

О ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА, ПЛАВАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ, И О ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ЭТОМ ВОЛНАХ

Э. А. Пержняко

(Москва)

В работе рассматриваются колебания тела, плавающего на поверхности тяжелой жидкости, ограниченной двумя параллельными вертикальными стенками. Эти колебания отличаются от колебаний тела в безграничной жидкости, рассматриваемых в работе Л. Н. Сретенского^[1]: они оказываются не затухающими, почти периодическими. Кроме того, если частота колебаний тела без учета влияния волн равна или близка к одной из частот стоячих волн, то тело начинает совершать биения. При этом амплитуда критической стоячей волны сильно возрастает, и волна также начинает совершать биения так, что в момент, когда тело колеблется с максимальной амплитудой, колебание этой волны затухает, и наоборот.

Происходит перенос энергии с одного колебания на другое. Такое явление наблюдается и в колебаниях твердых систем, например, явление Бернулли^[2].

§ 1. Постановка задачи. Рассматриваем плоское, потенциальное движение тяжелой, бесконечно глубокой массы жидкости, расположенной между двумя вертикальными стенками. Посредине между стенками плавает симметричное относительно вертикали центра тяжести тело.

В начальный момент жидкость находится в полном покое, поверхность ее горизонтальна, а тело находится в равновесии под действием собственного веса и силы Архимеда.

Теперь приподнимем немного это тело, а затем отпустим; тогда оно начнет совершать колебания, приводя в движение окружающую жидкость. Задача состоит в определении этих колебаний, а также в изучении возникающих при этом на поверхности жидкости волн.

Ввиду полной симметрии колебания тела будут вертикальными, и поэтому задача сводится к определению движения центра тяжести тела.

Для решения задачи воспользуемся теорией малых волн; для этого будут изучаться лишь малые колебания тела около положения равновесия, а само тело берется тонким.

Возьмем за ось Ox горизонтальную поверхность невозмущенной жидкости, а ось Oy направим вертикально вверх через центр тяжести тела. В этой системе координат уравнение поверхности тела можно представить в виде $x = \pm \alpha \varphi(y)$, где α — некоторый малый параметр, квадратом которого будем в дальнейшем пренебрегать. Функция $\varphi(y)$ берется произвольной, но удовлетворяющей условию $\varphi(-h) = \varphi'(h) = 0$, где $h(t)$ означает координату наиболее погруженной точки тела в любой момент времени. Тогда, если через h_0 обозначить эту координату в начальный

момент, то $s(t) = -h(t) + h_0$ будет отклонением центра тяжести тела от положения равновесия (s_0 — начальное малое отклонение), а $c(t) = ds/dt$ — скоростью его движения. Расстояние между стенками обозначим через $2l$.

§ 2. Определение потенциала скоростей. Потенциал скоростей движения жидкости находим, решая уравнение Лапласа $\Delta\Phi = 0$ при граничных условиях

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm l \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = +\alpha\varphi'(y) \quad \text{при } x = +0 \text{ и } y > -h(t)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\alpha\varphi'(y) \quad \text{при } x = -0 \text{ и } y > -h(t) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } y < -h(t) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (2.4)$$

и при начальных условиях

$$\Phi(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial\Phi(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

Ищем решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее этим условиям, в виде суммы двух решений $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где функция Φ_1 не учитывает возмущений поверхности и удовлетворяет всем граничным условиям, кроме (2.4), а функция Φ_2 является потенциалом от волн: она удовлетворяет граничным условиям (2.1), (2.3) для всех y и совместно с Φ_1 условию (2.4). Кроме того, Φ_1 и Φ_2 по отдельности удовлетворяют начальным условиям (2.5).

Функцию Φ_1 находим, заменяя тело линейным распределением источников с интенсивностью, определяемой из (2.2). Комплексный потенциал такого распределения источников, если предположить, что жидкость простирается бесконечно в обе стороны, будет

$$W_1 = \frac{\alpha c}{\pi} \int_{-h(t)}^0 \varphi'(h) \ln(z - hi) dh \quad (2.6)$$

Для выполнения условия (2.1) разместим на расстоянии $2l$ одна от другой бесконечно в обе стороны от Oy такие же системы источников и для удобства вычислений добавим к ним симметричные системы в верхней полуплоскости с интенсивностью противоположного знака. Тогда, что легко проверить, поверхность жидкости будет оставаться все время горизонтальной.

В результате выражение для комплексного потенциала W_1 имеет вид:

$$W_1 = \frac{\alpha c}{\pi} \int_{-h_0}^0 \varphi'(h) \ln \frac{\sin \frac{z-hi}{2l}}{\sin \frac{z+hi}{2l}} dh \quad (2.7)$$

Здесь, пользуясь малостью s , c и α , мы вместо функции $-h(t)$ взяли в качестве нижнего предела интеграции постоянную $-h_0$.

Подставляя найденное значение $\Phi_1 = \text{Re}W_1$ в (2.4), получим условие для Φ_2 на поверхности жидкости

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = \frac{\alpha c(t)g}{\pi} \int_{-h_0}^0 \varphi'(h) \frac{\text{sh } h\pi/l}{\text{ch } h\pi/l - \cos \pi/l} dh \quad (2.8)$$

Ищем гармоническую функцию Φ_2 в виде ряда

$$\Phi_2 = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos \frac{\pi n x}{l} \exp \frac{\pi n y}{l} \quad (2.9)$$

Для определения $a_n(t)$ подставляем выражение (2.9) в условие (2.8) и раскладываем правую часть (2.8) в ряд Фурье (при этом предполагаем, что $\varphi'(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, как h^γ , где $\gamma > 0$).

Тогда условие (2.8) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{l} \left(\frac{\partial^2 a_n}{\partial t^2} + \frac{g \pi n a_n}{l} \right) = -g c(t) \alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{\pi n x}{l}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-h_0}^0 \varphi'(h) \exp \frac{\pi n h}{l} dh \quad (2.10)$$

Из уравнения (2.10) имеем

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 a_n + \alpha g c(t) b_n = 0 \quad \left(\omega_n^2 = \frac{g \pi n}{l} \right) \quad (2.11)$$

Начальными условиями для $a_n(t)$ являются условия (2.5), так как в выражении (2.9) от времени зависит только $a_n(t)$.

Для $a_n(t)$ тогда получим

$$a_n(t) = -\alpha g b_n \int_0^t \frac{c(\tau) \sin \omega_n(t-\tau)}{\omega_n} d\tau \quad (2.12)$$

Искомый комплексный потенциал $W = W_1 + W_2$ будет

$$W = \frac{\alpha c}{\pi} \int_{-h_0}^0 \varphi'(h) \ln \frac{\sin \frac{z-hi}{2l}}{\sin \frac{z+hi}{2l}} dh - \alpha g \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp \left(-\frac{i \pi n z}{l} \right) \int_0^t \frac{c(\tau) \sin \omega_n(t-\tau)}{\omega_n} d\tau$$

§ 3. Составление и решение уравнения движения. С принятой степенью точности вертикальная составляющая сил давления жидкости p на погруженное тело будет

$$Y = 2\alpha \int_{-h(t)}^0 p \varphi'(y) dy \quad \left(\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - gy \right) \quad (3.1)$$

Подставляя сюда $\Phi = \text{Re} W$ (из 2.13), получим с точностью до малых более высокого порядка

$$Y = Q - 2\alpha \rho g \varphi(0) s(t) - M_1 s''(t) - \alpha^2 \rho g l \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 c(\tau) \cos \omega_n(t-\tau) d\tau$$

где

$$M_1 = \frac{2\alpha^2 \rho}{\pi} \int_{-h_0}^0 \int_{-h_0}^0 \varphi'(y) \varphi'(h) \ln \left| \frac{\text{sh} \frac{(y+h)\pi}{2l}}{\text{sh} \frac{(y-h)\pi}{2l}} \right| dh dy \quad (3.2)$$

Здесь M_1 представляет присоединенную массу, первые два члена — силу Архимеда (Q — вес тела), последний же член учитывает влияние волн.

Теперь составляем уравнение движения центра тяжести тела.

$$M \frac{d^2 s}{dt^2} + M \Omega^2 s(t) = - M \varepsilon(\alpha) \int_0^t c(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \cos \omega_n(t - \tau) d\tau$$

где

$$\begin{aligned} M &= M_1 + m && (m - \text{масса тела}) \\ \Omega^2 &= \frac{2\alpha \rho g \varphi(0)}{M} && (\text{квадрат частоты колебания тела без учета влияния волн}) \\ \omega_n^2 &= \frac{g \pi n}{l} && (\text{квадрат частот стоячих волн}) \\ \varepsilon(\alpha) &= \frac{\alpha^2 \rho g l}{M} && (\text{величина порядка } \alpha) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Преобразуя правую часть (3.3) интегрированием по частям и принимая следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k^2 &= 2\Omega^2 + \varepsilon(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2, && p(t) = \varepsilon(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \cos \omega_n t \\ K(t - \tau) &= \varepsilon(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \omega_n \sin \omega_n(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.4)$$

уравнение движения центра тяжести тела можно записать в таком виде:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + k^2 s - \int_0^t K(t - \tau) s(\tau) d\tau = s_0 p(t) \quad (3.5)$$

Умножим обе части (3.5) на e^{-tz} и проинтегрируем по t от 0 до ∞ . Меняя порядок интегриации в последнем слагаемом левой части и делая замену $u = t - \tau$ во внутреннем интеграле, удастся двойной интеграл преобразовать в произведение двух простых. Тогда после элементарных преобразований уравнение (3.5) примет вид:

$$s_0 z + (z^2 + k^2) \int_0^{\infty} s(t) e^{-tz} dt - \int_0^{\infty} s(\tau) e^{-\tau z} \int_0^{\infty} K(u) e^{-uz} du = s_0 \int_0^{\infty} p(t) e^{-tz} dt \quad (3.6)$$

Введем обозначение

$$P(z) = \int_0^{\infty} p(u) e^{-uz} du = \varepsilon(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2 z}{z^2 + \omega_n^2} \quad (3.7)$$

Замечая из (3.4), что $K(u) = p'(u)$ и $p(0) = k^2 - \Omega^2$, из уравнения (3.6) получим

$$\int_0^{\infty} s(t) e^{-tz} dt = s_0 \frac{z + P(z)}{z^2 + zP(z) + \Omega^2}$$

Тогда $s(t)$ выразится следующим контурным интегралом:

$$s(t) = \frac{s_0}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{zt} \frac{z + P(z)}{z^2 + zP(z) + \Omega^2} dz \quad (3.8)$$

Прямая интеграция $\text{Re } z = \sigma$ расположена правее всех особых точек подынтегральной функции.

Под интегралом стоит мероморфная функция; ее полюсы будут расположены в точках, в которых знаменатель обращается в нуль.

Легко проверить, что корни знаменателя чисто мнимые и простые. Для последнего утверждения достаточно продифференцировать знаменатель и убедиться, что полученное выражение не имеет мнимых корней.

Тогда выражение (3.8), используя теорему о вычетах и лемму Жордана, можно записать в виде

$$s(t) = s_0 \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{res}_{z = \pm iK_n} e^{zt} \frac{z + P(z)}{z^2 + zP(z) + \Omega^2} \quad (K_n - \text{корни знаменателя}) \quad (3.9)$$

Здесь в каждом слагаемом от времени будет зависеть только множитель $e^{\pm iK_n t}$ и, следовательно, движение тела будет складываться из гармонических косинусоидальных колебаний с частотами K_n . Отсюда следует, что движение тела представляет собой почти периодическую функцию, т. е. для любого ε она имеет почти период так, что течение функции через каждый такой почти период повторяется с точностью до ε [4].

Амплитуды слагаемых гармонических колебаний будут

$$A_n = s_0 \frac{z + P(z)}{z + P(z) + zP'(z)} \quad \text{при } z = iK_n$$

где $P(z)$ — согласно (3.7). Учитывая, что $z = iK_n$ есть корни знаменателя (3.9), и делая замену $z^2 = -\zeta$, получим

$$A_n(\zeta) = s_0 \left(1 + \zeta^2 \frac{2\varepsilon(\alpha)}{\Omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{(\omega_n^2 - \zeta)^2} \right)^{-1} \quad \text{при } \zeta = K_n^2 \quad (3.10)$$

§ 4. Исследование колебаний тела. При исследовании колебаний тела нужно различать два случая. В первом случае частота Ω не равна и не близка ни к одной из частот ω_n стоячих волн. Во втором же случае $\Omega^2 - \omega_n^2$ представляет собой величину порядка α или выше.

Первый случай. Постараемся сначала представить себе качественную картину движения тела. Квадраты частот K_n^2 слагаемых гармонических колебаний есть корни уравнения

$$\frac{\zeta - \Omega^2}{\zeta} + \varepsilon(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{\omega_n^2 - \zeta} = 0 \quad (4.1)$$

т. е. они расположены в точках пересечения кривых (фиг. 1)

$$F_1(\zeta) = \frac{\zeta - \Omega^2}{\zeta}, \quad F_2(\zeta) = \varepsilon(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{\zeta - \omega_n^2}$$

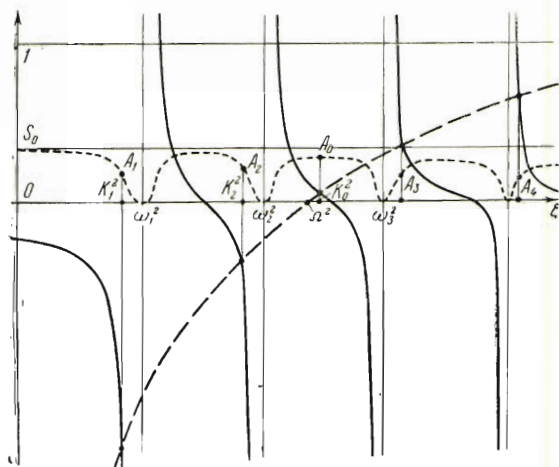
(на чертеже $F_2(\zeta)$ представлено сплошной линией, а $F_1(\zeta)$ — пунктирной).

Кривая $F_2(\zeta)$ ввиду малости α проходит близко от оси ζ и от своих асимптот.

При увеличении расстояния $2l$ между стенками расстояние между асимптотами кривой $F_2(\zeta)$ уменьшается. Аналогичное явление наблюдаем при уменьшении обобщенной массы M тела, так как в этом случае расстояние между асимптотами кривой $F_2(\zeta)$ не изменится, а точка Ω^2 перемещается вправо.

На фиг. 1 нанесена также функция $A_n(\zeta)$ из (3.10), которая для частот K_n дает соответствующие амплитуды. (На графике $A_n(\zeta)$ представлено точечным пунктиром.)

Из графика видно, что наибольшая амплитуда A_0 , немного меньшая s_0 , будет у колебания с частотой K_0 , близкой к Ω . Назовем его основным. Если $F_1(\zeta)$ пересечется с отрицательной ветвью $F_2(\zeta)$, то частота основного колебания будет меньше Ω . Так как при этом в $F_2(\zeta)$ преобладают отрицательные члены, т. е. волны с частотами, большими Ω , то, следовательно, волны с более высокими частотами, чем Ω , уменьшают последнюю. Аналогично волны с более низкими частотами увеличивают основную частоту колебания тела.



Фиг. 1

Бывают случаи, когда Ω совсем не изменяется (если Ω^2 равна значению ζ в точке пересечения $F_2(\zeta)$ с осью ζ). В этом случае влияние волн с более высокой частотой компенсируется влиянием волн с более низкой частотой.

На это основное колебание будет накладываться бесконечное множество дополнительных колебаний с частотами, близкими к частотам стоячих волн, и с малыми амплитудами. Причем эти амплитуды увеличиваются при приближении частоты дополнительного колебания к частоте основного колебания тела. Кроме того, амплитуды дополнительных колебаний уменьшаются с увеличением их частот.

Для данного тела с уменьшением расстояния между стенками $2l$ (или при постоянном l с увеличением массы тела M) число дополнительных колебаний с частотами более низкими, чем частота основного колебания, уменьшается и, наконец, при

$$l < \frac{\pi M}{2\alpha\rho g\varphi(0)}, \text{ или } M > \frac{2\alpha\rho g l \varphi(0)}{\pi}$$

их совсем не будет.

При дальнейшем уменьшении l , расстояние между асимптотами кривой $F_2(\zeta)$ будет все увеличиваться, а сама кривая будет все плотнее прилегать к оси $O\zeta$ и к своим асимптотам, так как в выражение $F_2(\zeta)$ входит множитель l (при стремлении l к нулю b_n стремится к определенному пределу). При этом, как видно из фиг. 2, амплитуда основного колебания будет стремиться к s_0 , а его частота к Ω , амплитуды же дополнительных колебаний будут уменьшаться, а частоты их увеличиваться.

Следовательно, при очень малых l (или больших M) влияние волн становится еле заметным и сказывается лишь в мелком дрожании тела.

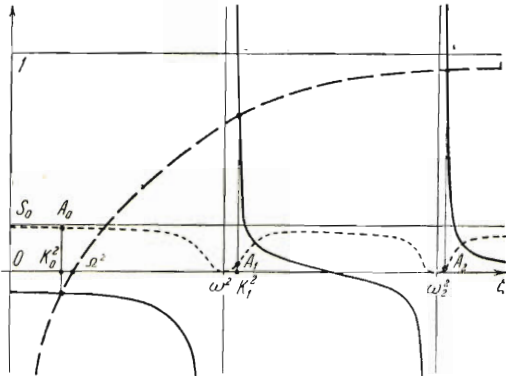
В этом случае колеблющееся тело почти не передает своей энергии жидкости.

Теперь попытаемся найти непосредственные значения частот и амплитуд гармонических колебаний, из которых складывается колебание тела, и тем самым найти количественное выражение для перемещения тела.

Для нахождения частот нужно решить уравнение (4.1). Учтем в этом уравнении сначала только первый член ряда, отвечающий влиянию первой стоячей волны. Тогда с принятой степенью точности его корни будут

$$\zeta_0 = \Omega^2 \left[1 - \frac{\varepsilon(\alpha) b_1^2}{\omega_1^2 - \Omega^2} \right]$$

$$\zeta_1 = \omega_n^2 \left[1 + \frac{\varepsilon(\alpha) b_1^2}{\omega_1^2 - \Omega^2} \right]$$



Фиг. 2

Теперь предположим, что с учетом всех стоячих волн, т. е. с учетом всех членов ряда в уравнении (4.1), его корни, т. е. квадраты частот слагаемых колебаний тела, будут

$$K_0^2 = \Omega^2 \left[1 - \varepsilon(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right], \quad K_n^2 = \omega_n^2 \left[1 + \frac{\varepsilon(\alpha) b_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right] \quad (4.2)$$

Докажем это методом математической индукции. Сделанное утверждение верно для $n=1$. Предположим, что оно верно для $n=k-1$ стоячих волн, т. е. при учете $k-1$ членов ряда корни уравнения (4.1) будут

$$K_0^{*2} = \Omega^2 \left[1 - \varepsilon(\alpha) \sum_{n=1}^{k-1} \frac{b_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right], \quad K_n^{*2} = \omega_n^2 \left[1 + \frac{\varepsilon(\alpha) b_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right]$$

Тогда оно будет справедливо и для k членов ряда.

Действительно, если теперь в уравнении (4.1) учесть следующий, k -й член ряда, то это уравнение можно записать с принятой степенью точности в виде

$$(\zeta - \omega_k^2)(\zeta - K_0^{*2}) \prod_1^{k-1} (\zeta - K_n^{*2}) - \varepsilon(\alpha) b_k^2 \zeta \prod_1^{k-1} (\zeta - K_n^{*2}) \quad (4.3)$$

Решая это уравнение и пренебрегая в его корнях степенями α^2 , убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Так как ряд в (4.2) равномерно сходится, то индукцию можно распространить на бесконечное число членов. Таким образом, сделанное предположение верно, т. е. квадраты частот слагаемых колебаний тела даются выражениями (4.2).

Подставляя значения этих частот в (3.10), получим соответствующие этим частотам амплитуды. Полученные выражения для амплитуд можно

упростить, раскладывая знаменатель по формуле бинома и оставляя только члены первого порядка α .

Окончательное выражение для перемещения тела в этом случае запишется следующим образом:

$$s(t) = s_0 \left[1 - \varepsilon(\alpha) \Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2} \right] \cos \Omega \left(1 - \frac{\varepsilon(\alpha)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_0 \varepsilon(\alpha) b_n^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2} \cos \omega_n \left(1 + \frac{\varepsilon(\alpha) b_n^2}{2(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right) t \quad (4.4)$$

где Ω, ω_n, b_n согласно (3.3) и (2.10).

Второй случай. Пусть $\Omega^2 - \omega_k^2$ порядка α или выше, или вообще равна нулю. Построим и для этого случая качественный график для оценки частот и амплитуд слагаемых колебаний тела.

Из фиг. 3 видно, что в этом случае амплитуда основного колебания много меньше, чем в первом случае, а амплитуда дополнительного колебания, соответствующего стоячей волне с частотой ω_k , будет одного порядка с амплитудой основного колебания.

Ввиду малости амплитуд других дополнительных колебаний преобладать будут предыдущие два колебания. А так как их частоты и амплитуды близки, они дадут биения.

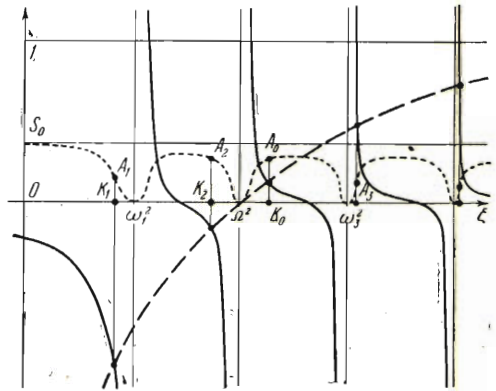
Теперь найдем количественное выражение для перемещения тела.

Уже из выражения (4.4) замечаем, что если Ω приближается к одной из частот стоячих волн, то амплитуда дополнительного колебания тела, вызываемого этой волной, возрастает, а амплитуда основного колебания уменьшается. Но со значительным уменьшением какой-либо из разностей $\omega_k^2 - \Omega^2$ прежние вычисления становятся неверными. Поэтому этот случай нужно рассмотреть особо.

При вычислении частот слагаемых колебаний тела, т. е. при решении уравнения (4.1), учтем в нем сначала только члены ряда, соответствующие некритическим волнам ($n \neq k$). Для них справедливы все прежние рассуждения и выкладки. Затем учтем член от критической волны, тогда уравнение (4.1) можно записать с принятой степенью точности в виде

$$(\zeta - \omega_k^2) (\zeta - K_0^{*2}) \prod_{\substack{n \neq k \\ n=1}}^{\infty} (\zeta - K_n^{*2}) - \varepsilon(\alpha) b_k^{*2} \zeta \prod_{n=1}^{\infty} (\zeta - K_n^{*2}) = 0 \quad (4.5)$$

где K_n^{*2}, K_0^{*2} — корни уравнения (4.1), в котором не учтен член от критической волны. Решая это уравнение, получим значения $K_0^2, K_n^2,$



Фиг. 3

в которых при принятой степени точности нужно пренебречь порядком $\alpha^{3/2}$. Подставляя их в (3.10), найдем соответствующие амплитуды.

Окончательное выражение для перемещения тела, в котором объединены два колебания с близкими частотами и амплитудами, будет

$$s(t) = A^k \cos \frac{K_0 + K_k}{2} t \cos \frac{K_0 - K_k}{2} t + A^k (\alpha^{1/2}) \sin \frac{K_0 + K_k}{2} t \times \\ \times \sin \frac{K_0 - K_k}{2} t + \sum_{\substack{n \neq k \\ n=1}}^{\infty} A_n(\alpha) \cos K_n t$$

где

$$A^k = s_0 \left\{ 1 - (4\varepsilon(\alpha) b_k^2 \Omega^2)^{-1} \left[\omega_k^2 - \Omega^2 + \varepsilon(\alpha) \Omega^2 \left(\sum_{\substack{n \neq k \\ n=1}}^{\infty} \frac{b_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} - \frac{b_k^2}{\Omega^2} \right) \right]^2 - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon(\alpha)}{4} \left(\sum_{\substack{n \neq k \\ n=1}}^{\infty} \frac{b_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} + \frac{b_k^2}{\Omega^2} \right) - \frac{\varepsilon(\alpha) \Omega^2}{2} \sum_{\substack{n \neq k \\ n=1}}^{\infty} \frac{b_n^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2} - \frac{5(\omega_k^2 - \Omega^2)}{4\Omega^2} \right\} \\ A^k (\alpha^{1/2}) = s_0 \left[\frac{\varepsilon^{1/2}(\alpha) \Omega}{2b_k} \left(\sum_{\substack{n \neq k \\ n=1}}^{\infty} \frac{b_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} + \frac{b_k^2}{\Omega^2} \right) + \frac{\omega_k^2 - \Omega^2}{2\varepsilon^{1/2}(\alpha) b_k \Omega} \right] \\ A_n(\alpha) = \frac{s_0 \varepsilon(\alpha) b_k^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad (n \neq k)$$

$$\frac{K_0 + K_k}{2} = \left(\frac{\Omega^2 + \omega_k^2}{2} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{\varepsilon(\alpha)}{4} \left(\sum_{\substack{n \neq k \\ n=1}}^{\infty} \frac{b_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} - \frac{b_k^2}{2\Omega^2} \right) \right] \\ \frac{K_0 - K_k}{2} = \frac{\varepsilon(\alpha) b_k}{2}, \quad K_n = \omega_n \left[1 + \frac{\varepsilon(\alpha) b_n^2}{2(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \quad (n \neq k) \quad (4.6)$$

величины Ω , ω_n , $\varepsilon(\alpha)$, b_n определяются согласно (3.3) и (2.10).

Так как $1/2(K_0 - K_k)$ — величина малая по сравнению с $1/2(K_0 + K_k)$, то мы получили здесь сумму двух биений. Причем, так как $A^k(\alpha)$ величина малая по сравнению с A^k , то преобладать будет первое биение. Другое биение будет слегка изменять фазу и амплитуду первого так, что вместо полного затухания будет колебание с амплитудой $A^k(\alpha^{1/2})$.

Амплитуды дополнительных колебаний от других стоячих волн малы, поэтому они не будут оказывать существенного влияния на характер движения тела: биения останутся и будут сопровождаться легким покачиванием на волнах.

Это возникновение биений физически можно объяснить следующим образом. Сумма энергий жидкости и тела постоянна и равна начальной потенциальной энергии поднятого тела. В случае же, когда частота основного колебания тела близка к одной из частот стоячих волн, происходит своего рода резонанс и энергия передается от тела к жидкости (амплитуда колебаний критической волны, как мы увидим дальше, сильно возрастает). Затем происходит обратный процесс: критическая волна начинает раскачивать тело, так как у нее сравнительно большая амплитуда и частота, близкая к частоте основного колебания тела.

§ 5. Определение профиля волновой поверхности. Найдя выражение для перемещения тела $s(t)$, мы сможем теперь определить потенциал скоростей движения жидкости, вызванного влиянием колеблющегося тела, и профиль волновой поверхности.

Для определения потенциала скоростей нужно в выражение (2.13) подставить значение $c(t) = ds/dt$. При этом в первом случае в $c(t)$ следует отбросить величины порядка α , так как после подстановки они дадут величины порядка α^2 , которые не учитывались при вычислении выражения (2.13); во втором же случае в $c(t)$ оставляем величины порядка $\alpha^{1/2}$, так как они дадут величины порядка α .

Для первого случая, например, мы берем

$$c(t) = -s_0\Omega \sin [\Omega - \varepsilon^*(\alpha)] t, \quad \varepsilon^*(\alpha) = \frac{\Omega\varepsilon(\alpha)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad (5.1)$$

и комплексный потенциал скоростей будет

$$W = -\frac{\alpha s_0 \Omega}{\pi} \sin [\Omega - \varepsilon^*(\alpha)] t \int_{-h_0}^0 \varphi'(h) \ln \frac{\sin \frac{z-hi}{2l}}{\sin \frac{z+hi}{2l}} dh - \alpha g s_0 \Omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\omega_n} \exp\left(-\frac{iz\pi n}{l}\right) \left[\frac{\omega_n}{\Omega^2 - \omega_n^2} \sin (\Omega - \varepsilon^*(\alpha)) t - \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega_n^2} \sin \omega_n t \right] \quad (5.2)$$

Как было показано раньше, возмущения поверхности вызываются только частью Φ_2 общего потенциала скоростей Φ , поэтому уравнение поверхности жидкости можно записать в виде

$$\eta = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right]_{y=0} = -\alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{\pi n}{l} x \int_0^t c(\tau) \cos \omega_k (t - \tau) d\tau \quad (5.3)$$

Подставляя сюда в первом случае $c(t)$ из (5.1), получим окончательное выражение для профиля волновой поверхности:

$$\eta = -\alpha s_0 \Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cos (\pi n x / l)}{\Omega^2 - \omega_n^2} [\cos (\Omega - \varepsilon^*(\alpha)) t - \cos \omega_n t] \quad (5.4)$$

Отсюда видно, что каждое слагаемое колебание поверхности, соответствующее стоячей волне, состоит из двух колебаний: колебания с частотой, равной частоте основного колебания тела, и колебания с частотой, равной собственной частоте этой стоячей волны. Амплитуды этих колебаний равны.

Во втором случае, подставляя в (5.3) значение $c(t)$ из (4.6), в котором оставлены только члены порядка $\alpha^{1/2}$, получим для профиля волновой поверхности

$$\eta = B^k (\alpha^{1/2}) \sin \frac{K_0 + K_k}{2} t \sin \frac{K_0 - K_k}{2} t \cos \frac{\pi k}{l} x + B^k (\alpha) \left[\cos \frac{K_0 + K_k}{2} t \cos \frac{K_0 - K_k}{2} t - \cos \omega_k t \right] \cos \frac{\pi k}{l} x - \sum_{\substack{n \neq k \\ n=1}}^{\infty} B_n (\alpha) \left[\cos \frac{K_0 + K_k}{2} t \cos \frac{K_0 - K_k}{2} t - \cos \omega_n t \right] \cos \frac{\pi n}{l} x \quad (5.5)$$

В формуле (5.5) приняты следующие обозначения

$$B^k(\alpha^{1/2}) = \frac{\alpha s_0 \Omega}{\varepsilon^{1/2}(\alpha)} = s_0 \sqrt{\frac{2\alpha\varphi(0)}{l}} = s_0 \sqrt{\frac{d}{l}} \quad (d - \text{ширина тела при } y=0)$$

$$B^k(\alpha) = \frac{\alpha s_0 (\Omega - \omega_k)(\omega_k - 3\Omega)}{2\varepsilon(\alpha) b_k}, \quad B_n(\alpha) = \frac{\alpha s_0 \Omega b_k}{\Omega^2 - \omega_n^2}$$

величины Ω , ω_n , $\varepsilon(\alpha)$, $1/2(K_0 + K_k)$, $1/2(K_0 - K_k)$ определяются согласно выражениям (3.3), (2.10), (4.6).

Первое слагаемое в (55) представляет собой биение k -й стоячей волны. Ее амплитуда сильно возросла по сравнению с амплитудами других волн и стала порядка $\alpha^{1/2}$. Таким образом, преобладающим колебанием поверхности жидкости будут биения k -й стоячей волны.

В заключение приношу глубокую благодарность Л. Н. Сретенскому, под руководством которого была написана эта работа.

Поступила 23 IX 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. О затухании вертикальных колебаний центра тяжести плавающих тел. Труды ЦАГИ, № 330, 1937.
2. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. ОНТИ, 1936.
3. Леви-Чивита Т. и Амальди У. Курс теоретической механики, т. 2, ч. 1. ИЛ, 1951.
4. Привалов И. И. Ряды Фурье. ОНТИ, 1934.