

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА НА ПЛАСТИНЕ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕПАДАХ ТЕМПЕРАТУР

В. В. Лунев

(Москва)

Исследуется ламинарный пограничный слой на пластине без упрощающих предположений относительно зависимости вязкости от температуры. Число Прандтля берется постоянным или слабо зависящим от температуры. Рассматриваемый диапазон температур включает также область диссоциации воздуха. Для постоянных граничных условий дан и обоснован для достаточно широкого диапазона граничных условий метод последовательных приближений, сходящихся к точному решению задачи, которое предполагается существующим и единственным.

§ 1. Основные уравнения. В общем случае уравнения пограничного слоя на плоской пластине записываются так:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), & \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial i}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & \left(i = \int_0^T c_p dT \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Решение будет проводиться в переменных Крокко. Делаем замену переменных (x, y) на (x, u) и искомой функции u на $\tau(x, y) = \mu \partial u / \partial y$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_y &= \frac{\partial}{\partial x} \Big|_u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\tau}{\mu} \frac{\partial}{\partial u} \\ \rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\tau}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial u}, & \rho v &= - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_u = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial u} \end{aligned}$$

Подставляя это в первое уравнение системы (1.1), получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_u = - \frac{\partial \tau}{\partial u}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\rho \mu u}{\tau}$$

Отсюда, исключая ψ , имеем

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} = \frac{\rho \mu u}{\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{u}{\tau} \frac{\partial(\rho \mu)}{\partial x} \quad (1.2)$$

Подобным же образом последнее уравнение из системы (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial i}{\partial u} \right) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial u} \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \frac{\partial i}{\partial u} + 1 = \frac{\rho \mu u}{\tau^2} \frac{\partial i}{\partial x} \quad \left(\sigma = \frac{\mu c_p}{k} \right) \quad (1.3)$$

где σ — число Прандтля; в самом общем случае σ нельзя считать постоянным, особенно при очень высоких температурах (более 2000° К при обычных давлениях), когда воздух диссоциирует; в этом случае для пластины следует считать $\sigma = \sigma(i)$.

Введем безразмерные величины

$$u^0 = \frac{u}{u_\infty}, \quad i^0 = \frac{i}{i_\infty}, \quad \tau^0 = \frac{\tau}{\rho_\infty u_\infty^2}, \quad x^0 = \frac{\rho_\infty u_\infty}{\mu_\infty} x, \quad f = \frac{\rho \mu}{\rho_\infty \mu_\infty}, \quad c = \frac{u_\infty^2}{i_\infty}$$

Для полнотропического газа $c = (\kappa - 1) M_\infty^2$. Уравнения (1.2) и (1.3) в безразмерных величинах (с опущенными индексами⁰) примут вид:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} = \frac{fu}{\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{u}{\tau} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial i}{\partial u} \right) + \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial i}{\partial u} + c = \frac{fu}{\tau^2} \frac{\partial i}{\partial x}$$

Для недиссоциированного воздуха f в большом диапазоне температур выражается формулой

$$f = \frac{T_\infty + 110^\circ \text{K}}{T + 110^\circ \text{K}} \sqrt{\frac{T}{T_\infty}} \quad (1.5)$$

Для диссоциированного воздуха функция $f(i)$ дана в [1]. Как утверждается в этой работе, f явно зависит лишь от энтальпии. В обоих случаях f — медленно меняющаяся функция своего аргумента, особенно при высоких температурах. Во всяком случае везде, где энтальпия (или температура, если воздух недиссоциирован) меняется вдвое, f отклоняется от своего среднего значения не более чем на 15%. Этот факт имеет существенное значение при нахождении решения.

Задачу будем решать при граничных условиях

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial i}{\partial u} = 0 \quad \text{или} \quad i_w = \text{const} \quad \text{при} \quad u = 0; \quad \tau = 0, \quad i = 1 \quad \text{при} \quad u = 1$$

Заметим, что пограничный слой на круглом конусе описывается системой (1.4), где вместо τ и x будут стоять $\tau_1 = \tau/x$ и $x_1 = 1/3 x^3$.

§ 2. Решение системы. При постоянных граничных условиях в системе (1.4) — (1.5) возможно разделение переменных. Действительно, в этом случае системе и граничным условиям будут удовлетворять решения в виде $i = i(u)$, $\tau(x, y) = X(x)g(u)$ (существование и единственность решения предполагаем). Подставляя это в (1.4), будем иметь

$$Xg'' = \frac{fuX'}{gX^2}$$

Положим $X'/X^3 = -1$, тогда

$$X = \frac{1}{\sqrt{2x + C}}$$

Вопрос о выборе C — это вопрос о начальных условиях для уравнения (1.4), так как оно параболического типа. По принятой для пластины схеме расчета пограничного слоя считается, что $u = 1$ при $x = 0$ для всех $y \neq 0$ и $u = 0$ для $y = 0$ вследствие прилипания. Придерживаясь этой схемы, следует считать, что $\lim \tau_w \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$ и $\tau = 0$ при $u = 1$ всюду, а при всех остальных значениях u при $x \rightarrow 0$ предела существовать не будет. Отсюда $C = 0$.

Таким образом, задача свелась к решению следующей системы:

$$gg'' = -f(i)u \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma} i' \right)' + \frac{g'}{g} \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) i' + c = 0 \quad (2.2)$$

Если $f = \text{const}$ или $\sigma = 1$, то одно из уравнений этой системы становится независимым от другого и система решается (см., например, [2.3])¹. Ниже излагается способ решения этой системы в более общем случае.

Суть метода в следующем. В уравнение (2.2) подставляем неким образом выбранный профиль трения $G = g/g_w$, после чего это уравнение при $\sigma = \text{const}$ решается в квадратурах. Полученное решение для i подставляем в (2.1), находим следующее приближение для g , при помощи его вновь решаем (2.2) и т. д.

Исследуем свойства g и G . Пусть g_0 и i_0 — точное решение системы (2.1) — (2.2). При мало измененной функции $f = f_0 + \delta f$ будем иметь, линеаризируя (2.1):

$$\begin{aligned} g_0 \delta g'' + g_0'' \delta g &= -u \delta f & (\delta g = g - g_0) \\ \delta g = 0 & \text{ при } u = 1, & \delta g' = 0 \text{ при } u = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пусть g^* — решение однородного уравнения, соответствующего (2.3), имеющее $g_w^* = 0$. Тогда по общей теории полное решение, удовлетворяющее данным граничным условиям, будет

$$\delta g = g^* \int_u^1 \frac{1}{g^{*2}} \int_0^u g^* \frac{u f_0}{g_0} \frac{\delta f}{f_0} du du = m(f_0, u) g^* \int_u^1 \frac{1}{g^{*2}} \int_0^u \frac{u f_0}{g_0} g^* du du \quad (2.4)$$

где $m(f_0, u)$ — среднее значение $[(\delta f)/f_0]$. При постоянном $(\delta f)/f_0 = m_0$ уравнение (2.3) имеет решение $\delta g = 1/2 m_0 g_0$, следовательно, множитель при $m(f_0, u)$ в (2.4) равен $1/2 g_0$ (в чем легко убедиться и непосредственным вычислением интеграла) и при произвольном $(\delta f)/f_0$ будем иметь

$$\frac{\delta g}{g_0} = \frac{1}{2} m(f_0, u) \quad (2.5)$$

т. е. ошибка уменьшается более чем вдвое. Для ошибки в профиле получается формула

$$\frac{\delta G}{G_0} = \frac{1}{2} [m(f_0, u) - m(f_0, 0)] \quad (2.6)$$

Из (2.5) видно, что если f_0 меняется мало, то получим хорошую точность при определении трения, положив

$$f = \frac{1}{2} (f_0 \max + f_0 \min)$$

что и следует делать при небольших перепадах температур. Из (2.6) следует

$$\max \left| \frac{G - G_0}{G_0} \right| \leq q \max \left| \frac{f - f_0}{f} \right| \quad (0 \leq q < 1) \quad (2.7)$$

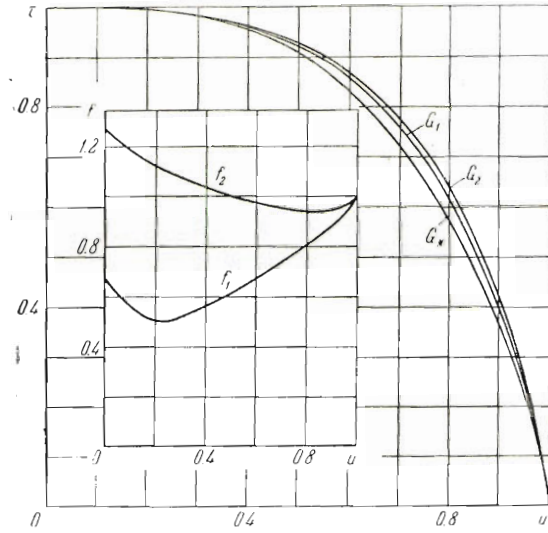
Кроме того, так как для любых $f = \text{const}$ профиль трения один и тот же (обозначим его через G_*), то для реальных задач точный G будет мало отличаться от G_* .

Практически профили трения обладают, повидному, гораздо большим однообразием, чем можно утверждать на основании (2.7), т. е. q ,

¹ См. также [4]. Там же приведены таблицы многих функций, встречающихся в настоящей статье.

повидимому, существенно меньше единицы. Так, например, G , рассчитанный для f , меняющейся вдвое (что достижимо лишь при полетах с

$M \sim 7$), отличается от G_* не более, чем на 13% (f_1 и G_1 на фиг. 1); для мало меняющихся f (например, f_2 на фиг. 1) G не отличается заметно от G_* . Такое постоянство профилей трения объясняется, вероятно, тем, что многообразие функций f значительно богаче многообразия G , так как всем f , различающимся постоянным множителем, соответствует один профиль, и что в формулы (2.5) — (2.6) входят средние значения знакопеременных (при $f_0 = f_{cp}$) величин.



Фиг. 1

Уравнение (2.2) при известном G и постоянном σ решается в квадратурах:

$$i = i_w - c\sigma J_1(u) + [1 - i_w + c\sigma J_1(1)] \frac{J_2(u)}{J_2(1)} \tag{2.8}$$

или

$$i = 1 + c\sigma [J_1(1) - J_1(u)] - [1 - i_w + c\sigma J_1(1)] \frac{J_2(1) - J_2(u)}{J_2(1)} \tag{2.9}$$

где

$$J_1(u) = \int_0^u G^{\sigma-1} \int_0^u G^{1-\sigma} du du, \quad J_2(u) = \int_0^u G^{\sigma-1} du$$

Оценим погрешность, получаемую при вычислении i , заменой истинного $G = G_0$ приближенным. Пусть α, β, γ обозначают различные усредненные значения относительной ошибки

$$\frac{G^{1-\sigma} - G_0^{1-\sigma}}{G_0^{1-\sigma}} = (1 - \sigma) \frac{\delta G}{G_0}$$

Тогда из (2.8) будем иметь

$$\begin{aligned} i_0 + \delta i &= i_w + (1 - i_w)(1 + 2\alpha) \frac{J_2(u)}{J_2(1)} - c\sigma(1 + 2\beta) J_1(u) + \\ &+ c\sigma(1 + 2\gamma)(1 + 2\alpha) \frac{J_2(u)J_1(1)}{J_2(1)} = i_0 + 2\alpha[1 - i_w + c\sigma J_1(1)] \frac{J_2(u)}{J_2(1)} - \\ &- 2\beta c\sigma J_1(u) + c\sigma\gamma \frac{J_2(u)J_1(1)}{J_2(1)} \end{aligned}$$

Здесь J_1 и J_2 взяты при $G = G_0$. Если $\varepsilon = \max(|\alpha|, |\beta|, |\gamma|)$, то для $i_w' > 0$ получим

$$|\delta i| \leq 2\varepsilon \left[\frac{1 - i_w + 2c\sigma J_1(1)}{J_2(1)} + 2 \frac{c\sigma J_1(u)}{J_2(u)} \right] J_2(u) \tag{2.10}$$

Из (2.9) аналогично будем иметь

$$|\delta i| \leq 2\varepsilon \left[\frac{1 - i_w + 2c\sigma J_1(1)}{J_2(1)} + c\sigma \frac{J_1(1) - J_1(u)}{J_2(1) - J_2(u)} \right] [J_2(1) - J_2(u)] \quad (2.11)$$

Складывая (2.10) и (2.11), получим

$$|\delta i| \leq \varepsilon (1 - i_w + 3c\sigma J_1(1)) = (1 - \sigma) A_1 \left| \left(\frac{\delta G}{G_0} \right)_{\text{ср}} \right|$$

Соответственно для $i_w' < 0$ получим

$$|\delta i| \leq \varepsilon (i_w - 1 + c\sigma J_1(1)) = (1 - \sigma) A_2 \left| \left(\frac{\delta G}{G_0} \right)_{\text{ср}} \right|$$

и для $i_w' = 0$

$$|\delta i| \leq 2\varepsilon c\sigma J_1(1) = (1 - \sigma) A_3 \left| \left(\frac{\delta G}{G_0} \right)_{\text{ср}} \right|$$

При $i_w \geq 1$ эти формулы оценивают также и $|\delta i|/i_0$, при $i_w < 1$ следует брать $|\delta i|/i_0 < \varepsilon A/i_w$, в любом случае

$$\left| \frac{\delta i}{i_0} \right| \leq p \max \left| \frac{\delta G}{G_0} \right| \quad (2.12)$$

(Если приближенный G лежит в основном по одну сторону от G_0 , что очень вероятно в процессе последовательных приближений, то оценки улучшаются вдвое.)

Практически же за счет малости величины $(1 - \sigma)$ получается высокая точность при вычислении i , если положить в J_1 и J_2 $G = G_*$.

Так, например, величины этих интегралов, вычисленные для $G = G_1$ и $G = G_*$, отличаются друг от друга при $u = 1$ не более 1% ($J_1(u)$ и $J_2(u)$ для $G = G_*$ при $\sigma = 0.73$ даны на фиг. 2 $J_1(1) = 0.584$, $J_2(1) = 1.11$).

Из формулы Сезерленда имеем

$$\frac{i}{f} \frac{df}{di} = \frac{1}{2} \frac{110/T_\infty - i}{i + 110/T_\infty} \quad \text{или} \quad \left| \frac{\delta f}{f} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\delta i}{i} \right|$$

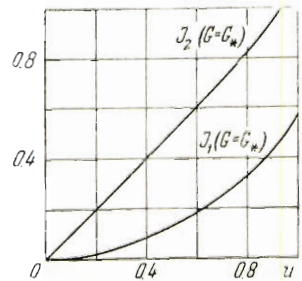
Тем более это неравенство справедливо для диссоциированного воздуха. Следовательно, беря за нулевое приближение $G^{(0)} = G_*$ или близкий к нему, по индукции получим, используя (2.7), (2.5) и (2.12):

$$\begin{aligned} \max \left| \frac{G_0 - G^{(n)}}{G_0} \right| &\leq \frac{qp}{2} \max \left| \frac{G_0 - G^{(n-1)}}{G_0} \right| \leq \left(\frac{qp}{2} \right)^n \max \left| \frac{G_0 - G^{(0)}}{G_0} \right| \\ \max \left| \frac{i_0 - i^{(n)}}{i_0} \right| &\leq p \max \left| \frac{G_0 - G^{(n)}}{G_0} \right| \leq p \left(\frac{qp}{2} \right)^n \max \left| \frac{G_0 - G^{(0)}}{G_0} \right| \\ \max \left| \frac{g_0 - g^{(n)}}{g_0} \right| &\leq \frac{p}{4} \max \left| \frac{i_0 - i^{(n)}}{i_0} \right| \leq \frac{p}{4} \left(\frac{qp}{2} \right)^n \max \left| \frac{G_0 - G^{(0)}}{G_0} \right| \end{aligned}$$

Процесс будет сходящимся при $p < 2$, чем и определяется достаточный для сходимости диапазон граничных условий.

Для обычного воздуха кривые $p(i_w, M_\infty)$ показаны на фиг. 3 и 4 (использовались при вычислении $G = G_*$, $\kappa = 1.41$, $\sigma = 0.73$).

На самом же деле вследствие того, что при оценках мы всюду заменяли многократно осредненные величины максимумом модуля, и вслед-



Фиг. 2

ствие замечаний, сделанных относительно величин q , сходимость процесса будет иметь место при более широком диапазоне граничных условий.

При $\sigma(i)$ переменном удобно ввести замену $t' = \sigma^{-1} i'$. Тогда уравнение (2.2) перейдет в

$$t'' + [1 - \sigma(t)] \frac{G'}{G} t' + c = 0 \tag{2.13}$$

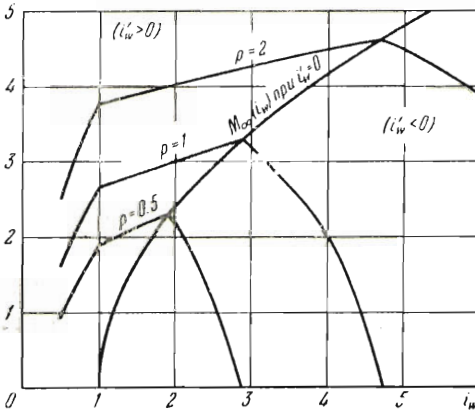
Это уравнение эквивалентно интегральным уравнениям, аналогичным (2.8) и (2.9), из которых в случае мало меняющегося $\sigma(t)$, повторяя предыдущие рассуждения, получим для $(\delta t)/t$ те же формулы, что и для $(\delta i)/i$, где $G^{(1-\sigma)}$ заменено на

$$\exp \int [1 - \sigma(t)] \frac{G'}{G} du = G^{(1-\sigma_{cp}(u))}$$

а

$$\varepsilon = (1 - \sigma_{cp}) \left| \frac{\delta G}{G_0} \right|_{cp} + |\ln G_0 \sigma' \delta t|_{cp}$$

Так как по предположению σ' — малая величина, то последний член справа мал по сравнению с первым при любом выборе средней точки,



Фиг. 3

так как при $u \rightarrow 1$ разность $t-1$, а следовательно, и δt убывают быстрее, чем $g^{\sigma(i)}$, что можно вывести из (2.1) и (2.13). Отсюда вытекает формула (2.12) и применимость метода последовательных приближений и к этому случаю.

При мало меняющемся σ уравнение (2.13) с точностью до малых высшего порядка можно решать, подставляя в $\sigma(t)$ решение того же уравнения при некотором среднем постоянном σ .

§ 3. Решение уравнения (2.1). Для решения уравнения (2.1) при известном f можно воспользоваться следующим способом, основанным на сравнительно слабой зависимости g от f [см. (2.5)] и малом изменении f . Будем искать решение в виде $g = \sqrt{f_{cp}} (g_* + g_1 + g_2 + \dots)$, где g_* — известное решение при $f = 1$, g_1, g_2 — добавки первого и второго порядков малости, а f_{cp} — среднее значение f . Тогда для g_1, g_2 и т. д. получим уравнения

$$g_*^2 g_1'' - u g_1 = - \frac{u(f - f_{cp}) g_*}{f_{cp}} = - g_* \varphi_1(u)$$

$$g_*^2 g_2'' - u g_2 = - g_* g_1 g_1'' = - g_* \varphi_2(u)$$

.....

при прежних граничных условиях¹.

¹ Так как практически вид f очень мало влияет на величину i , то это решение можно рассматривать как решение системы (2.1), (2.2) разложением в ряд по параметру $(f - f_{cp})/f_{cp}$ с учетом лишь первых членов.

Соответствующее этим уравнениям однородное уравнение имеет решение $g^* = 3/2 g_* - u g_*'$, по которому легко строится полное решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$g_i = g_*^* \int_u^1 \frac{1}{g_*^{*2}} \int_0^u \frac{g_*^* \varphi_i(u)}{g_*} du du \quad (3.1)$$

Внутренний интеграл в (3.1) при $u \approx 1$ ($u \geq 0.99$) равен $-\varphi_i(1) \ln g_* + C$; как известно (см. [3]), в той же окрестности $g_*' = -\sqrt{-2 \ln a g_*}$ ($a = 2.8$). Вследствие этого внешний интеграл — собственный и легко вычисляется.

Этот способ решения дает высокую точность. Так, для $f = f_1$ (фиг. 1) уже первое приближение $\sqrt{f_{cp}(g_*^* + g_1)}$ при $f_{cp} = \frac{1}{2}(0.5 + 1) = 0.75$ отличается от точного менее чем на 0.5% порядка точности расчета. (На стенке приближенное и точное значения g_w соответственно будут 0.3803 и 0.3785.) Нулевое приближение $\sqrt{0.75 g_*}$ отличается при этом от точного на 8—10% ($\sqrt{0.75 g_w} = 0.4068$). Для значительно больших перепадов температур, чем тот, которому соответствует f_1 , возможно, потребуется учитывать и g_2 .

Замечание. Способ численного интегрирования уравнения (2.1) изложен в книге Л. Г. Лойцянского [3]. Можно указать также следующий приближенный способ нахождения g , основанный на формулах

$$G = \frac{1}{g_w^2} \int_u^1 \int_0^u \frac{f u}{G} du du \quad (3.2)$$

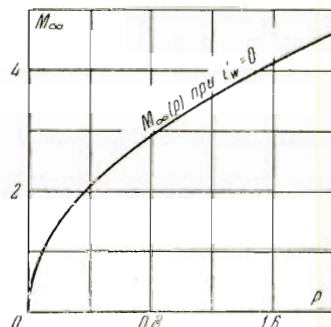
$$g_w^2 = \int_0^1 \int_0^u \frac{f u}{G} du du \quad (3.3)$$

Если в (3.3) заменить G на G_* , то ошибки уменьшатся в результате интегрирования и уполовинятся при извлечении корня. Полученный результат можно уточнить, вычисляя по (3.2) G (G_2 на фиг. 1 для $f = f_1$) и подставляя его вновь в (3.3). Однако этот способ значительно уступает первому в точности (по первому приближению $g_w = 0.388$ для $f = f_1$) и связан, кроме того, с вычислением несобственных интегралов, так как внутренний интеграл расходится при $u \rightarrow 1$.

Поступила 1 XII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. М у р. Решение уравнений ламинарного пограничного слоя для сжимаемого газа. Механика, № 5, 1953. Сб. переводов иностранной периодики. Москва.
2. Ч е п м е н и Р у б е з и н. Пограничный слой на пластине с распределением температуры вдоль поверхности. Механика, № 4, 1950. Сб. переводов иностранной периодики. Москва.
3. Л о й ц я н с к и й. Механика жидкостей и газов, § 90. Гос. изд-во технической литературы, М.—Л., 1950.
4. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, т. I, под ред. Хоурта. ИИЛ, М., 1955.



Фиг. 4