

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОГО КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ДУГИ

Г. Н. Пыхтеев

(Москва)

Схема Гильбарга-Эфроса^[1,2] представляет собой модель кавитационного течения с возвратной струей, втекающей внутрь каверны.

Схема Гильбарга-Эфроса хорошо согласуется с экспериментом и наблюдениями^[3-7].

В настоящей работе рассматривается обратная задача о вычислении формы профиля по заданному распределению скорости. Такого рода задачи возникают на практике при проектировании рациональной формы лопастей турбин и насосов с высокими кавитационными качествами^[8-10].

§ 1. Подстановка задачи. Рассмотрим отрывное кавитационное обтекание некоторой криволинейной симметричной дуги L_z плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости по схеме Гильбарга-Эфроса, изображенной на фиг. 1. Величину скорости невозмущенного потока, длину дуги L_z , значение потенциала скорости в точках отрыва и модуль скорости на свободных струях обозначим соответственно буквами V_∞ , $2S_0$, φ_0 и V_0 .

Пусть на обтекаемой дуге L_z задано распределение модуля скорости в виде функций дуговой абсциссы

$$V = V_0 f(s) \quad (s = S/S_0, 0 \leq s \leq 1). \quad (1.1)$$

Требуется определить форму контура L_z и форму свободных струй.

Функцию $f(s)$ будем считать однозначной, положительной, удовлетворяющей условию Гельдера, а также условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Комплексный потенциал скорости $W = \varphi + i\psi$ в точке O разветвления потока примем равным нулю; тогда будем иметь

$$\varphi = V_0 S_0 \int_0^s f(s) ds, \quad \psi = 0 \quad \text{на } L_z, \quad \varphi = \varphi_0 + V_0 S_0 (s - 1), \quad \psi = 0 \quad \text{на струях}$$

Таким образом, с математической точки зрения наша задача представляет собой обратную краевую задачу для аналитической функции $W(z)$, определенной на двулистной римановой поверхности, имеющей логарифмическую особенность и полюс в бесконечно удаленной точке первого листа и логарифмическую особенность в бесконечно удаленной точке контура на втором листе, причем ищется двулистное решение.

Имеющиеся решения обратных краевых задач, полученные в основном в работах Г. Г. Тумашева и его учеников^[13,14], относятся к случаю однолистных решений.

§ 2. Построение общего решения. Найдем функцию $W(\zeta)$, отображающую область изменения W на верхнюю полуплоскость вспомогательного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ с соответствием точек, указанным на фиг. 1, 2. Для этой цели строим в плоскости ζ функцию $dW/d\zeta$ по ее нулям и полюсам:

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{\varphi_0}{A} 2 \frac{\zeta(\zeta^2 + b^2)}{(\zeta^2 + a^2)^2} \quad (2.1)$$

Отсюда имеем

$$W = \frac{\varphi_0}{A} \left[\ln \left(1 + \frac{\zeta^2}{a^2} \right) - \frac{(a^2 - b^2)\zeta^2}{a^2(a^2 + \zeta^2)} \right] \quad (2.2)$$

и

$$A = \ln \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) - \frac{a^2 - b^2}{a^2(1 + a^2)} \quad (2.3)$$

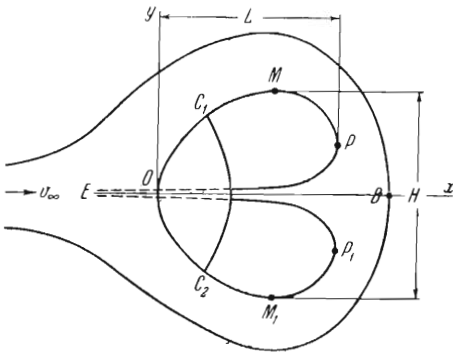
Из (1.1) и (2.1) найдем зависимость $s = s(\xi)$, дающую соответствие между точками дуги L_z и точками отрезка $(-1, 1)$ оси ξ плоскости ζ :

$$\frac{\varphi_0}{A} \left[\ln \left(1 + \frac{\xi^2}{a^2} \right) - \frac{(a^2 - b^2)\xi^2}{a^2(a^2 + \xi^2)} \right] = V_0 S_0 \int_0^s f(s) ds \quad (2.4)$$

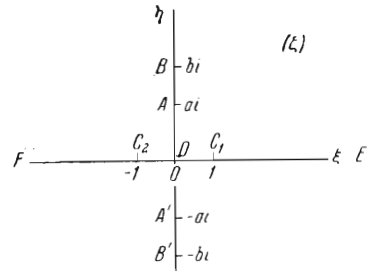
Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(\zeta) = \ln \frac{1}{V_0} \frac{dW}{dZ} - \ln \frac{bi - \zeta}{bi + \zeta} \quad (2.5)$$

Заметив, что на отрезках $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ оси ξ $\text{Re} \Phi(\zeta) = 0$, продолжаем $\Phi(\zeta)$ на всю плоскость ζ по принципу симметрии и убеждаемся, что всюду вне отрезка $(-1, 1)$ оси ξ она будет аналитической



Фиг. 1



Фиг. 2

и не имеющей особенностей, предельные значения которой на оси ξ связаны следующим соотношением:

$$\Phi^+(\xi) + \Phi^-(\xi) = C(\xi) = \begin{cases} 2 \ln f[s(\xi)] & \text{для } |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{для } |\xi| \geq 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

где $s(\xi)$ находится из (2.4).

Для определения функции $\Phi(\zeta)$ мы приходим, таким образом, к задаче Римана, полное и эффективное решение которой было впервые дано Ф. Д. Гаховым [15]. Используя формулы Ф. Д. Гахова, имеем

$$\Phi^+(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln f}{t - \zeta} dt \quad (2.7)$$

Функцию $Z(\zeta)$, отображающую область течения на плоскость ζ , легко определить теперь из соотношений (2.5) и (2.1):

$$Z(\zeta) = -\frac{2\varphi_0}{AV_0} \int \frac{\zeta(\zeta + bi)^2}{(\zeta^2 + a^2)^2} \exp[-\Phi^+(\zeta)] d\zeta + \text{const} \quad (2.8)$$

Отделяя в (2.8) действительную и мнимую части и переходя к пределу при $\zeta \rightarrow \xi$, получим уравнение контура

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{2\varphi_0}{AV_0} \int_0^\xi \frac{\xi(\xi^2 + b^2)}{f|s(\xi)|(\xi^2 + a^2)^2} \cos \left[J(\xi) - \text{arc tg} \frac{2b\xi}{b^2 - \xi^2} \right] d\xi \\ y(\xi) &= \frac{2\varphi_0}{AV_0} \int_0^\xi \frac{\xi(\xi^2 + b^2)}{f|s(\xi)|(\xi^2 + a^2)^2} \sin \left[J(\xi) - \text{arc tg} \frac{2b\xi}{b^2 - \xi^2} \right] d\xi \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$J(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln f}{t - \xi} dt, \quad |\xi| \leq 1 \quad (2.10)$$

и уравнение струй

$$\begin{aligned} x(\xi) &= x_0 + \frac{2\varphi_0}{AV_0} \int_1^\xi \frac{\xi(\xi^2 + b^2)}{(\xi^2 + a^2)^2} \cos \left[J_0(\xi) - \text{arc tg} \frac{2b\xi}{b^2 - \xi^2} \right] d\xi \\ y(\xi) &= y_0 + \frac{2\varphi_0}{AV_0} \int_1^\xi \frac{\xi(\xi^2 + b^2)}{(\xi^2 + a^2)^2} \sin \left[J_0(\xi) - \text{arc tg} \frac{2b\xi}{b^2 - \xi^2} \right] d\xi \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$J_0(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln f}{t - \xi} dt, \quad |\xi| \geq 1 \quad (2.12)$$

где x_0, y_0 — координаты точки отрыва струи.

§ 3. Необходимые условия существования решения и определение параметров a и b . Для того, чтобы полученное решение имело физический смысл, мы должны потребовать, чтобы выполнялись условия

$$\left(\frac{dW}{dZ} \right)_{\zeta=ai} = V_\infty, \quad [\varphi(s)]_{s=1} = \varphi_0 \quad (3.1)$$

Для однозначности $Z(\zeta)$ необходимо, чтобы вычет $dz/d\zeta$ в точке $\zeta = ai$ равнялся нулю, т. е.

$$\frac{dG(a)}{da} = \frac{2}{a+b}, \quad G(a) = \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln f}{t^2 + a^2} dt \quad (3.2)$$

Условия (3.1) равносильны условиям

$$G(a) = \ln \frac{V_\infty}{V_0} \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \quad (3.3)$$

$$\varphi_0 = V_0 S_0 \int_0^1 f(s) ds \quad (3.4)$$

Равенства (3.2)–(3.4) не накладывают на функцию $f(s)$ новых ограничений, так как первые два из них являются уравнениями для определения параметров a и b по заданному числу кавитации $\kappa = (V_0/V_\infty)^2 - 1$, а последнее — уравнением для определения величины φ_0 по заданной длине дуги S_0 .

Дифференцирование $G(a)$ по a в равенстве (3.2) законно, так как подынтегральная функция и ее производная по a непрерывны, а особенность при $t=0$ легко исключается способом, указанным в § 5.

§ 4. **Определение размеров области кавитации и сопротивления контура.** Следуя М. И. Гуревичу^[4], будем называть длиной области кавитации L расстояние от точки P струи, имеющей максимальную абсциссу, до касательной в критической точке O контура, а шириной области кавитации H будем называть расстояние между касательными, проведенными из точек M и M_1 струй, имеющих максимальную ординату (фиг. 1). Пусть l и m — точки оси ξ плоскости ζ , соответствующие точкам P и M , тогда

$$\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\xi=l} = 0, \quad \left(\frac{dy}{d\xi}\right)_{\xi=m} = 0$$

откуда имеем для определения l и m два уравнения:

$$J_0(l) - \text{arc tg } \frac{2bl}{b^2 - l^2} = \frac{\pi}{2}, \quad J_0(m) - \text{arc tg } \frac{2bm}{b^2 - m^2} = 0 \quad (4.1)$$

После того как определены l и m , находим L и H по формулам

$$L = x(l), \quad H = 2y(m) \quad (4.2)$$

где $x(l)$ и $y(m)$ находятся из равенств (2.11).

Для сопротивления R искомого контура при помощи интеграла Бернулли получаем выражение

$$R = \rho V_0^2 S_0 \int_0^1 [1 - f^2(s)] \sin \vartheta(s) ds \quad (4.3)$$

которое при переходе от s к ξ принимает вид:

$$R = \frac{2\rho V_0 \varphi_0}{A} \int_0^1 \frac{(1 - f^2[s(\xi)]) \xi (\xi^2 + b^2)}{f[s(\xi)] (\xi^2 + a^2)^2} \sin \left[J(\xi) - \text{arc tg } \frac{2b\xi}{b^2 - \xi^2} \right] d\xi \quad (4.4)$$

§ 5. **Вычисление интегралов $J(\xi)$, $J_0(\xi)$, $G(a)$.** Для вычисления интегралов $J(\xi)$, $J_0(\xi)$ и $G(a)$ применяем метод, состоящий в том, что осуществляется переход от переменных t , ξ (или t , a) к переменным φ и θ при помощи некоторого преобразования

$$t = t(\varphi), \quad \xi = \xi(\theta) \quad (5.1)$$

которое выбирается таким образом, чтобы после разложения некоторой функции, стоящей под интегралом, в ряд Фурье вычисление искомого интеграла свести к вычислению интегралов

$$J_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi d\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} = \frac{\pi \sin n\theta}{\sin \theta}, \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi d\varphi}{\cos \varphi - \text{ch } \theta} = \frac{\pi e^{-n\theta}}{\text{sh } \theta}$$

$$j_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi d\varphi}{\cos \varphi + \text{ch } \theta} = (-1)^n \frac{\pi e^{-n\theta}}{\text{sh } \theta}$$

Заметим, что интеграл J_n получен в работах^[11,12], интеграл I_n — в работе^[12], а интеграл j_n легко получить тем же способом, каким найден интеграл I_n в работе^[12]. Преобразование (5.1) берем для интеграла $J(\xi)$ в виде

$$t = \cos \varphi, \quad \xi = \cos \theta \quad (5.2)$$

а для интеграла $J_0(\xi)$ в виде

$$t = \cos \varphi, \quad \xi = \text{ch } \theta \quad (5.3)$$

При вычислении $G(a)$ преобразование (5.1) возьмем в виде

$$t = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad a = \text{sh } \frac{\theta}{2} \quad (5.4)$$

Подинтегральные функции рассматриваемых интегралов имеют логарифмическую особенность в точке $t = 0$, которая лишает возможности произвести разложение в ряд Фурье. Эту особенность исключаем при помощи следующих соотношений:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \ln |\cos \varphi|}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \ln (1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi \quad (5.5)$$

(знак плюс для $0 < \theta < \frac{1}{2} \pi$, знак минус для $\frac{1}{2} \pi < \theta < \pi$)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \ln |\cos \varphi|}{\cos \varphi - \operatorname{ch} \theta} d\varphi = \operatorname{arc} \cos \operatorname{th} \theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \ln (1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi - \operatorname{ch} \theta} d\varphi \quad (5.6)$$

$$\frac{a}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \ln |\cos \varphi|}{\cos^2 \varphi + a^2} d\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{a^2 + 1} - 1}{\sqrt{a^2 + 1} + 1} \right) + \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \ln (1 + \sin \varphi)}{\cos^2 \varphi + a^2} d\varphi \quad (5.7)$$

Опуская для краткости промежуточные выкладки, сформулируем окончательный результат.

Пусть $f_0(\theta)$ — функция, определяемая равенством

$$f_0(\theta) = \frac{f[s(\xi)]}{|\xi^{\nu}|} = \frac{f[s(\cos \theta)]}{|\cos^{\nu} \theta|} \quad (5.8)$$

где ν — порядок нуля скорости в точке O , и пусть

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \chi(\varphi) \sin(2n-1)\varphi d\varphi, \quad \chi(\theta) = \ln [f_0(\theta)(1 + \sin \theta)^{\nu}] \quad (5.9)$$

Тогда

$$J(\xi) = \pm \frac{\pi \nu}{2} - \sum_1^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)\theta, \quad \xi = \cos \theta \quad (5.10)$$

(знак плюс для $0 < \theta < \frac{1}{2} \pi$, знак минус для $\frac{1}{2} \pi < \theta < \pi$)

$$J_0(\xi) = \nu \operatorname{arc} \cos \operatorname{th} \theta - \sum_1^{\infty} a_{2n-1} e^{-(2n-1)\theta}, \quad \xi = \operatorname{ch} \theta \quad (5.11)$$

$$G(a) = \frac{\nu}{2} \ln \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{\sqrt{1+a^2}+1} + \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} a_{2n-1} \nu^{2n-1}, \quad \nu = \frac{1}{a + \sqrt{1+a^2}} \quad (5.12)$$

§ 6. Решение обратной задачи для одного частного случая задания скорости. Пусть на искомой дуге

$$V = V_0 \frac{\operatorname{tg} \delta(s)}{\operatorname{tg} \delta(1)} \quad (6.1)$$

где функция $\delta(s)$ определяется уравнением

$$C\delta + D \sin 2\delta = s \quad (C, D = \text{const}) \quad (6.2)$$

Видим, что $f(s) = \operatorname{tg} \delta(s) \operatorname{tg}^{-1} \delta(1)$, и, подставляя это выражение в (2.4) и (3.4), имеем

$$\frac{\varphi_0}{A} \left[\ln \left(1 + \frac{\xi^2}{a^2} \right) - \frac{\xi^2 (a^2 - b^2)}{a^2 (a^2 + \xi^2)} \right] = \frac{V_0 S_0}{\operatorname{tg} \delta(1)} \left[\left(\frac{C}{2} - D \right) \ln (1 + \operatorname{tg}^2 \delta) + \frac{2D \operatorname{tg}^2 \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \right]$$

$$\varphi_0 = V_0 S_0 \operatorname{tg} \delta(1) \left[\left(D - \frac{C}{2} \right) \ln \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta(1)} + \frac{2D \operatorname{tg}^2 \delta(1)}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta(1)} \right]$$

Положим постоянные C и D равными

$$C = \frac{(b^2 + a^2)(1 + a^2)}{(b^2 + a^2)(1 + a^2) \operatorname{arctg} a^{-1} + a(b^2 - a^2)}, \quad D = \frac{1/2(b^2 - a^2)(1 + a^2)}{(b^2 + a^2)(1 + a^2) \operatorname{arctg} a^{-1} + a(b^2 - a^2)}$$

тогда, учитывая (6.2), получим

$$\operatorname{tg} \delta(1) = \frac{1}{a}, \quad \varphi_0 = \frac{a^3(1 + a^2)AV_0S_0}{(a^2 + b^2)(1 + a^2) \operatorname{arctg} a^{-1} + a(b^2 - a^2)} \quad (6.3)$$

$$f(s) = \xi = \cos \theta$$

Сравнивая (6.3) с (5.8), (5.9), видим, что в данном случае

$$\nu = 1, \quad f_0(\theta) = 1, \quad \chi(\theta) = \ln(1 + \sin \theta),$$

$$a_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \frac{2}{(2n-1)^2\pi} + \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^m}{2m-1}$$

Ряды (5.10) — (5.12) для данного случая a_{2n-1} просуммированы нами в конечном виде. Опуская промежуточные выкладки, напомним окончательный результат:

$$J(\xi) = \pm \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{4} \pi N(\cos \theta), \quad \xi = \cos \theta$$

$$J_0(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{arccos} \operatorname{th} \theta + \frac{1}{4} \pi N(\operatorname{ch}^{-1} \theta), \quad \xi = \operatorname{ch} \theta \quad (6.4)$$

$$G(a) = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{2a} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} a^{-1} \ln a + \frac{1}{\pi} L(\operatorname{arctg} a^{-1}) + \frac{1}{\pi} L(\operatorname{arctg} a) \quad (6.5)$$

где функции $N(\tau)$ и $L(\tau)$ определяются интегралами

$$N(\tau) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} d\tau, \quad L(\tau) = - \int_1^{\tau} \ln \cos \tau d\tau$$

Первая функция $N(\tau)$ протабулирована [17], а вторая функция $L(\tau)$ есть функция Лобачевского. Подставляя (6.4) и (6.5) в (2.9), (2.11), (3.2), (3.3) и (4.1), находим уравнение контура

$$x(\xi) = \frac{2\varphi_0}{AV_0} \int_0^{\xi} \frac{\xi^2 + b^2}{(\xi^2 + a^2)^2} \sin \left[\frac{\pi}{4} N(\xi) + \operatorname{arctg} \frac{2b\xi}{b^2 - \xi^2} \right] d\xi$$

$$y(\xi) = \frac{2\varphi_0}{AV_0} \int_0^{\xi} \frac{\xi^2 + b^2}{(\xi^2 + a^2)^2} \cos \left[\frac{\pi}{4} N(\xi) + \operatorname{arctg} \frac{2b\xi}{b^2 - \xi^2} \right] d\xi$$

уравнение струй

$$x(\xi) = x_0 + \frac{2\varphi_0}{2V_0} \int_1^{\xi} \frac{\xi(\xi^2 + b^2)}{(\xi^2 + a^2)^2} \cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{1}{\xi} + \frac{\pi}{4} N(\xi^{-1}) - \operatorname{arctg} \frac{2b\xi}{b^2 - \xi^2} \right] d\xi$$

$$y(\xi) = y_0 + \frac{2\varphi_0}{AV_0} \int_1^{\xi} \frac{\xi(\xi^2 + b^2)}{(\xi^2 + a^2)^2} \sin \left[\frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{1}{\xi} + \frac{\pi}{4} N(\xi^{-1}) - \operatorname{arctg} \frac{2b\xi}{b^2 - \xi^2} \right] d\xi$$

уравнения для определения l и m

$$\frac{1}{2} \operatorname{arcsin} l^{-1} + \frac{\pi}{4} N(l^{-1}) - \operatorname{arctg} \frac{2bl}{b^2 - l^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arcsin} m^{-1} + \frac{\pi}{4} N(m^{-1}) - \operatorname{arctg} \frac{2bm}{b^2 - m^2} = 0$$

и уравнения для определения a и b

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{2a} \right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} a^{-1} \ln a + \\ + \frac{1}{\pi} L(\operatorname{arc} \operatorname{tg} a^{-1}) + \frac{1}{\pi} L(\operatorname{arctg} a) = \ln \frac{V_\infty}{V_0} \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \\ \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} a^{-1} = \frac{2\pi a}{a+b} \end{aligned}$$

Для сопротивления найденного контура на основании формулы (4.4) имеем выражение

$$R = \frac{2\rho V_0 \varphi_0}{A} \int_0^1 \frac{(1-t^2)(t^2+b^2)}{(t^2+a^2)^2} \cos \left[\frac{\pi}{4} N(t) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2bt}{b^2-t^2} \right] dt$$

§ 7. Случай задания скорости в параметрической форме. Обтекание пластинки. Иногда зависимость [(1.1) скорости от дуги удобно задавать в параметрической форме

$$V = V_0 F_1(u), \quad S = S_0 F_2(u) \quad (7.1)$$

где u — некоторый параметр, изменяющийся в интервале (u_1, u_2) , а $F_1(u)$, $F_2(u)$ — однозначные положительные функции, удовлетворяющие условию Гельдера, а также условиям

$$F_1(u_1) = F_2(u_1) = 0, \quad F_1(u_2) = F_2(u_2) = 1$$

Эту задачу легко свести к предыдущей.

Действительно, нетрудно видеть, что

$$f(s) = f[s(\xi)] = F_1[u(\xi)], \quad f_0(\theta) = \frac{F_1[u(\cos \theta)]}{|\cos^2 \theta|} \quad (7.2)$$

где зависимость $u(\xi)$ находится из уравнения

$$\frac{\varphi_0}{A} \left[\ln \left(1 + \frac{\xi^2}{a^2} \right) - \frac{(a^2-b^2)\xi^2}{a^2(a^2+\xi^2)^2} \right] = V_0 S_0 \int_{u_1}^u F_1(u) F_2'(u) du \quad (7.3)$$

Для определения φ_0 вместо (3.4) здесь лучше пользоваться равенством

$$\varphi_0 = V_0 S_0 \int_{u_1}^{u_2} F_1(u) F_2'(u) du \quad (7.4)$$

В качестве примера рассмотрим следующий случай задания скорости:

$$\begin{aligned} V = V_0 \frac{(\gamma-u)}{(\gamma+u)} \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}, \quad S = -\frac{S_0}{B} \int_1^u \frac{(\gamma+u)^2 (1+u) u du}{(\delta_1^2-u^2) \sqrt{1-u^2}} \quad (7.5) \\ B = \int_0^1 \frac{(\gamma+u)(1+u) u du}{(\delta_1^2-u^2) \sqrt{1-u^2}} \quad (\gamma, \delta_1 = \text{const}) \end{aligned}$$

Для определения зависимости $u(\xi)$ и величины φ_0 на основании (7.3), (7.4) имеем равенства

$$\begin{aligned} \frac{V_0 S_0}{2B} \left[\ln \frac{\delta_1^2-u^2}{\delta_1^2-1} + \frac{(\gamma^2-\delta_1^2)(1-u^2)}{(\delta_1^2-u^2)(\delta_1^2-1)} \right] = \frac{\varphi_0}{A} \left[\ln \left(1 + \frac{\xi^2}{a^2} \right) - \frac{(a^2-b^2)\xi^2}{a^2(a^2+\xi^2)^2} \right] \\ \varphi_0 = \frac{V_0 S_0}{2B} \left[\ln \frac{\delta_1^2}{\delta_1^2-1} + \frac{\gamma^2-\delta_1^2}{(\delta_1^2-1)\delta_1^2} \right] \end{aligned}$$

Выберем постоянные γ и δ_1 так: $\delta_1^2 = 1 + a^2$, $\gamma^2 = b^2 + 1$; тогда, учитывая (7.2) и (5.9), найдем, что

$$S_0 = 2 \frac{\varphi_0 B}{V_0 A}, \quad a_{2n+1} = -4 \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} (Vb^2+1-b)^{2n-1}, \quad \nu = 1 \quad (7.6)$$

$$f(s) = \frac{(V1+b^2-\sin\theta)\cos\theta}{(V1+b^2+\sin\theta)(1+\sin\theta)}, \quad u(\xi) = \sqrt{1-\xi^2} = \sin\theta$$

$$f_0(\theta) = (1+\sin\theta)^{-1} \frac{V1+b^2-\sin\theta}{V1+b^2+\sin\theta}, \quad \chi(\theta) = \ln \frac{V1+b^2-\sin\theta}{V1+b^2+\sin\theta}$$

Ряды (5.10) — (5.12) в данном случае суммируются:

$$J(\xi) = \pm \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{2b \cos\theta}{b^2 - \cos^2\theta}, \quad \xi = \cos\theta \quad (7.7)$$

$$J_0(\xi) = \arccos \operatorname{th}\theta + 2 \arctg (\sqrt{1+b^2} \operatorname{sh}\theta + b \operatorname{ch}\theta)^{-1}, \quad \xi = \operatorname{ch}\theta$$

$$G(a) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{V1+a^2-1}{V1+a^2+1} \right) + 2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2+1} - \sqrt{b^2+1} + b}{a + \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} - b} \quad (7.8)$$

Подставляя (7.8) в (3.2), (3.3) находим уравнения для a и b

$$\begin{aligned} \left(\frac{a-b}{a+b} \right) \left(\frac{V1+a^2+a+b-V1+b^2}{V1+a^2+a-b+V1+b^2} \right)^2 \sqrt{\frac{V1+a^2-1}{V1+a^2+1}} &= \frac{V_\infty}{V_0} \\ 1 + \frac{2a(a+V1+a^2)(V1+b^2-b)}{a(a+V1+a^2)+b(V1+b^2-b)} &= 2 \frac{a\sqrt{1+a^2}}{a+b} \end{aligned} \quad (7.9)$$

а подставляя (7.7) в (2.9), (2.11), находим уравнение контура

$$x = 0, \quad y = -\frac{2\varphi_0}{AV_0} \int_{1/2\pi}^{\theta} \frac{(V1+b^2+\sin\varphi)^3 (1+\sin\varphi) \sin\varphi}{(\cos^2\varphi+a^2)^2}$$

и уравнение струй

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{2\varphi_0}{AV_0} \left[c_3 \ln \frac{a\sqrt{\xi^2-1}-V1+a^2\xi}{a\sqrt{\xi^2-1}+V1+a^2\xi} - \frac{(c_3^2+a^2)\xi\sqrt{\xi^2-1}}{2a^2(a^2+\xi^2)} + \frac{1}{2} \ln \frac{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}} \right] \\ y(\xi) &= y_0 + \frac{2\varphi_0}{AV_0} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \left[\frac{c_1^2-a^2}{4a^3} (\pi - 2 \arctg \frac{1}{a}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_1^2-a^2}{c_1^3} \arctg \frac{a}{\xi} - \frac{(c_1^2+a^2)(\xi-1)(a^2-\xi)}{2a^2(1+a^2)(a^2+\xi^2)} \right] \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$c_1 = c_2(1+2\sqrt{1+b^2})^{-1/2}, \quad c_2 = 1 + \sqrt{1+b^2}, \quad c_3 = \frac{c_2^2 - a^2(1+2a^2)}{4\sqrt{1+a^2}a^3}$$

Мы видим, что обтекаемый контур есть пластинка, поставленная перпендикулярно потоку. Учитывая зависимости (7.9), при помощи формул (7.6) и (4.4) получаем соотношение между значением потенциала φ_0 и шириной пластинки $2S_0$

$$y_0 = S_0 = \frac{2\varphi_0}{A} \left[\pi + \frac{V_\infty}{V_0} \left(\pi - 2 \arctg \frac{1}{a} \right) + \frac{1+b^2+(1+a^2)(1+2\sqrt{1+b^2})}{a(1+a^2)} \right]$$

и сопротивление пластинки

$$R = \pi \left(1 + \frac{V_\infty}{V_0} \right) \frac{2\varphi_0}{A} \rho V_0 \quad (7.12)$$

Для определения размеров области кавитации найдем l , m из уравнений (4.1), которые в данном случае принимают вид:

$$\arccos \frac{l^2 - (1 + \sqrt{1+b^2})^2}{l^2 + b^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin \frac{(m^2-1)(2\sqrt{1+b^2}+1) - (1+b^2)}{m(m^2+b^2)} = 0$$

Отсюда

$$l = c_2 = 1 + \sqrt{1 + b^2}, \quad m = c_1 = (1 + \sqrt{1 + b^2}) (1 + 2\sqrt{1 + b^2})^{-1/2} \quad (7.13)$$

Подставляя в формулы (7.10) вместо ξ величины l и m из (7.13) согласно равенствам (4.2), получим

$$L = \frac{\varphi_0}{AV_0} \left[\frac{V_\infty}{V_0} \ln \left(\frac{a\sqrt{l^2 - 1} - l\sqrt{1 + a^2}}{a\sqrt{l^2 - 1} + l\sqrt{1 + a^2}} \right) (V\sqrt{l^2 - 1} - l)^2 + \frac{lV\sqrt{l^2 - 1}}{a^2} \right]$$

$$H = \frac{2\varphi_0}{AV_0} \left[\pi + 2 \frac{V_\infty}{V_0} \arctg \frac{a}{m} + \frac{m}{a^2} (4a^2 - 2\sqrt{1 + a^2} + 1) \right] \quad (7.14)$$

Если в формулах (7.10) — (7.14) положить

$$a = \frac{1}{2}(d^{-1} - d), \quad b = \frac{1}{2}(h^{-1} - h), \quad l = \frac{1}{2}(\alpha^{-1} + \alpha), \quad m = \frac{1}{2}(\beta^{-1} + \beta)$$

то они совпадут с соответствующими формулами работы [4]. Заметим, что если в § 1—5 положить $a = b = \infty$, $V_0 = V_\infty$, то получится решение обратной задачи отрывного обтекания по схеме Кирхгофа, данное в работе [16].

Поступила 14 VII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Gilbarg D., Rock D. N. Naval Ordnance Laboratory Memo, 8718, 1945.
2. Эфрос Д. А. Гидродинамическая теория плоского кавитационного течения. ДАН СССР, 1, № 4, 1946.
3. Эфрос Д. А. Построение струйных течений методом электрического моделирования. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1947.
4. Гуревич М. И. Об одной схеме струйного обтекания плоской пластинки. Труды ЦАГИ, № 612, 1947.
5. Гуревич М. И. Некоторые замечания о стационарных схемах кавитационного обтекания пластинки. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1947.
6. Гуревич М. И. Сопротивление цилиндра и клина при малых числах кавитации, Труды Моск. ин-та рыбн. пром. и хоз-ва, вып. 5, 1953.
7. Gilbarg D., Anderson R. A. Influence of atmospheric pressure on... entry of spheres into water., Journ. Applied Physics, 19, 1948.
8. Лесохин А. Ф. Метод расчета лопастей осевых гидротурбин (решетка конечной толщины) ЛПИ, 1946.
9. Гинзбург Б. А. Старицкий В. Г. Применение метода А. Ф. Лесохина к расчету быстроходных осевых насосов. Труды ЛПИ, № 2, 1953.
10. Этинбергер И. Э. Применение метода А. Ф. Лесохина к расчету лопастей рабочего колеса поворотнлопастной гидротурбины с определением кавитационного коэффициента. Инж. сб., т. XXI, 1955.
11. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. ГТТИ, 1949.
12. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. Изд. АН СССР, 1947.
13. Тумашев Г. Г. Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления. Ученые записки КГУ, т. 112, кн. 3, 1952.
14. Нужиин М. Т. О некоторых обратных краевых задачах и их применении к определению формы скручиваемых стержней. Ученые записки КГУ, т. 109, кн. 1, 1949.
15. Гахов Ф. Д. Линейные краевые задачи теории функции комплексного переменного. Изв. ФМО и НИИ ММ при КГУ, т. X, сер. 3, 1938.
16. Пыхтеев Г. Н. К задаче о струйном обтекании криволинейной дуги безграничным и ограниченным потоком идеальной несжимаемой жидкости. ПММ, т. XIX вып. 4, 1955.
17. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. ГТТИ, 1953.