Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Е. М. Добрышман

(Москва)

В этой заметке дается приближенное решение некоторых нестационарных задач теории пограничного слоя. При этом используется метод «слоя конечной толщины» в том виде, в каком он был применен М. Е. Швецем [1] для решения стационарных задач. В несколько ином виде этот метод использовал С. М. Тарг [2] для частных случаев нестационарного движения.

§ 1. Постановка задачи и общее решение. Примем за линии $x = \text{const}$ нормали к поверхности обтекаемого контура, за $y = \text{const}$ — их ортогональные траектории; обозначим далее через u, v компоненты скорости вдоль x, y соответственно, t — время, ρ — плотность, p — давление, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Уравнения движения в пограничном слое несжимаемой жидкости запишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

Вне пограничного слоя движение будет соответствовать движению идеальной жидкости со скоростью $U(t, x)$, определяемой из уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.2}$$

Для системы (1.1) принимаются следующие граничные условия:

$$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0, \qquad u = U(t, x) \quad \text{при } y = \infty \tag{1.3}$$

где $U(t, x)$ — заданная функция. Зададим характерный масштаб длины L, характерную скорость внешнего потока U_0 и перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{gathered}\bar{x} = \frac{x}{L}, \qquad \bar{y} = \frac{\sqrt{R}}{L}\,y, \qquad \bar{t} = \frac{U}{L}\,t, \qquad f(t, x) = \frac{U(\bar{t}, \bar{x})}{U_0} \\ \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) = \frac{u}{U_0}, \qquad \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sqrt{R}}{U_0}\,v \qquad \left(R = \frac{UL}{\nu}\right)\end{gathered} \tag{1.4}$$

Система (1.1) с учетом (1.2) и условия (1.3) примут вид (черточки над буквами опущены):

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u = v = 0 \quad \text{при } y = 0, \qquad u = f(t, x) \quad \text{при } y = \infty\end{gathered} \tag{1.5}$$

Введем в рассмотрение конечную толщину пограничного слоя $\delta(t, x)$ — неизвестную пока функцию указанных аргументов и потребуем, чтобы скорость внешнего потока $f(t, x)$ достигалась при $y = \delta(t, x)$. Исключая при помощи уравнения неразрывности v, получим одно уравнение для u в такой форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial f}{\partial t} - f\frac{\partial f}{\partial x} \tag{1.6}$$

которое нужно решить при условиях

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u = f(t, x) \quad \text{при} \quad y = \delta(t, x) \tag{1.7}$$

Будем искать приближенное решение (1.6) в виде $u = u^{(0)} + u^{(1)} + \cdots$, причем за $u^{(0)}$ примем решение уравнения (1.6) без правой части. Легко видеть, что решением, которое удовлетворяет условиям (1.7), будет

$$u^{(0)}(t, x, y) = \frac{f(t, x)}{\delta(t, x)}y$$

Вставляя это в правую часть, получим для $u^{(1)}$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial t}(y\zeta - f) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{2}\zeta^2 - f^2\right) \qquad \left(\zeta = \frac{f(t, x)}{\delta(t, x)}\right)$$

Интегрируя два раза по y, найдем

$$u^{(1)} = A(t, x) + B(t, x)y + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{y^3}{6}\zeta - f\frac{y^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^4}{24}\zeta^2 - \frac{y^2}{2}f^2\right)$$

где A и B — произвольные функции, подлежащие определению.

Если ограничиться этим приближением, то можем написать

$$u \approx u^{(0)} + u^{(1)} = A + (B + \zeta)y + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{y^3}{6}\zeta - \frac{y^2}{2}f\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^4}{24}\zeta^2 - \frac{y^2}{2}f^2\right) \tag{1.8}$$

Удовлетворяя условиям (1.7), найдем

$$A = 0, \qquad B = \frac{\delta}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2}{\partial x}\right) - \frac{\delta^2}{6}\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\delta^3}{48}\frac{\partial}{\partial x}\zeta^2$$

Для однозначного определения u необходимо задать еще одно условие, которое позволит исключить B. В качестве такового примем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta} = 0 \tag{1.9}$$

что физически обосновано: скорость в пограничном слое достаточно плавно переходит в скорость внешнего потока. Условие (1.9) дает

$$B = -\frac{f}{\delta} + \delta\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2}{\partial x}\right) - \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\delta^3}{12}\frac{\partial}{\partial x}\zeta^2$$

Исключая B, получим уравнение для δ:

$$\frac{\delta^2}{6}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{6}\frac{\partial \delta^2}{\partial t} + \frac{3}{8}f\delta^2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{8}f^2\delta\frac{\partial \delta}{\partial x} = f \tag{1.10}$$

Отсюда при помощи замены $\varphi = f\delta^2$ для функции φ получим уравнение

$$\frac{1}{6f}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{16}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{5}{16}\varphi\frac{\partial \ln f}{\partial x} = 1 \tag{1.11}$$

Коэффициенты $^1/_6$ и $^1/_{16}$ можно уничтожить, вводя переменные $t' = 6t$ и $x' = 16x$. Уравнения характеристик записываются в виде

$$\frac{dt}{\frac{1}{6f}} = \frac{dx}{\frac{1}{16}} = \frac{d\varphi}{1 - \frac{\varphi}{16}\frac{\partial}{\partial x}\ln f^5} \tag{1.12}$$

Для каждого конкретного вида функции f можно найти решение этой системы либо в явном виде, либо численными методами. При этом для однозначного определения φ (а значит, и δ) необходимо задать условие, которое в общем виде можно записать так:

$$\varphi = \varphi_0(t) \quad \text{при} \quad x = X_0(t) \qquad \text{или} \qquad \varphi = \varphi_1(x) \quad \text{при} \quad t = T_0(t) \tag{1.13}$$

где φ_0 и φ_1 — заданные функции. Вид функции X_0 и φ_0 (или T_0 и φ_1) определяется конкретной постановкой физической задачи. В ряде практически интересных задач это условие имеет вид:

$$\varphi = \varphi(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad \text{или} \qquad \varphi = \varphi_1(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

В некоторых случаях φ_0 или φ_1 можно считать равным нулю.

Не проводя общего исследования уравнения (1.11), ограничимся рассмотрением характерных примеров. Заметим только, что решение системы (1.12) можно найти в явном виде для многих встречающихся в практике функций $f(t, x)$.

После того как найдено φ, можно определить

$$\delta = \sqrt{\frac{\varphi(t, x)}{f(t, x)}} \tag{1.14}$$

и написать в явном виде выражение для всех характеристик потока.

1. Продольная компонента скорости

$$u = y\left[\zeta + \frac{\delta}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2}{\partial x}\right) - \frac{\delta^2}{6}\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\delta^3}{48}\frac{\partial \zeta^2}{\partial x}\right] -$$
$$- \frac{y^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2}{\partial x}\right) + \frac{y^3}{6}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{y^4}{48}\frac{\partial \zeta^2}{\partial x} \qquad \left(\zeta = \frac{f}{\delta}\right) \tag{1.15}$$

2. Нормальная к контуру компонента скорости

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = -A_1\frac{y^2}{2} + A_2\frac{y^3}{6} - A_3\frac{y^4}{24} - A_4\frac{y^5}{240} \tag{1.16}$$

[обозначения A_i очевидны из (1.15)].

3. Напряжение трения у контура

$$\tau = -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = -\left(\zeta + \frac{\delta}{3}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{6}\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{11}{48}\delta\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{f^2}{24}\frac{\partial \delta}{\partial x}\right) \tag{1.17}$$

4. Точка отрыва пограничного слоя (если она существует) определится из уравнения

$$\tau = 0 \qquad \text{или} \qquad f + \frac{\delta^2}{3}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{12}\frac{\partial \delta^2}{\partial t} + \frac{11}{48}\delta^2\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{f^2}{48}\frac{\partial \delta^2}{\partial x} = 0 \tag{1.18}$$

5. «Толщина вытеснения» δ^*, характеризующая уменьшение расхода жидкости из-за сил трения в пограничном слое, равна

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{f}\right)dy = \frac{\delta}{2}\left[1 - \frac{\delta^2}{24}\frac{\partial \ln f}{\partial t} - \frac{1}{48}\frac{\partial \delta^2}{\partial t} - \frac{17}{240}\delta^2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{160}f\frac{\partial \delta^2}{\partial x}\right]$$

или, если воспользоваться (1.11), то

$$\delta^* = \frac{3}{8}\,\delta\left[1 + \frac{1}{36}\frac{\partial\delta^2}{\partial t} + \frac{11}{360}\,\delta^2\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{80}\,f\,\frac{\partial\delta^2}{\partial x}\right] \qquad (1.19)$$

§ 2. Примеры. Рассмотрим несколько примеров, когда можно найти решение (1.11) в явном виде.

I. Скорость внешнего потока представляется в виде произведения $f(t, x) = f_1(t)\,f_2(x)$. Система (1.12) запишется в форме

$$\frac{6f_1(t)\,f_2(x)\,dt}{1} = \frac{16dx}{1} = \frac{d\varphi}{1 - \dfrac{1}{16}\,\varphi\,\dfrac{d\ln f_2^5}{dx}} \qquad (2.1)$$

Отсюда легко находятся первые интегралы:

$$f_2^5(x)\,\varphi - 16\int\limits_0^x f_2^5(x')\,dx' = C_1, \qquad 6\int\limits_0^t f_1(t')\,dt' - 16\int\limits_0^x \frac{dx'}{f_2(x')} = C_2$$

Общее решение можно записать в виде

$$f_2^5(x)\,\varphi - 16\int\limits_0^x f_2^5(x')\,dx' = \psi\left[6\int\limits_0^t f_1(t')\,dt' - 16\int\limits_0^x \frac{dx'}{f_2(x')}\right] \qquad (2.2)$$

где $\psi[\alpha]$ — произвольная функция аргумента α, которую нужно определить по условию (1.13). Рассмотрим простейшие случаи.

Ia. Удовлетворяя условию $\varphi = 0$ при $x = 0$, найдем $\psi \equiv 0$. Значит,

$$\varphi = \frac{16}{f_2^5(x)}\int\limits_0^x f_2^5(x')\,dx' \quad \text{или} \quad \delta^2 = \frac{16}{f_1(t)\,f_2^6(x)}\int\limits_0^x f_2^5(x')\,dx' = \frac{16}{f^6}\int\limits_0^x f^5 dx' \qquad (2.3)$$

Отсюда следует, что при увеличении скорости внешнего потока со временем пограничный слой как бы прижимается к контуру. При этом если $f_1(0) = 0$, то толщину пограничного слоя в начальный момент следует считать равной бесконечности [1]. Отметим частные случаи.

1. Пусть $f_1(t) = 1$. Естественно, что получается решение для установившегося движения.

2. Пусть $f_2(x) = x$. Тогда $\delta^2 = {}^8/_3 f_1(t)$. Если еще $f_1(t) = 1$, то в этом приближении $\delta^2 = {}^8/_3$. (Известно, что в этом случае толщина пограничного слоя будет постоянной, см., например, [3].)

3. Пусть $f_2(x) = 1$; давление во внешнем потоке пропорционально x. Тогда

$$\delta = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{f_1(t)}} \qquad (2.4)$$

Точка отрыва находится из формулы

$$x_0 = -\frac{1}{3}\,\frac{f_1^2}{df_1/dt} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(d/dt)\,(1/f_1)}$$

т. е. отрыв имеет место только при торможении. Например, если $f = 1 + \varepsilon\sin\omega t$, причем $|\varepsilon| < 1$, то

$$x_0 = -\frac{1}{3}\,\frac{(1 + \varepsilon\sin\omega t)^2}{\varepsilon\omega\cos\omega t}$$

Чем больше ε и частота ω, тем ближе к краю контура «добегает» точка отрыва. Это ближайшее расстояние x_{00} и время t_0, за которое оно достигается, определяется по формулам

$$\omega t_0 = \arccos\left[-\frac{\sqrt{\sqrt{1 + 8\varepsilon^2} - (1 + 2\varepsilon^2)}}{\varepsilon\sqrt{2}}\right], \qquad x_{00} = \frac{\sqrt{2}}{6\omega}\,\frac{5 - 3\sqrt{1 + 8\varepsilon^2} + 4\varepsilon^2}{\sqrt{1 + 8\varepsilon^2 - (1 + 2\varepsilon^2)}}$$

---

[1] Однако в некоторых задачах, например при изучении развития пограничного слоя у бесконечно длинной в оба конца плоской пластинки, следует принять условие $\delta = 0$ при $t = 0$.

Если $8\varepsilon^2 \ll 1$, то $x_{00} \approx \sqrt{2}/6\varepsilon^2\omega$.

4. Чтобы представить картину изменения движения в пограничном слое при непрерывном изменении скорости внешнего потока, последнюю можно задать, например, в виде

$$U(t, x) = (1 + \varepsilon \operatorname{th} bt) f_2(x)$$

(не нарушая общность, можно считать, что $\varepsilon b = 1$. Действительно, в размерных величинах скорость внешнего потока здесь представляется в виде

$$U(t, x) = (u_0 + \varepsilon' \operatorname{th} b't) f_2(x) \qquad (f_2 \text{ — безразмерная функция})$$

и в качестве характерной длины можно взять величину $L = \varepsilon' b$; значит, $\bar{x} = x/\varepsilon' b'$).

При $f_2 = 1$ (градиент давления не зависит от x) формула (1.15) дает

$$\frac{u}{f} = \frac{1}{3}\xi(4 - \xi^3) + \frac{4x\xi(1-\xi)^2}{(1+\varepsilon \operatorname{th} bt)^2 \operatorname{ch}^2 bt} \qquad \left(\xi = \frac{y}{\delta} = \frac{4}{4\sqrt{x}}\sqrt{1 + \varepsilon \operatorname{th} bt}\right)$$

Отсюда видно, что

$$\frac{u}{f} \to \frac{1}{3}\xi_\infty(4 - \xi_\infty^3) \quad \text{при} \quad t \to \infty \qquad \left(\xi_\infty = \frac{y\sqrt{1+\varepsilon}}{4\sqrt{x}}\right)$$

т. е. стремится к приближенному решению стационарной задачи при отсутствии градиента давления (задача Блязиуса) [1].

5. Рассмотрим пример торможения пластинки. Пусть

$$f(t) = \frac{1}{1 + t^n}$$

Точка отрыва пограничного слоя определится по формуле

$$x_0 = \frac{1}{3nt^{n-1}}$$

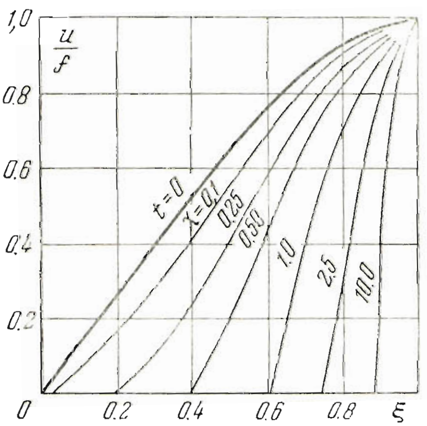
при $n = 1$ координата точки отрыва не меняется. Скорость в пограничном слое будет

$$u = \frac{4\xi}{1+t^n}\left[\frac{1}{3} - \frac{\xi^3}{12} - nxt^{n-1}(1-\xi)^2\right]$$

$$\left(\xi = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{4\sqrt{x}\sqrt{1+t^n}}\right) \qquad (2.5)$$

При $n > 1$ имеем

$$u|_{t=0} = \frac{4}{3}\xi_0 - \frac{1}{3}\xi_0^4 \qquad \left(\xi_0 = \frac{y}{4\sqrt{x}}\right)$$



Фиг. 1

т. е. приближенное решение задачи Блязиуса[1].

На фиг. 1 представлены кривые

$$\frac{u}{f} \equiv u(1 + t^n) - 4\xi\left[\frac{1}{3} - \frac{\xi^3}{12} - nxt^{n-1}(1-\xi)^2\right] \qquad \left(f = \frac{1}{1+t^n}\right)$$

как функции ξ [см. (2.5)] и параметра $\chi = nxt^{n-1}$.

1б. Если потребовать, чтобы $\varphi = \varphi_1(x)$ при $t = 0$, причем $\varphi_1(x)$ взять из решения стационарной задачи,— в этом случае должно быть $f(0, x) \neq 0$, то получим решение, рассмотренное в п. 1а, т. е. $\psi \equiv 0$ (ведь φ определялось из условия $\varphi = 0$ при $x = 0$).

При $f(0, x) = 0$ будем считать, что $\delta = 0$ при $t = 0$, а значит, и $\varphi = 0$.

Удовлетворяя этому условию, найдем из (2.2)

$$\psi\left[16\int_0^x \frac{dx'}{f_2(x)}\right] = 16\int_0^x f_2^5(x')\,dx'$$

и принципиально можно найти $\psi[\alpha]$. В ряде случаев вычисления можно довести до конца.

1. Если $f_2(x) = x^m$, то

$$\psi[\alpha] = \frac{16}{5m+1}\left(\frac{1-m}{16}\alpha\right)^{\mu} \qquad \left(\mu = \frac{5m+1}{1-m}\right)$$

$$\delta^2 = \frac{16}{5m+1}\frac{x^{1-m}}{f_1(t)}\left\{1 - \left[1 - \frac{3(1-m)}{8}\frac{1}{x^{1-m}}\int_0^t f_1(t')\,dt'\right]^{\mu}\right\}$$

При малых t

$$\delta^2 = 6\int_0^t f_1(t')\,dt'$$

Для $m = 0$ эта формула будет точной. В предельном случае $m = 1$, найдем

$$\delta^2 = \frac{8}{3}\frac{1}{f_1(t)}\left[1 - \exp\left(-\frac{9}{4}\int_0^t f_1(t')\,dt'\right)\right] \tag{2.6}$$

2. В случае $f_2 = 1 - x$ найдем

$$\delta^2 = \frac{8}{3}\frac{1}{f_1(t)}\left[\exp\ \frac{9}{4}\int_0^t f_1(t')\,dt' - 1\right]$$

II. Скорость внешнего потока представляется в виде суммы $f(t, x) = x + f_1(t)$. Уравнения характеристик (1.12) будут

$$\frac{6[x + f_1(t)]\,dt}{1} = \frac{16dx}{1} = \frac{d\varphi}{1 - {}^5/_{16}\varphi\,[x + f_1(t)]}$$

Отсюда, пользуясь сначала первой парой отношений, а затем второй, находим

$$x = e^{^3/_8 t}\left[C_1 + \frac{3}{8}\int_0^t e^{-^3/_8 t} f_1(t')\,dt'\right]$$

$$\varphi = e^{-^{15}/_8 t}\left\{C_2 + 6\int_0^t e^{^{15}/_8 t'}\left[f_1(t') + e^{^3/_8 t'}\left(C_1 + \frac{3}{8}\int_0^{t'} e^{-^3/_8 t''} f_1(t'')\,dt''\right)\right]dt'\right\}$$

или после подстановки C_1 и интегрирования

$$\varphi = e^{-^{15}/_8 t}\left\{C_2 + 5\int_0^t f_1(t')e^{^{15}/_8 t'}\,dt' + \frac{8}{3}xe^{^{15}/_8 t} - \left[\frac{8}{3}xe^{-^3/_8 t} - \int_0^t e^{-^3/_8 t'} f_1(t')\,dt'\right]\right\}$$

Таким образом, общий интеграл можно записать в виде

$$e^{^{15}/_8 t}\left(\varphi - \frac{8}{3}x\right) - 5\int_0^t f_1(t')e^{^{15}/_8 t'}\,dt' = \psi\left[-\int_0^t e^{-^3/_8 t'} f_1(t')\,dt' + \frac{8}{3}xe^{-^3/_8 t}\right]$$

Рассмотрим несколько случаев определения ψ.

1. Условие $\varphi = 0$ при $x = 0$ дает

$$\psi\left[\int_0^t e^{-^3/_8 t'} f(t')\,dt'\right] = 5\int_0^t e^{^{15}/_8 t'} f_1(t')dt'$$

Зная $f_1(t)$, найдем ψ. Так, $\psi(t) = {}^{20}/_9\,(e^{^9/_4 t} - 1)$ при $f_1(t) = e^{^3/_8 t}$.

2. Если $f_1(0) = 0$, то условие для δ при $t = 0$ можно взять из решения стационарной задачи, когда $f = x$ (см. стр. 405), $\varphi = {}^8/_3 x$ при $t = 0$.

Удовлетворяя ему, найдем $\psi({}^8/_3 x) = 0$. Значит,

$$\varphi = \frac{8}{3}x + 5e^{-^{15}/_8 t}\int_0^t f_1(t')\,e^{^{15}/_8 t'}dt'$$

$$\delta^2 = \frac{1}{x + f_1(t)}\left[\frac{8}{3}x + 5e^{-^{15}/_8 t}\int_0^t f_1(t')\,e^{^{15}/_8 t'}\,dt'\right]$$

3. Если скорость внешнего потока мгновенно меняется от нуля до $x + f_1(t)$, то, принимая условие $\delta = 0$ при $t = 0$ (а значит, и $\varphi = 0$), найдем $\psi({}^8/_3 x) = -{}^8/_3 x$. Следовательно,

$$\delta^2 = \frac{1}{x + f_1(t)} \left\{ \frac{8}{3} x (1 - e^{-{}^9/_4 t}) + e^{-{}^{15}/_8 t} \int\limits_0^t f_1(t') \left[5 e^{{}^{15}/_8 t'} + e^{-{}^3/_8 t'}\right] dt' \right\}$$

III. Рассмотрим еще один пример. Выясним, какова должна быть скорость внешнего потока, чтобы толщина пограничного слоя была пропорциональна какой-либо степени этой скорости $\delta = kf$. В этом случае $\varphi = f\delta^2 = k^2 f^{1+2n}$ и уравнение (1.11) принимает вид:

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{16}\left(1 + \frac{5}{1+2n}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 \qquad \left(\chi = 6\left(\frac{\varphi}{k^2}\right)^{\frac{1}{1+2n}}\right)$$

и соответствующая система будет

$$\frac{dt}{1/\chi} = \frac{dx}{(n+3)/8(1+2n)} = \frac{d\varphi}{1}$$

Отсюда легко находится общий интеграл:

$$\varphi - \frac{8(1+2n)}{n+3} x = \Psi\left[\frac{1+2n}{2n} \varphi^{\frac{2n}{1+2n}} - 6k^{-\frac{2n}{1+2n}} t\right]$$

Если $\delta = 0$ при $x = 0$, то $\Psi \equiv 0$ и

$$\varphi = \frac{8(1+2n)}{n+3} x, \quad \text{или} \quad f = \left[\frac{8(1+2n)}{(n+3)k^2} x\right]^{\frac{1}{1+2n}}$$

В случае развития из состояния покоя ($\varphi = 0$ при $t = 0$) аналогично найдем

$$\varphi = \left[\frac{12n}{1+2n} k^{-\frac{2}{1+2n}} t\right]^{\frac{(1+2n)}{2n}} \qquad \text{или} \qquad f = \left[\frac{12nt}{1+2n} k^{-\frac{4(n+1)}{1+2n}}\right]^{\frac{1}{2n}}$$

§ 3. Краевая задача для функции φ. В ряде случаев из физических соображений нужно потребовать выполнения условий в точках $t = 0$ и $x = 0$. Рассмотрим несколько простых примеров, когда можно получить решение в явном виде.

1. Пусть $f(t, x) = t^\alpha$, $\varphi_1 = \text{const}$.

Уравнение (1.11) и граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{8}{3} t^{-\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 16$$

$$\varphi = \varphi_0(x) \quad \text{при } t = 0; \qquad \varphi = \varphi_1 = \text{const} \quad \text{при } x = 0$$

Воспользуемся операционными (по x) методами решения. Вводя, как обычно, оператор Карсона-Хевисайда, получим для изображения $\Phi(t, p)$ функции φ уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt} + \frac{3}{8} p t^\alpha \Phi = \left(6 + \frac{3}{8} p \varphi_1\right) t^\alpha, \qquad \Phi = \Phi_0(p) \quad \text{при } t = 0$$

Его решение имеет вид [1]:

$$\Phi = \Phi_0(p) \exp\left(-p \frac{3}{8(\alpha+1)} t^{\alpha+1}\right) + \frac{16}{p}\left[1 - \exp\left(-p \frac{3}{8(\alpha+1)} t^{\alpha+1}\right)\right] + \\ + \varphi_1 \left[1 - \exp\left(-p \frac{x}{8(\alpha+1)} t^{\alpha+1}\right)\right]$$

[1] В более общем случае, когда $f = f_1(t)$ и $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, нужно найти оригинал для

$$\Phi = 6 \int\limits_0^t \exp\left(-p \frac{3}{8} \int\limits_{t'}^t t_1(t'')\, dt''\right) f_1(t')\, dt' + \Phi_0(p) \exp\left(-p \frac{3}{8} \int\limits_0^t f_1(t')\, dt'\right) + \\ + \frac{3}{8} p \int\limits_0^t \exp\left(-p \frac{3}{8} \int\limits_{t'}^{t''} f_1(t'')\, dt''\right) \varphi_1(t') f_1(t')\, dt'$$

По таблицам справочника [2] находим оригинал:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0\left(x - \frac{3}{8(\alpha+1)}\, t^{\alpha+1}\right) + \frac{6}{\alpha+1}\, t^{\alpha+1} & \text{при } \frac{3}{8(\alpha+1)}\, t^{\alpha+1} < x \\ 16x + \varphi_1 & \text{при } \frac{3}{8(\alpha+1)}\, t^{\alpha+1} > x \end{cases}$$

Значит,

$$\delta^2 = \begin{cases} t^{-\alpha}\varphi_0\left(x - \frac{3}{8(\alpha+1)}\, t^{\alpha+1}\right) + \frac{6t}{\alpha+1} & \text{при } \frac{3}{8(\alpha+1)}\, t^{\alpha+1} < x \\ (16x + \varphi_1)\, t^{-\alpha} & \text{при } \frac{3}{8(\alpha+1)}\, t^{\alpha+1} > x \end{cases}$$

Таким образом, получается движущийся фронт; для малых моментов времени существенна нестационарность движения, по мере увеличения времени стационарный режим распространяется все дальше вдоль x.

В простейшем случае, когда плоская пластинка мгновенно приобретает постоянную скорость:

$$f = 1 \qquad (\alpha = 0), \qquad \varphi_0 = 0, \qquad \varphi_1 = 0$$

имеем

$$\delta^2 = \begin{cases} 6t & \text{при } x > \frac{3}{8}\, t \\ & (\text{в размерном виде } x < \frac{3}{8} Ut) \\ 16x & \text{при } x < \frac{3}{8}\, t \end{cases}$$

что согласуется с решениями, полученными раньше.

В области $0 \leqslant x < {}^3/_8 Ut$ имеем решение, соответствующее решению задачи Блязиуса, в области $x > {}^3/_8\, Ut$ решение описывает обтекание бесконечно длинной (в обе стороны) пластинки.

2. Пусть $f = x$, $\varphi_0(x) = ax^m$, $\varphi_1(t) = 0$. Здесь уравнение (1.11) и граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{3}{8}\, x\, \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{15}{8}\varphi = 6x$$

$$t = 0, \qquad \varphi = ax^m; \qquad x = 0, \qquad \varphi = 0$$

Применим опять операционное исчисление, но уже по t; для изображения $\Phi(x, p)$ функции φ получим

$$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{5 + {}^8/_3 p}{x}\Phi = 16 + \frac{8}{3}\, apx^{m-1}, \qquad \Phi = 0 \qquad \text{при } x = 0$$

Его решением будет

$$\Phi = \frac{6x}{p + {}^9/_4} + \frac{p}{p + {}^3/_8(m+5)}\, ax^m$$

Оригинал имеет вид:

$$\varphi = \frac{8}{3}\, x\left(1 - e^{-{}^9/_4 t}\right) + ax^m e^{-{}^3/_8 (m+5)t}$$

или

$$\delta^2 = \frac{8}{3}\left(1 - e^{-{}^9/_4 t}\right) + ax^{m-1}\, e^{-{}^3/_8 (m+5)t}$$

При $a = 0$ получим формулу (2.6) для случая $f = 1$; при $m = 1$ и $a = 1$ получим $\delta^2 = {}^8/_3$ (см. стр. 405).

§ 4. Обтекание тел вращения. Пусть x обозначает координату вдоль меридиана, y — нормаль к поверхности тела вращения, $r_0(x)$ — радиус поверхности и $U(x, t)$ — скорость внешнего потока, направленную вдоль тела, u, v — компоненты скорости в пограничном слое вдоль x и y соответственно.

Уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial t}-U\frac{\partial U}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{u}{r_0(x)}\frac{dr_0}{dx}=0 \qquad (4.1)$$

Замечание. Как и в стационарном случае, здесь можно свести осесимметрическую задачу к задаче на плоском профиле (см.[5]).

Вводя безразмерные переменные по формулам (1.4) (в качестве L можно взять характерный радиус тела вращения) и исключая v, получим для u следующее уравнение (черточки над безразмерными переменными опущены):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\left[\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{d\ln r_0}{dx}\int_0^y u\,dy\right]-\frac{\partial f}{\partial t}-f\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (4.2)$$

Решение будем искать в виде $u=u^{(0)}+u^{(1)}+\cdots$ Для $u^{(0)}$ получаем

$$u^{(0)}=y\,\frac{f(t,x)}{\delta(t,x)}$$

Вставляя это значение в правую часть и интегрируя дважды по y, найдем $u^{(1)}$. Ограничившись этим приближением, можно написать

$$u=u^{(0)}+u^{(1)}=y\frac{f}{\delta}+\frac{y^3}{6}\frac{\partial}{\partial t}\frac{f}{\delta}-\frac{y^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{y^4}{48}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{\delta}\right)^2+\frac{y^4}{24}\left(\frac{f}{\delta}\right)^2\frac{d\ln r_0}{dx}+B(t,x)\,y+A(t,x)$$

Исключая A и B при помощи соотношений

$$u=0 \quad \text{при } y=0; \qquad u=f, \quad \partial u/\partial y=0 \quad \text{при } y=\delta$$

получим для толщины пограничного слоя δ дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{3}\delta^3\frac{\partial}{\partial t}\frac{f}{\delta}+\frac{1}{2}\delta^2\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\delta^2 f\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\delta^4}{16}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{\delta}\right)^2+\frac{1}{8}f^2\delta^2\frac{d}{dx}\ln r_0(x)=f$$

После дифференцирования и деления на f получим для функции $\varphi=$ $=f\delta^2$ следующее уравнение:

$$\frac{1}{6}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{16}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\varphi}{16}\frac{\partial}{\partial x}\ln\,[f^5 r_0^{\,2}]=1 \qquad (4.3)$$

Сравнивая это уравнение с (1.11), видим, что все его решения могут быть получены из решений (1.11), если заменить там $f(t,x)$ на $f(t,x)r_0^{\,2/5}$.

Поступила 20 IV 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш в е ц М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ, т. XIII, вып. 3, 1949.
2. Т а р г С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1951.
3. Г о л ь д ш т е й н С. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. I, § 54, ИИЛ, 1948.
4. Д и т к и н В. А. и К у з н е ц о в П. И. Справочник по операционному исчислению. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1951.
5. С т е п а н о в Е. И. Об интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя для движения с осевой симметрией, ПММ, т. XI, в. 1, 1947.