Прикладная математика и механика. Том XX, 1956

Институт механики Академии наук Союза ССР

О КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Г. И. Баренблатт и М. И. Вишик

(Москва)

При безнапорной фильтрации грунтовых вод напор грунтовых вод H удовлетворяет уравнению Буссинеска [1]

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \Delta (H^2) \tag{0.1}$$

где a^2 — некоторая константа, определяемая свойствами пористой среды и фильтрующейся жидкости, t — время. Аналогичному уравнению удовлетворяет давление газа при нестационарной изотермической фильтрации, что дает возможность непосредственно переносить результаты решения одной задачи на другую; имея это в виду, мы будем для определенности говорить о задачах фильтрации грунтовых вод.

В случае, когда в начальный момент напор грунтовых вод равен нулю (фильтрация в сухой грунт), имеет место явление конечной скорости распространения возмущения. (Это явление связано с нелинейностью параболического уравнения (0.1); для классического линейного уравнения теплопроводности скорость распространения возмущения, как известно, бесконечна). Для некоторых постановок задач, соответствующих так называемым автомодельным решениям, это явление было обнаружено впервые Я. Б. Зельдовичем и А. С. Компанейцем [2] и, независимо, одним из авторов[3]. В предлагаемой заметке конечность скорости распространения возмущения доказывается для вполне общей постановки задачи в случае, когда жидкость в начальный момент сосредоточена в конечной части пространства.

§ 1. 1°. Рассмотрим случай распространения грунтовых вод плоскими волнами. В этом случае напор удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые точные решения. Пусть при $t = -t_0$ напор грунтовых вод во всем полубесконечном пласте $0 \leqslant x < \infty$ равен нулю; кроме того, на границе пласта $x = 0$ напор грунтовых вод возрастает по линейному закону, так что

$$H(x, -t_0) \equiv 0, \qquad H(0, t) = \sigma (t + t_0) \tag{1.2}$$

Тогда, как показано в работе [3], соответствующее решение имеет вид:

$$H(x, t) = \begin{cases} \sigma \left[t + t_0 - \dfrac{x}{\sqrt{2a^2\sigma}} \right], & 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2a^2\sigma}\,(t + t_0) \\ 0, & x \geqslant \sqrt{2a^2\sigma}\,(t + t_0) \end{cases} \tag{1.3}$$

Это решение, как видно, непрерывно, обладает непрерывной производной от квадрата, что обеспечивает непрерывность потока грунтовых вод, и тождественно обращается в нуль вне некоторой конечной области, разрастающейся со временем.

2°. В случае постоянного на границе $x=0$ напора $H(0,t)=H_0$ и при том же начальном условии $H(x,-t_0)\equiv 0$ решение уравнения (1.1) имеет вид:

$$H(x,t)=H_0 f(\xi) \qquad \left(\xi=\frac{x}{\sqrt{a^2H_0(t+t_0)}}\right) \tag{1.4}$$

где $f(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному уравнению

$$\frac{d^2f^2}{d\xi^2}+\frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi}=0 \tag{1.5}$$

при условиях $f(0)=1$, $f(\infty)=0$; при этом функция $f(\xi)$ непрерывна и обладает непрерывной производной от квадрата $df^2/d\xi$. Как показано ранее [3,4], функция $f(\xi)\equiv 0$ при $\xi\geqslant\xi_0$, где $\xi_0=2.286\ldots$, т. е. $H(x,t)$ тождественно равняется нулю при $x\geqslant\xi_0\sqrt{a^2H_0(t+t_0)}$.

3°. Наконец, при постоянном напоре на границе $x=0$ $H(0,t)=H_0$ и постоянном напоре грунтовых вод в пласте при $t=-t_0$, не равном нулю, $H(x,-t_0)=H_1=\text{const}$, как показано П. Я. Кочиной [5], решение уравнения (1.1) имеет вид:

$$H(x,t)=H_0\varphi(\xi,\lambda) \qquad \left(\xi=\frac{x}{\sqrt{a^2H_0(t+t_0)}},\ \lambda=\frac{H_1}{H_0}\right) \tag{1.6}$$

где $\varphi(\xi,\lambda)$ удовлетворяет (1.5) и условиям $\varphi(0,\lambda)=1$ и $\varphi(\infty,\lambda)=\lambda$.

§ 2. 1. Рассмотрим теперь общую задачу распространения грунтовых вод плоскими волнами. Пусть в начальный момент задано распределение напора в полубесконечном пласте $(0\leqslant x<\infty)$ и напор на нулевой границе пласта

$$H(x,0)=\Phi(x), \qquad H(0,t)=\Psi(t) \tag{2.1}$$

При этом предполагается, что $\Phi(x)\geqslant 0$, $\Phi(x)\equiv 0$ при достаточно больших x и что $\Psi(t)$ — некоторая положительная функция.

Физический смысл имеют решения уравнения (1.1), при условиях (2.1) непрерывные (распределение напора грунтовых вод должно быть непрерывным), с непрерывной производной от квадрата $\partial H^2/\partial x$ (распределение потока грунтовых вод также должно быть непрерывным), стремящиеся к нулю при $x\to\infty$ и любом фиксированном t и удовлетворяющие условию

$$\left(\frac{\partial H^2}{\partial x}\right)_{x=\infty}=0 \tag{2.2}$$

исключающему приток грунтовых вод из бесконечности. Вопросы существования и единственности этих решений мы здесь не рассматриваем, отметим только, что их построение можно осуществлять при помощи того или иного приближенного метода.

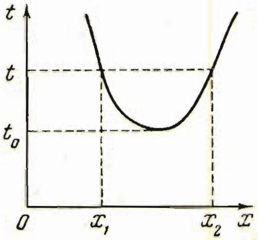
2°. Покажем, что удовлетворяющие указанным выше условиям решения уравнения (1.1) при условиях (2.1) нигде не отрицательны. В самом деле, пусть $H(x,t)$ при некоторых x и t отрицательно. Обозначим через G область в плоскости переменных x и t, для которых $H(x,t)<0$, и обозначим через t_0 нижнюю грань координат t точек этой области (фиг. 1). При некотором $t>t_0$, достаточно близком к t_0, проинтегрируем уравнение (1.1) по x в пределах между двумя граничными точками области G, соответствующими этому t. Очевидно, что $H(x, t) < 0$ для $x_1 < x < x_2$, $H(x_2, t) = H(x_1, t) = 0$. Имеем, в силу (1.1)

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial H}{\partial t}\, dx = \frac{\partial H^2}{\partial x}\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \tag{2.3}$$

Отсюда, используя формулу дифференцирования определенного интеграла по параметру, получаем

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} H(x, t)\, dx - H(x_2, t)\frac{dx_2}{dt} + H(x_1, t)\frac{dx_1}{dt} = $$

$$= \left(\frac{\partial H^2}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial H^2}{\partial x}\right)_{x=x_1} \tag{2.4}$$



Фиг. 1

Покажем, что $(\partial H^2 / \partial x)_{x=x_2}$ и $(\partial H^2 / \partial x)_{x=x_1}$ всегда равны нулю. В силу непрерывности потока жидкости $\partial H^2 / \partial x$ должно быть непрерывно по x. Пусть теперь $\partial H^2 / \partial x$, например, при $x = x_1$ равняется C. Тогда вблизи $x = x_1$ напор H удовлетворяет соотношению

$$H^2 = -C(x - x_1) + o\,[(x - x_1)].$$

Чтобы напор был действительным, выражение для H^2 должно быть положительным при $x \gtrless x_1$, а это может выполняться лишь при $C = 0$. Если $x_2 = \infty$, то обращение в нуль $\partial H^2 / \partial x$ вытекает из условия (2.2).

Таким образом, правая часть (2.4) обращается в нуль. Далее, так как для $t > t_0$ и достаточно близких к t_0 dx_1 / dt и dx_2 / dt можно считать ограниченными, то, так как $H(x_2, t) = H(x_1, t) = 0$, получаем

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} H\, dx = 0 \quad \text{или} \quad \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} H(x, t)\, dx = K = \text{const}$$

Следовательно, предел этого интеграла при $t \to t_0$ также равен K. Но $H(x, t_0)$ равняется, очевидно, нулю, и, следовательно $K = 0$. Таким образом, мы получили, что

$$\int_{x_1}^{x_2} H(x, t)\, dx = 0 \qquad \text{при} \quad t > t_0$$

хотя $H(x, t)$ по предположению отрицательно. Полученное противоречие показывает, что области G не существует, и, следовательно, $H(x, t)$ всюду неотрицательно. Отметим, что более детальное и строгое доказательство этого факта можно провести, используя метод последовательных приближений для построения решения.

§ 3. Докажем следующее свойство рассматриваемой задачи. *Пусть решению $H^{(1)}(x, t)$ соответствуют функции $\Phi^{(1)}(x)$ и $\Psi^{(1)}(t)$, а решению $H^{(2)}(x, t)$ — функции $\Phi^{(2)}(x)$ и $\Psi^{(2)}(t)$, причем*

$$\Phi^{(2)}(x) \geqslant \Phi^{(1)}(x), \qquad \Psi^{(2)}(t) \geqslant \Psi^{(1)}(t) \tag{3.1}$$

Тогда

$$H^{(2)}(x, t) \geqslant H^{(1)}(x, t) \tag{3.2}$$

Для доказательства построим решение $H_\alpha(x, t)$, соответствующее функциям

$$\Phi_\alpha(x) = (1-\alpha)\,\Phi^{(1)}(x) + \alpha\Phi^{(2)}(x), \qquad \Psi_\alpha(t) = (1-\alpha)\,\Psi^{(1)}(t) + \alpha\Psi^{(2)}(t) \tag{3.3}$$

($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) и удовлетворяющее условиям, сформулированным в § 2. Функция $H_\alpha(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Продифференцируем это уравнение по α; обозначая $\partial H_\alpha / \partial\alpha$ через q, имеем

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 2H_\alpha \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 4\,\frac{\partial H_\alpha}{\partial x}\,\frac{\partial q}{\partial x} + 2\,\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial x^2}\,q \tag{3.4}$$

Так как $\Phi_\alpha(x) \geqslant 0$ и $\Psi_\alpha(t) \geqslant 0$, то по доказанному в § 2 $H_\alpha(x, t) \geqslant 0$. Докажем, что $q \geqslant 0$. Зафиксируем некоторое α и будем считать H_α, $\partial H_\alpha / \partial x$ и $\partial^2 H_\alpha / \partial x^2$ известными коэффициентами в уравнении (3.4). Функция q, очевидно, удовлетворяет следующим неотрицательным граничному и начальному условиям:

$$q(0,\ t) = \Psi^{(2)}(t) - \Psi^{(1)}(t), \qquad q(x,\ 0) = \Phi^{(2)}(x) - \Phi^{(1)}(x) \tag{3.5}$$

правые части которых получаются дифференцированием по α формул (3.3).

В силу достаточной гладкости функции $H_\alpha(x, t)$ (по переменным x, t и α) и стремления этой функции к нулю при $x \to \infty$, $q = \partial H_\alpha / \partial\alpha$ тоже стремится к нулю при $x \to \infty$. Отсюда, пользуясь условиями (3.5), легко доказать, что функция $q(x, t)$ всюду неотрицательна [1]. В самом деле, положим в уравнении (3.4) $q = e^{\gamma t} q_1$, получаем [2]

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = 2H_\alpha \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + 4\,\frac{\partial H_\alpha}{\partial x}\,\frac{\partial q_1}{\partial x} + \left(2\,\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial x^2} - \gamma\right) q_1 \tag{3.6}$$

Если функция q_1 где-то в области (x, t) отрицательна, то в достаточно широкой полосе $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x < \infty$ она также будет обладать этим свойством и, следовательно, в некоторой точке x_0, t_0 этой полосы будет принимать отрицательное наименьшее значение. В точке x_0, t_0 $\partial^2 q_1 / \partial x^2$ неотрицательно, $\partial q_1 / \partial x = 0$ (так как на прямой $t = t_0$ в точке $x = x_0$ функция q_1 имеет минимум); $\partial q_1 / \partial t$ в точке x_0, t_0 равно нулю, если эта точка находится внутри полосы, и неположительно, если $t_0 = T$. Выбирая теперь γ так, чтобы выражение в круглых скобках в третьем члене правой части было меньше нуля в рассматриваемой полосе, мы приходим к противоречию с уравнением (3.6). Действительно, левая часть этого уравнения в точке x_0, t_0 не положительна, а правая часть строго положительна. Следовательно, функция $q_1(x, t)$ неотрицательна

---

[1] Отметим, что коэффициент H_α в уравнении (3.4) хотя и неотрицателен согласно доказанному в § 2, однако может обращаться в нуль. Следовательно, уравнение (3.4) является, вообще говоря, вырождающимся внутри области (x, t) параболическим уравнением.

[2] Рассматриваемые решения при фиксированном t имеют ограниченную вторую производную $\partial^2 H_\alpha / \partial x^2$ там, где она существует.

всюду в плоскости (x, t), а вместе с ней неотрицательна и функция $e^{\gamma t}q_1 = q = \partial H_\alpha / \partial\alpha$ при любом α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и любых x и t. Далее, так как

$$H^{(2)}(x, t) = H^{(1)}(x, t) + \int_0^1 \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha}\, d\alpha \tag{3.7}$$

то $H^{(2)}(x, t) \geqslant H^{(1)}(x, t)$ при любых значениях x и t, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы легко следует, что если функции $\Phi(x)$ и $\Psi(t)$, определяющие граничное и начальное при некотором $t = t_0$ условия рассматриваемой задачи, связаны неравенствами

$$0 \leqslant \Phi^{(1)}(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant \Phi^{(2)}(x), \qquad 0 \leqslant \Psi^{(1)}(t) \leqslant \Psi(t) \leqslant \Psi^{(2)}(t) \tag{3.8}$$

то при любых x и $t > t_0$ имеет место неравенство

$$0 \leqslant H^{(1)}(x, t) \leqslant H(x, t) \leqslant H^{(2)}(x, t) \tag{3.9}$$

где $H^{(1)}(x, t)$, $H(x, t)$ и $H^{(2)}(x, t)$ — решения, соответствующие функциям $\Phi^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$; Φ, Ψ; $\Phi^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$.

Доказанное свойство решений уравнения (1.1) естественно назвать *свойством монотонной зависимости решения* от *начальных и граничных условий*. Взяв в качестве функции $\Phi^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$ и $\Psi^{(2)}$ функции, соответствующие каким-либо известным решениям (в частности, автомодельным или стационарным), можно использовать неравенство (3.9) для оценки решения $H(x, t)$.

§ 4. 1°. Теперь уже легко доказать конечность скорости распространения возмущенной зоны для любой задачи, соответствующей условиям (2.1), при функции $\Phi(x)$, отличной от нуля лишь на некотором конечном интервале оси x.

Для этого в автомодельном решении (1.3) выберем константы σ и t_0 настолько большими, чтобы $\Phi(x)$ было меньше, чем функция

$$\Phi^{(2)}(x) = \begin{cases} \sigma\left[t_0 - \dfrac{x}{\sqrt{2a^2\sigma}}\right], & 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2a^2\sigma}\, t_0 \\ 0, & x \geqslant \sqrt{2a^2\sigma}\, t_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Это всегда можно сделать для любой ограниченной финитной функции $\Phi(x)$. Выберем теперь σ столь большим, чтобы на всем интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ функция $\Psi^{(2)}(t) = \sigma(t + t_0)$ была больше, чем $\Psi(t)$. Тогда, по доказанному в § 3

$$0 \leqslant H(x, t) \leqslant H^{(2)}(x, t) \tag{4.2}$$

для $0 \leqslant t \leqslant T$, где решение $H^{(2)}(x, t)$ дается формулой (1.3). Но так как $H^{(2)}(x, t) \equiv 0$ при $x \geqslant \sqrt{2a^2\sigma}(t + t_0)$, то и подавно $H(x, t) \equiv 0$ при $x \geqslant \sqrt{2a^2\sigma}(t + t_0)$ для $0 \leqslant t \leqslant T$. Так как константа T может быть выбрана произвольно, то этим самым конечность скорости распространения возмущений доказана.

2°. Допустим, что $\Psi(t) \to H_0 = \text{const}$ при $t \to \infty$. Покажем, что при любой функции $\Phi(x)$ и для любого фиксированного x соответствующее решение $H(x, t)$ стремится при $t \to \infty$ к этой же константе H_0.

В самом деле, пусть для $t > t_0$

$$H_0(1-\varepsilon) \leqslant \Psi(t) \leqslant H_0(1+\varepsilon) \tag{4.3}$$

Пусть далее $H(x, t_0) < H_1$, где H_1 — некоторая положительная постоянная. Положим

$$\Psi^{(1)}(t) = H_0(1-\varepsilon) \quad (t > t_0), \qquad \Psi^{(2)}(t) = H_0(1+\varepsilon) \quad (t > t_0)$$

$$\Phi^{(1)}(x) = 0, \qquad \Phi^{(2)}(x) \equiv H_1$$

Тогда в силу (3.9) получим

$$H^{(1)}(x, t) = H_0(1-\varepsilon) f\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 H_0(1-\varepsilon)(t+t_0)}}\right) \leqslant H(x, t) \leqslant H^{(2)}(x, t) =$$

$$= H_0(1+\varepsilon)\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 H_0(1+\varepsilon)(t+t_0)}}, \frac{H_1}{H_0(1+\varepsilon)}\right) \tag{4.4}$$

где решения $H^{(1)}(x, t)$ и $H^{(2)}(x, t)$ определяются соответственно формулами (1.4) и (1.6).

Напомним, что $f(0) = \varphi(0, \lambda) = 1$ и функции $f(\xi)$ и $\varphi(\xi, \lambda)$ непрерывны. Возьмем t достаточно большим, чтобы

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 H_0(1-\varepsilon)(t+t_0)}}\right) > 1-\varepsilon$$

$$\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 H_0(1+\varepsilon)(t+t_0)}}, \frac{H_1}{H_0(1+\varepsilon)}\right) < 1+\varepsilon \tag{4.5}$$

Тогда получим

$$H_0(1-2\varepsilon) \leqslant H(x, t) \leqslant H_0(1+2\varepsilon) \tag{4.6}$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что $H(x, t) \to H_0$ при $t \to \infty$.

Аналогично, используя автомодельные решения работ [3,6], можно показать, что если

$$\lim \Psi(t)\, t^{-\alpha} = \sigma \quad \text{при } t \to \infty \qquad \text{или} \qquad \lim \Psi(t)\, e^{-\lambda t} = \sigma \quad \text{при } t \to \infty \tag{4.7}$$

то при любом фиксированном x имеют место соответственно соотношения

$$\lim H(x, t)\, t^{-\alpha} = \sigma, \qquad \lim H(x, t)\, e^{-\lambda t} = \sigma \qquad \text{при } t \to \infty \tag{4.8}$$

3°. Пусть давление газа p связано с плотностью газа ρ соотношением $p = \Phi(\rho)$. Тогда в случае распространения газа плоскими волнами плотность газа удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi(\rho)}{\partial x^2} \qquad \left(\varphi(\rho) = \int_0^\rho \rho \Phi(\rho)\, d\rho\right) \tag{4.9}$$

где a^2 — некоторая константа, определяемая свойствами пористой среды и фильтрующегося вещества. Из физических соображений вытекает, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(\rho) > 0$, так что $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi'(\rho) > 0$ при $\rho > 0$. В работе [7] построено решение уравнения (4.9), отвечающее начальному и граничному условиям

$$\rho(x, -t_0) \equiv 0 \qquad \text{при } t = -t_0$$

$$p(0, t) = \Phi[\rho(0, t)] = \sigma(t+t_0) \qquad \text{при } x = 0 \tag{4.10}$$

Это решение имеет вид:

$$\Phi[\rho(x,t)] = p(x,t) = \begin{cases} \sigma(t+t_0) - \dfrac{x}{\sqrt{a^2/\sigma}} & 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2\sigma}\,(t+t_0) \\ 0, & x \geqslant \sqrt{a^2\sigma}\,(t+t_0) \end{cases} \tag{4.11}$$

Используя это решение вполне аналогично тому, как мы использовали для рассмотренного выше частного случая решение (1.3), можно доказать конечность скорости распространения и дать аналогичные приведенным выше оценки решения и для случая более общего уравнения (4.9).

То же самое, очевидно, относится и к задачам для уравнений вида

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = a^2 \Delta\varphi(\rho) \tag{4.12}$$

где $\varphi(\rho)$ обладает сформулированными выше свойствами, отвечающими начальному условию $\rho|_{t=0} = \Psi$, где Ψ — любая функция, тождественно обращающаяся в нуль вне некоторой ограниченной области рассматриваемого пространства.

Поступила 23 II 1956

Институт нефти АН СССР
Московский энергетический институт
им. В. М. Молотова

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ГИТТЛ, М.—Л., 1947.
2. Зельдович Я. Б. и Компанеец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М., 1950.
3. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.
4. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, т. XVI, вып. 6, 1952.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации. ДАН СССР, т. LXIII, № 6, 1948.
6. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.
7. Баренблатт Г. И. Об одном классе точных решений плоской одномерной задачи нестационарной фильтрации газа в пористой среде. ПММ, т. XVII, вып. 6, 1953.