

О ЛИНЗЕ ПРЕСНОЙ ВОДЫ НАД СОЛЕНОЙ ВОДОЙ

П. Я. Полубаринова - Кочина

(Москва)

Повидимому первое (гидравлическое) решение задачи о движении пресных вод над солеными принадлежит Ф. Форхгеймеру [1,2], который ссылается на наблюдения Герцберга [3], касающиеся равновесия пресных и соленых вод. Японские ученые [4] дали некоторые обобщения решений Форхгеймера и прогели ряд сравнений теории с экспериментами и наблюдениями в натуре (на полуострове Японии). В последнее время опять проявляется интерес к задачам о движении жидкостей различной плотности. В качестве примера укажем на опыты Е. Чайльдса [5] по применению метода электро-гидродинамических аналогий к таким задачам. В Советском Союзе разработкой вопросов движения двух жидкостей различной плотности, и притом в неоднородных грунтах, занимается Н. К. Гиринский [6]

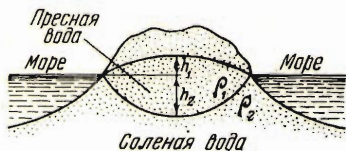
Форхгеймер [1] рассматривал гидравлически задачу о линзе пресной воды, которая может образоваться в теле острова, получающего питание пресными дождевыми водами. Эти последние продавливают первоначально горизонтальную поверхность соленой морской воды и образуют выпуклую свободную поверхность (фиг. 1).

Для отношения отрезков h_1 и h_2 Герцберг нашел

$$h_1 : h_2 = \rho_1 : (\rho_2 - \rho_1) \tag{0.1}$$

где ρ_1 — плотность пресной, ρ_2 — плотность соленой воды. Свободная поверхность по Форхгеймеру — эллипс с отношением полуосей

$$h_1 : L = \sqrt{\frac{\varepsilon(\rho_2 - \rho_1)}{\kappa\rho_2}} \tag{0.2}$$



Фиг. 1

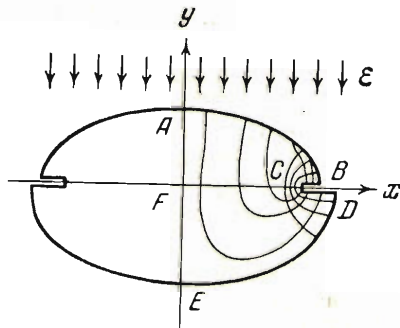
($2L$ — ширина линзы, κ — коэффициент фильтрации, ε — постоянная интенсивность инфильтрации на единицу длины оси абсцисс).

Ниже рассматривается задача о плоском движении пресной воды в линзе при условии оттока этой воды в горизонтальные дренажные щели. Способ решения аналогичен примененному В. А. Васильевым [2] в задаче о бугре грунтовых вод над водоупором.

1. Постановка задачи и решение.

Рассматриваемая схема представлена на фиг. 2. Вследствие предполагаемой симметрии движения нижняя, более плотная жидкость должна оставаться неподвижной. Тогда годограф скорости для половины области, занятой пресной водой, будет иметь вид фиг. 3. На нем полуокружность BA , соответствующая свободной поверхности, проходит через точки с ординатами x и ε [3], полуокружность DE проходит через начало координат и имеет диаметр c [3].

Можно рассматривать указанные полуокружности как линии равного потенциала течения, вызванного источником и стоком одинаковой интенсивности Q , помещенных соответственно в точках $w = ai$ и $w = -bi$. Можно установить соответствие между



Фиг. 2

переменными w и τ (фиг. 3), рассматривая последнюю как комплексный потенциал течения на плоскости w и принимая $Q = \pi$:

$$\tau = \frac{1}{2} \ln \frac{a(w+bi)}{b(w-ai)}, \quad w = \frac{2abi \operatorname{ch} \tau}{(a+b) \operatorname{sh} \tau - (a-b) \operatorname{ch} \tau} \quad (1.1)$$

Обозначая через $w = \varphi + i\psi$ комплексный потенциал, через $z = x + iy$ — комплексную координату области движения, можем написать

$$w = \frac{d\omega}{d\tau} : \frac{dz}{d\tau} \quad (1.2)$$

Откуда следует, что

$$\frac{d\omega}{d\tau} = 2abi A \operatorname{ch} \tau, \quad \frac{dz}{d\tau} = A [(a+b) \operatorname{sh} \tau - (a-b) \operatorname{ch} \tau] \quad (1.3)$$

Исследование поведения $d\omega/d\tau$, $dz/d\tau$ в особых точках показывает, что A — постоянная. (Это исследование можно было бы провести как в статье [2], отображая ω и τ на полуплоскость.)

Интегрирование (1.3) с учетом значений величин L_1 , H_1, \dots (фиг. 2) дает

$$z = L_1 \sqrt{\frac{(x-\varepsilon)(\varepsilon+c)}{xc}} c (\operatorname{ch} \tau - \nu \operatorname{sh} \tau) = L_2 (\operatorname{ch} \tau - \nu \operatorname{sh} \tau) \quad (1.4)$$

$$\omega = iL_1 \sqrt{\frac{(x-c)\varepsilon}{x+c}} c \operatorname{ch} \tau = iH_2 c \operatorname{sh} \tau$$

где

$$\nu = \sqrt{\frac{x-\varepsilon}{(x+c)(\varepsilon+c)}} = \frac{a-b}{a+b} \quad (1.5)$$

Условие, что скорость в точке A , для которой $\tau = \tau_1$, обращается в бесконечность, дает

$$\operatorname{th} \tau_1 = \frac{a-b}{a+b} = \nu \quad (1.6)$$

откуда можно найти длину L отрезка OA или, наоборот, выразить через L остальные отрезки:

$$L_1 = L \sqrt{\frac{x(x+c)}{(x-\varepsilon)(x+c+\varepsilon)}}, \quad H_1 = L \sqrt{\frac{(x+c)\varepsilon}{(x-\varepsilon)(x+c+\varepsilon)}} \quad (1.7)$$

$$H_2 = L \sqrt{\frac{\varepsilon x}{(x+c+\varepsilon)c}}, \quad L_2 = L \sqrt{\frac{(x+c)(\varepsilon+c)}{c(x+c+\varepsilon)}}$$

$$L^2 = L_1^2 - H_1^2 = L_2^2 - H_2^2$$

Полный расход Q и расходы Q_1 и Q_2 соответственно через отрезки CB и CD определяются по формулам

$$Q = \varepsilon L_1, \quad Q_2 = \frac{x\varepsilon}{x+\varepsilon+c} L, \quad Q_1 = \varepsilon L_1 - \frac{x\varepsilon}{x+c+\varepsilon} L \quad (1.8)$$

Вводя обозначение $\tau = \tau' + i\tau''$ и отделяя в (1.4) действительную и мнимую части, получим

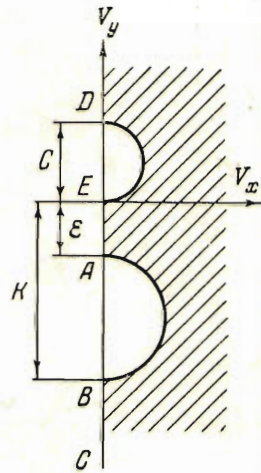
$$\varphi = -cH_2 \operatorname{ch} \tau' \sin \tau'', \quad \psi = cH_2 \operatorname{sh} \tau' \cos \tau'' \quad (1.9)$$

$$x = L_2 (\operatorname{ch} \tau' - \nu \operatorname{sh} \tau') \cos \tau'', \quad y = L_2 (\operatorname{sh} \tau' - \nu \operatorname{sh} \tau') \sin \tau'' \quad (1.10)$$

Чтобы построить линии тока, положим

$$\operatorname{sh} \tau' \cos \tau'' = C \quad (1.11)$$

и будем давать C равноотстоящие постоянные значения $0 \leq C \leq \operatorname{sh} \mu$, причем $0 \leq \tau' \leq \mu$,



Фиг. 3

$0 \leq \tau'' \leq 1/2\pi$. Исключая при помощи (1.11) одну из переменных, например τ'' , из уравнений (1.10), получим уравнения линий тока в параметрической форме:

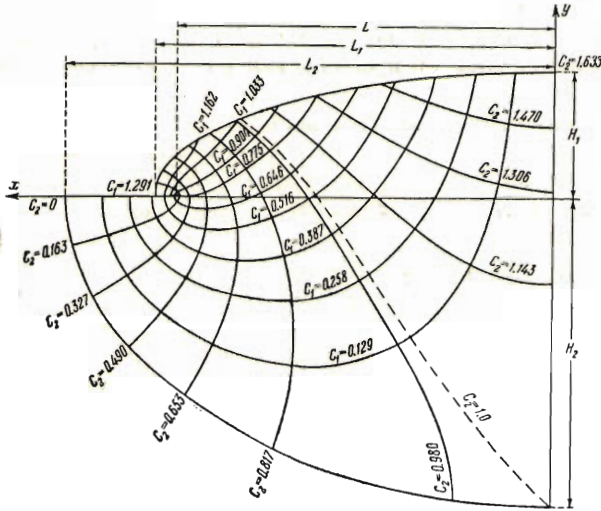
$$x = \frac{L_2 C}{\text{sh } \tau'} (\text{ch } \tau' - \nu \text{ sh } \tau'), \quad y = \frac{L_2 \sqrt{\text{sh}^2 \tau' - c^2}}{\text{sh } \tau_1} (\text{sh } \tau' - \nu \text{ sh } \tau_1) \quad (1.12)$$

Для построения эквипотенциалей полагаем

$$\text{ch } \tau' \sin \tau'' = D \quad (1.13)$$

и даем D ряд значений, $0 \leq D \leq \text{ch } \mu$. Уравнения эквипотенциалей можно представить в виде

$$x = \frac{L_2 \sqrt{\text{ch}^2 \tau' - D^2}}{\text{ch } \tau'} (\text{ch } \tau' - \nu \text{ sh } \tau'), \quad y = -\frac{L_2 D}{\text{ch } \tau'} (\text{sh } \tau' - \nu \text{ ch } \tau') \quad (1.14)$$



Фиг.

На фиг. 4 построена сетка для случая $\varepsilon = c = 1/4x$.

Вычисления проведены М. М. Семчиновой.

Поступила 14 II 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Forchheimer Ph. Gas- und Wasserfach, 71, 1928.
2. Форхгеймер Ф. Гидравлика. Перевод с нем. под ред. А. А. Черкасова, М.—Л., 1935.
3. Herzberg A. Die Wasserversorgung einiger Nordseebäder. Journal für Gasbeleuchtung und Wasserwirtschaft, 44, 1901.
4. Kitagawa Kiugoro. Un aspect du développement des études des eaux souterraines au Japon. Japanese Journal of Astronomy and Geophysics Transactions, Vol, XVII, 1939—40, Tokyo.
5. Childs E. C. The equilibrium of rain-fed Ground-water resting on deeper saline water: the Ghyben-Herzberg lens. The Journal of Soil Science, Oxford, Vol. I, № 2, 1950.
6. Гиринский Н. К. Фильтрация подземных сильно минерализованных вод и рассолов в море. Труды Лаборатории гидрогеологических проблем АН СССР, 1955, 12.
7. Васильев В. А. О форме бугра грунтовых вод между двумя дренами на водоупоре при наличии инфильтрации. ЦММ, т. XIX, вып. 1, 1955.
8. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.—Л., 1952.

при этом имеем

$$\text{sh } \mu = \sqrt{\frac{(x+c)\varepsilon}{(x-\varepsilon)c}},$$

$$\text{ch } \mu = \sqrt{\frac{(c+\varepsilon)x}{(x-\varepsilon)c}} \quad (1.15)$$

Свободная поверхность представляет половину эллипса с полуосями L_1, L_2 , линия раздела между пресной и соленой водой—полуэллипс с полуосями L_2, H_2 . При $c = \infty$ получается задача В. А. Васильева. При $\varepsilon = 0$ задача теряет смысл, однако отношение H_1/H_2 имеет предел, соответствующий соотношению Герцберга:

$$H_1 : H_2 = \rho_1 : (\rho_2 - \rho_1)$$