподвижный симметричный клин с углом раствора $2\pi\beta$, обтекаемый с отрывом струй потоком невесомой идеальной несжимаемой жидкости (фиг. 1). Скорость в бесконечности равна v_0.

Пусть клин внезапно приобрел горизонтальную скорость v_1, где v_1 — известная постоянная величина (прямой удар в направлении отрицательной оси x).



Фиг. 1

Дополнительное вызванное возмущением жидкости течение обладает потенциалом скоростей φ, связанным с импульсивным давлением p и плотностью жидкости ρ формулой

$$p = -\rho\varphi \qquad (1.1)$$

Потенциал φ является гармонической функцией неподвижных декартовых координат в плоскости течения $z = x + iy$ и удовлетворяет следующим граничным условиям.

На свободной поверхности обращается в нуль импульсивное давление, т. е. на основании (1.1), $\varphi = 0$. На контуре задана нормальная скорость $v_n = v_1 \sin \pi\beta$, т. е. $\partial\varphi / \partial n = v_1 \sin \pi\beta$.

Действующий на клин импульс I получится суммированием импульсивных давлений p.

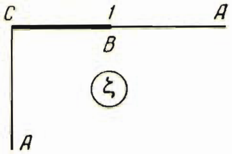
§ 2. Построение решения. В силу симметрии можно свести задачу к рассмотрению верхней половины течения, заменяя ось симметрии твердой стенкой.

Применяя обычные методы теории струй, нетрудно решить задачу установившегося отрывного обтекания верхней половины клина [1] путем конформного отображения областей изменения комплексного потенциала w_0 и комплексной скорости

[1] Задача обтекания клина с отрывом струй была впервые решена Д. К. Бобылевым[2]. Здесь решение приведено в другой форме.

dw_0/dz на правый нижний квадрант плоскости параметрического переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Соответствие точек ясно из фиг. 2.

Формулы, осуществляющие указанное отображение, имеют вид:



Фиг. 2

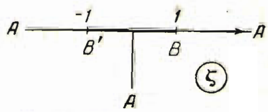
$$\frac{dw_0}{dz} = v_0 \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^{\beta}, \qquad \frac{dw_0}{d\zeta} = N\zeta \tag{2.1}$$

где N — постоянная величина, определяющаяся в зависимости от длины щеки клина l. Из формул (2.1) получим

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{N}{v_0}\,\zeta \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}\right)^{\beta} \tag{2.2}$$

Поскольку перемещением частиц жидкости при ударе пренебрегают, то полученная на основании (2.2) функция $z(\zeta)$ будет одной и той же для установившегося течения и для течения непосредственно после удара. Задачу нахождения комплексного потенциала w возмущенного течения жидкости можно решить в плоскости (ζ).

В упомянутой выше работе М. И. Гуревича [1] дано граничное условие на контуре для случая отображения области течения на верхнюю полуплоскость. В нашем случае, когда области течения соответствует правый нижний квадрант плоскости (ζ), это условие примет вид:



Фиг. 3

$$\operatorname{Im}\frac{dw}{d\zeta} = v_1 \sin \pi\beta \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \qquad (\text{при } 0 < \xi < 1,\ \eta = 0) \tag{2.3}$$

На бесконечной части BA действительной оси плоскости (ζ), соответствующей оси симметрии рассматриваемого плоского течения, вследствие обращения в нуль нормальной скорости получим

$$\operatorname{Im}\frac{dw}{d\zeta} = 0 \tag{2.4}$$

Аналогичный вид должно иметь условие на мнимой полуоси CA, отвечающей поверхности струп, так как вследствие обращения в нуль потенциала φ величины dw и $d\zeta$ будут чисто мнимыми.

В силу выполнения условия (2.4) на мнимой нижней полуоси плоскости (ζ) можно согласно принципу симметрии искомую функцию $dw/d\zeta$ аналитически продолжить на левый нижний квадрант плоскости ζ. Теперь мнимая часть функции $dw/d\zeta$ уже задана на всей действительной оси плоскости (ζ).

На участках $B'C$ и AB' имеем (фиг. 3) соответственно

$$\operatorname{Im}\frac{dw}{d\zeta} = -v_1 \sin \pi\beta \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|, \qquad \operatorname{Im}\frac{dw}{d\zeta} = 0$$

В бесконечности $dw/d\zeta$ должна иметь нуль [1] порядка ζ^{-2}. Пользуясь формулой Шварца для нижней полуплоскости, можно определить $dw/d\zeta$ по значениям ее мнимой части на действительной оси:

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{1}{\pi}\left(\int_{-1}^{0} - v_1 \sin \pi\beta \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\xi} \frac{d\xi}{\xi - \zeta} + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{1} v_1 \sin \pi\beta \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\xi} \frac{d\xi}{\xi - \zeta}\right)$$

Используя (2.2) и учитывая характер подынтегральных выражений, получим

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{v_1 \sin \pi\beta}{\pi v_0} \,|\, N \,|\int_{0}^{1}\left[\frac{\xi}{\xi - \zeta}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\beta} + \frac{\xi}{\xi + \zeta}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\beta}\right] d\xi \tag{2.5}$$

§ 3. Решение для случая $\beta = 1/3$. В случае $\beta = m/n$, где m и n — целые числа, интеграл, входящий в (2.5), сводится к интегралу от рациональной дроби посредством замены переменных:

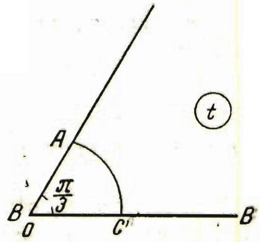
$$t = \left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{1/n}, \qquad \text{и} \qquad s = \left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{1/n} \tag{3.1}$$

Соответствие точек в плоскостях ζ и t для случая $\beta = 1/3$ ясно из фиг. 4.

Выражение (2.5) примет вид:

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{v_1 \sin \pi\beta}{\pi v_0} \mid N \mid \left[4n \int_0^1 \frac{s^{n-m-1} ds}{(1+s^n)^2} + \right.$$

$$\left. + n(1-t^n) \int_0^1 \frac{s^{n-m-1} ds}{(1+s^n)(t^n - s^n)} - n(1-t^n) \int_0^1 \frac{s^{n-m-1} ds}{(1+s^n)(1-t^n s^n)}\right]$$



В результате интегрирования при $m = 1$, $n = 3$ получим

Фиг. 4

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{v_1 \sqrt{3}/2}{\pi v_0} \mid N \mid \left\{\frac{1-t^3}{1+t^3}\left[-\frac{\pi i}{t} + \left(\frac{1}{t} - t\right)\left(\frac{1}{2} \ln \frac{t^2+t+1}{(1-t)^2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{3}\left(\frac{1}{t} \operatorname{arc\,tg} \frac{2+t}{\sqrt{3}\, t} - t \operatorname{arc\,tg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + 2 - \frac{4}{3} \ln 2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}\,\pi\right\} \tag{3.2}$$

Выражение (3.2) удовлетворяет всем граничным условиям для $dw/d\zeta$.

Из (2.2) при помощи подстановки (3.1) находим

$$z = -\frac{6N}{v_0} e^{i^1/_3\pi}\left\{\frac{t^2}{3(1+t^3)^2} + \frac{t^2}{9(1+t^3)} - \frac{1}{27}\left[\frac{1}{2} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2 - t + 1} - \sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{t\sqrt{3}}{2-t}\right]\right\} \tag{3.3}$$

Учитывая, что при $t = 1$, $z = le^{i^1/_3\pi}$ (фиг. 1 и 4), получим следующее значение для постоянной N:

$$N = -\frac{54 v_0 l}{45 + 4\pi\sqrt{3} - 12 \ln 2} = -0.924\, v_0 l \tag{3.4}$$

§ 4. Вычисление импульса сил для случая $\beta = 1/3$. Суммируя давления, действующие при ударе на обе щеки клина, получим следующее значение для горизонтальной составляющей импульса сил:

$$I_x = 2 \int_{BC} p \sin \pi\beta \, dS \tag{4.1}$$

где интегрирование производится вдоль щеки клина в плоскости (z).

Воспользовавшись (1.1) и учитывая, что на концах клина потенциал φ должен обращаться в нуль, находим

$$I_x = -2\rho e^{-i\pi\beta} \sin \pi\beta \int_{BC} \varphi \, dz = -2\rho e^{-i\pi\beta} \sin \pi\beta \left([\varphi z]_B^C - \int_{BC} z \, d\varphi\right) =$$

$$= 2\rho e^{-i\pi\beta} \sin \pi\beta \int_{BC} z \, d\varphi \tag{4.2}$$

При переходе к переменной t выражение для импульса в случае $\beta = 1/3$ примет вид:

$$I_x = -6\sqrt{3}\rho e^{-i^1/_3\pi} \int_0^1 z \operatorname{Re} \frac{dw}{d\zeta} \frac{t^2\, dt}{(1+t^3)^2} \tag{4.3}$$

где z — функция от t, определяемая формулами (3.3) и (3.4), а $\operatorname{Re} dw / d\zeta$ на основании (3.2) и (3.4) запишется следующим образом:

$$\operatorname{Re}\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{27\sqrt{3}v_1 l}{\pi(45+4\pi\sqrt{3}-12\ln 2)}\left\{\frac{1-t^3}{1+t^3}\left[\left(\frac{1}{t}-t\right)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(1-t)^2}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{3}\left(\frac{1}{t}\operatorname{arc\,tg}\frac{2+t}{\sqrt{3}t}-t\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]+2-\frac{4}{3}\ln 2+\frac{4}{9}\sqrt{3}\pi\right\} \qquad (4.4)$$

После нахождения численным методом интеграла, входящего в (4.3), окончательно имеем

$$I_x = 1.116\,\rho v_1 l^2 \qquad (4.5)$$

В аналогичном выражении, получаемом при рассмотрении удара такого же клина о невозмущенную поверхность жидкости[3], значение численного коэффициента будет 0.974.

Таким образом, отношение импульсов, равное отношению присоединенных масс, для этих случаев будет равно $m / m_0 = 1.146$.

§ 5. Случай тонкого клина. Рассмотрим случай тонкого клина. Решение задачи получается из (2.2) и (2.5) при малых β.

Разлагая правую часть (2.5) в ряд по β и удерживая члены, содержащие β в первой степени, получим

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{v_1\beta\,|N|}{v_0}\int_0^1\left(\frac{\xi}{\xi-\zeta}+\frac{\xi}{\xi+\zeta}\right)d\xi$$

и после интегрирования

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{v_1\beta\,|N|}{v_0}\left(2+\zeta\ln\frac{1-\zeta}{1+\zeta}-\pi i\zeta\right) \qquad (5.1)$$

Формула (2.2) при малых β примет вид:

$$v_0\,\frac{dz}{d\zeta} = N\zeta, \quad \text{откуда} \quad z = \frac{N}{v_0}\,\frac{\zeta^2}{2} + C$$

Учитывая соответствие точек в плоскостях z и ζ (фиг. 1 и 2), находим $C = l$, $N = -2v_0 l$ и поэтому

$$z = -l(\zeta^2 - 1) \qquad (5.2)$$

Из (5.1) и (5.2) после несложных выкладок получается следующее выражение для комплексной скорости:

$$\frac{dw}{dz} = -v_1\beta\left(\frac{2\sqrt{l}}{\sqrt{l-z}}+\ln\frac{\sqrt{l}-\sqrt{l-z}}{\sqrt{l}+\sqrt{l-z}}-\pi i\right) \qquad (5.3)$$

Формула для импульса (4.2) примет вид:

$$I_x = 2\rho\pi\beta\int_0^1 x\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx$$

Взяв значение $\partial\varphi / \partial x$ из (5.3), имеем

$$I_x = -2\rho\pi v_1\beta^2\int_0^l\left(\frac{2\sqrt{l}x\,dx}{\sqrt{l-x}}+x\ln\frac{\sqrt{l}-\sqrt{l-x}}{\sqrt{l}+\sqrt{l-x}}\right)dx$$

После интеграции получается

$$I_x = 4\rho\pi v_1\beta^2 l^2 \qquad (5.4)$$

Сравним полученное значение импульса с результатом Л. И. Седова для удара клина о невозмущенную поверхность воды[3]. Согласно Л. И. Седову импульс, переданный воде, равен $J = -\rho k v_1 l^2$, где в наших обозначениях[1]

$$k = \operatorname{tg}\pi\beta\left[\frac{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(1/2-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1/2+\beta)}-1\right] \qquad (5.5)$$

[1] Здесь мы учитываем, что при малых β погружение[3] клина $T \approx l$.

Разлагая входящие в выражение (5.5) гамма-функция в ряды по β и удерживая члены с первыми степенями β, можно получить при использовании свойств гамма-функций [4]

$$k = 2\pi\beta^2\, 1.386$$

Тогда импульс, переданный клину, будет равен:

$$I_{0x} = -J = 2\rho\pi v_1\beta^2\, 1.386 \tag{5.6}$$

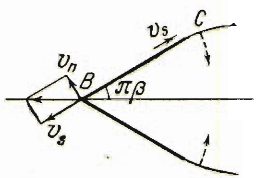
Сравнивая (5.4) и (5.6), находим, что $m / m_0 = 1.444$.

Сравнение полученных значений в §§ 4 и 5 показывает, что отношение присоединенных масс растет с уменьшением угла раствора клина. Если в случае удара пластинки влияние свободной поверхности струй оказалось незначительным, то в случае удара клина оно становится тем существенней, чем острей клин.

§ 6. Замечание о распределении касательной скорости возмущенного движения жидкости. Анализируя формулу (5.3) для комплексной скорости в случае тонкого клина, легко усмотреть, что касательная скорость возмущенного течения жидкости меняет знак при переходе через некоторую точку щеки клина.

Указанная особенность замечена нами также у клина с углом $\beta = {}^1/_3\,\pi$, но не имеет места для пластинки. Это и естественно. Скорость жидкости в точке B клина (фиг. 5) должна быть горизонтальной, так как в противном случае в этой точке был бы разрыв скорости. Из фиг. 5 видно, что при этом касательная и нормальная скорости связаны соотношением

$$v_s = v_n \operatorname{ctg} \pi\beta \qquad (\text{в точке } B) \tag{6.1}$$



Фиг. 5

В точке C (фиг. 5) жидкость должна стекать к свободной поверхности, и касательная скорость здесь имеет направление, противоположное направлению вблизи острия клина. Следовательно, на щеке клина имеется точка, в которой $v_s = 0$. В случае же пластинки, как показывает формула (6.1), $v_s = 0$ в точке B.

Поступила 26 IX 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Удар пластинки при обтекании с отрывом струй. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.
2. Бобылев Д. К. Заметка о давлении, производимом потоком неограниченной ширины на две стенки, сходящиеся под каким бы то ни было углом. Журн. Русск. физ.-хим. об-ва, т. XIII, 1881.
3. Седов Л. И. Удар плавающего клина. Сборник статей по вопросам удара о поверхность воды. Труды ЦАГИ, вып. 152, 1935.
4. Янке Е. и Эмде Р. Таблицы функций с формулами и кривыми. ГИТТЛ, 1949.