Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

# О НАПРАВЛЕННОМ ИЗЛУЧЕНИИ ВОЛН ИЗ ОБЛАСТИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ВНЕШНЕМУ ДАВЛЕНИЮ

Л. Н. Сретенский

(Москва)

**§ 1.** Рассмотрим бесконечно глубокую массу жидкости, неограниченно распространяющуюся в горизонтальных направлениях. Допустим, что к поверхности жидкости, на определенной ее части, прикладываются давления, меняющиеся по своей величине с течением времени, следуя гармоническому закону. Наша задача будет заключаться в исследовании тех волн, которые будут при этом распространяться по поверхности жидкости.

Обозначим через $\varphi(x, y, z; t)$ потенциал скоростей; этот потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ и следующему пограничному условию в точках среднего уровня:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad \text{при} \quad z = 0 \tag{1}$$

в бесконечно удаленных частях жидкости, т. е. при $z = -\infty$, мы должны иметь нулевые скорости. По функции $\varphi$ возвышение поверхности жидкости над средним уровнем будет определяться формулой

$$\zeta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{p}{\rho}\right)_{z=0} \tag{2}$$

Будем предполагать, что поверхность жидкости находится вся, за исключением прямоугольника, определяемого неравенствами $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, под постоянным, а именно нулевым, давлением. В точках же указанного прямоугольника к поверхности жидкости приложены давления $p$, определяемые формулой

$$p = p_0 e^{i\omega t}$$

где $p_0$ — некоторая постоянная величина; частота $\omega$ задана.

Чтобы найти соответствующее волновое движение, вызванное принятым периодическим давлением, рассмотрим сначала волны, возникающие от внешнего давления, меняющегося по закону

$$p = Ae^{i\omega t}\cos mx \cos ny$$

где $A$, $m$, $n$ даны.

Соответствующий потенциал скоростей будет определяться такой функцией:

$$\varphi = Be^{i\omega t}\, e^{kz}\cos mx \cos ny \qquad (k = \sqrt{m^2 + n^2})$$

а коэффициент $B$ найдется из граничного условия (1); пользуясь этим условием, мы получаем для $B$ такое выражение:

$$B = \frac{i\omega}{\rho}\frac{A}{gk - \omega^2}$$

Отсюда находим по формуле (2) значение ординаты волновой поверхности:

$$\zeta = -\frac{\omega^2}{\rho g}\frac{Ae^{i\omega t}}{gk-\omega^2}\cos mx \cos ny - \frac{p}{\rho g}$$

Если давление, приложенное к поверхности жидкости, задается функцией $f(x,y)\,e^{i\omega t}$, то, пользуясь интегралом Фурье, можно определить форму открытой поверхности жидкости в таком виде:

$$\zeta(x,\,y;\,t) = -\frac{p}{\rho g} - \frac{\omega^2}{4\pi^2\rho g}e^{i\omega t}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} dm\,dn \iint\limits_{\Omega}\frac{f(\alpha,\beta)}{gk-\omega^2}\cos m(x-\alpha)\cos n(y-\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

Здесь $\Omega$ — та область поверхности жидкости, к которой приложены давления.

В рассматриваемом случае, когда область $\Omega$ есть указанный выше прямоугольник, а функция $f(\alpha,\beta) = p_0 = \text{const}$:

$$\zeta(x,\,y;\,t) = -\frac{p}{\rho g} - \frac{\omega^2 p_0}{\pi^2\rho g}e^{i\omega t}\,S \tag{3}$$

где

$$S = \iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ma \sin nb}{gk-\omega^2}\cos mx \cos ny\,\frac{dm\,dn}{mn} \tag{4}$$

Формулой (3) и решается задача об определении вида поверхности жидкости. Выполним теперь анализ этой формулы.

§ 2. Рассмотрим в формуле (4) интеграл по переменному $n$:

$$S_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nb \cos ny}{gk-\omega^2}\,\frac{dn}{n}$$

Мы можем представить этот интеграл в виде суммы четырех слагаемых

$$S_1 = S_{11} - S_{12} + S_{13} - S_{14} \tag{5}$$

полагая

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{4i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{in(b+y)}\,dn}{n(gk-\omega^2)}, & S_{12} &= \frac{1}{4i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-in(b+y)}\,dn}{n(gk-\omega^2)} \\ S_{13} &= \frac{1}{4i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{in(b-y)}\,dn}{n(gk-\omega^2)}, & S_{14} &= \frac{1}{4i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-in(b-y)}\,dn}{n(gk-\omega^2)} \end{aligned} \tag{6}$$

Прежде чем переходить к исследованию этих интегралов, надо указать точно пути интегрирования.

Во всех четырех интегралах подинтегральные функции имеют полюсы первого порядка в точках

$$n_0 = 0, \qquad n_1 = \sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}, \qquad n_2 = -\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}$$

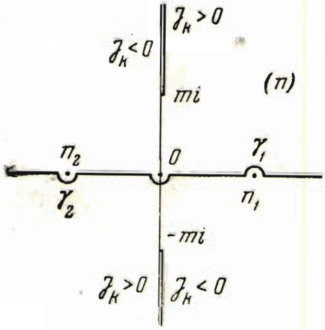
Если $0 < m < \omega^2/g$, то рассматриваемые полюсы $n_1$ и $n_2$ будут лежать на действительной оси.

Если же $m > \omega^2/g$, то эти полюсы будут располагаться на мнимой оси. Оба эти случая мы последовательно и рассмотрим. Предположим начала, что $0 < m < \omega^2/g$.

Имея в виду происхождение интегралов (5) из интеграла $S_1$, не имеющего полюса в точке $n=0$, мы можем считать, что в интегралах (6) путь интегрирования обходит точку $n=0$ над действительной осью или под действительной осью. Будем обходить точку $n=0$ под действительной осью.

Обойдем точку $n_2$ по полуокружности $\gamma_2$, лежащей ниже оси действительных $n$; точку же $n_1$ обойдем по полуокружности $\gamma_1$, лежащей выше оси действительных $n$.

Мы увидим, что при таком выборе обходов точек $n_1$ и $n_2$ будут соблюдаться естественные условия, требующие распространения волн в направлении от области переменного давления в бесконечность. На фиг. 1 указано распределение значений многозначной функции $\sqrt{m^2+n^2}$ переменного $n$ и показаны точки $n_1$ и $n_2$ вместе с путями интегрирования.



Фиг. 1

Возьмем интеграл $S_{11}$ и, считая $y>0$, преобразуем его к новому виду, заменяя взятый в нем путь интегрирования интегрированием по разрезу, идущему по мнимой оси от точки $mi$ к точке $\infty i$.

После ряда преобразований получим

$$S_{11}=\frac{\pi}{2(gm-\omega^2)}+\frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4-g^2m^2)}\exp\left(-i(b+y)\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}g\int\limits_m^\infty\frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,e^{-\nu(b+y)}}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\frac{d\nu}{\nu} \tag{7}$$

При том же условии $y>0$ получаем для $S_{12}$ такое преобразованное выражение:

$$S_{12}=-\frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4-g^2m^2)}\exp\left(-i(b+y)\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}g\int\limits_m^\infty\frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,e^{-\nu(b+y)}}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\frac{d\nu}{\nu} \tag{8}$$

Рассмотрим интегралы $S_{13}$ и $S_{14}$. Если считать $y>b$, то эти интегралы можно преобразовать к такому виду:

$$S_{13}=-\frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4-g^2m^2)}\exp\left(i(b-y)\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}g\int\limits_m^\infty\frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,e^{-\nu(y-b)}}{g^2(\nu^2-m^2)+\omega^4}\frac{d\nu}{\nu} \tag{9}$$

$$S_{14}=\frac{\pi}{2(gm-\omega^2)}+\frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4-g^2m^2)}\exp\left(i(b-y)\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}g\int\limits_m^\infty\frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,e^{-\nu(y-b)}}{g^2(\nu^2-m^2)+\omega^4}\frac{d\nu}{\nu} \tag{10}$$

Если же $0 < y < b$, то будем иметь для $S_{13}$ и $S_{14}$ такие выражения:

$$S_{13} = \frac{\pi}{2(gm-\omega^2)} + \frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4 - g^2m^2)} \exp\left(-i(b-y)\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) - \\ -\frac{1}{2} g \int_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2 - m^2}\, e^{-\nu(b-y)}}{\omega^4 + g^2(\nu^2 - m^2)} \frac{d\nu}{\nu} \tag{9'}$$

$$S_{14} = -\frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4 - g^2m^2)} \exp\left(-i(b-y)\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) + \\ + \frac{1}{2} g \int_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2 - m^2}\, e^{-\nu(b-y)}}{\omega^4 + g^2(\nu^2 - m^2)} \frac{d\nu}{\nu} \tag{10'}$$

Таким образом, интеграл $S_1$ может быть представлен в следующем виде для $0 < m < \omega^2 / g$:

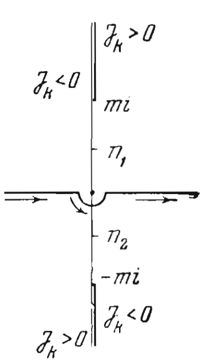
$$S_1 = -\frac{2\pi i \omega^2}{\omega^4 - g^2m^2} \sin\left(b\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) \exp\left(-iy\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) + \\ + 2g \int_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2 - m^2}\,\mathrm{sh}(b\nu)}{g^2(\nu^2 - m^2) + \omega^4} e^{-\nu y} \frac{d\nu}{\nu} \qquad [y > b] \tag{11}$$

$$S_1 = \frac{\pi}{gm - \omega^2} + \frac{2\pi\omega^2}{\omega^4 - g^2m^2} \cos\left(y\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) \exp\left(-ib\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) - \\ - 2g \int_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2 - m^2}\,\mathrm{ch}(\nu y)}{g^2(\nu^2 - m^2) + \omega^4} e^{-\nu b} \frac{d\nu}{\nu} \qquad [0 < y < b] \tag{12}$$

**§ 3.** Обратимся теперь к преобразованию интеграла $S_1$ для $m > \omega^2 / g$. Представим этот интеграл в виде (5) со значениями (6) отдельных его слагаемых. В рассматриваемом случае точки $n_1$ и $n_2$

$$n_1 = i\sqrt{m^2 - \frac{\omega^4}{g^2}}, \qquad n_2 = -i\sqrt{m^2 - \frac{\omega^4}{g^2}}$$

лежат на мнимой оси комплексного переменного $n$; путь интеграции обходит снизу точку $n = 0$ (фиг. 2).




Фиг. 2

Для $y > 0$ мы имеем

$$S_{11} = \frac{\pi}{2(gm - \omega^2)} + \\ + \frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4 - m^2g^2)} \exp\left(-(y+b)\sqrt{m^2 - \frac{\omega^4}{g^2}}\right) - \\ - \frac{1}{2} g \int_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2 - m^2}\, e^{-\nu(y+b)}}{\omega^4 + g^2(\nu^2 - m^2)} \frac{d\nu}{\nu}$$

$$S_{12} = -\frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4 - g^2m^2)} \exp\left(-(y+b)\sqrt{m^2 - \frac{\omega^4}{g^2}}\right) + \frac{1}{2} g \int_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2 - m^2}\, e^{-\nu(y+b)}}{\omega^4 + g^2(\nu^2 - m^2)} \frac{d\nu}{\nu}$$

Для $y > b$ имеем

$$S_{13} = -\frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4 - g^2m^2)} \exp\left(-(y-b)\sqrt{m^2 - \frac{\omega^4}{g^2}}\right) + \frac{1}{2} g \int_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2 - m^2}\, e^{-\nu(y-b)}}{\omega^4 + g^2(\nu^2 - m^2)} \frac{d\nu}{\nu}$$

$$S_{14} = \frac{\pi}{2(gm-\omega^2)} + \frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4-m^2g^2)}\exp\left(-(y-b)\sqrt{m^2-\frac{\omega^4}{g^2}}\right) - \\ -\frac{1}{2}g\int\limits_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,e^{-\nu(y-b)}}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\frac{d\nu}{\nu}$$

Для $0<y<b$ имеем

$$S_{13} = \frac{\pi}{2(gm-\omega^2)} + \frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4-m^2g^2)}\exp\left(-(b-y)\sqrt{m^2-\frac{\omega^4}{g^2}}\right) - \\ -\frac{1}{2}g\int\limits_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,e^{-\nu(b-y)}}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\frac{d\nu}{\nu}$$

$$S_{14} = -\frac{\pi\omega^2}{2(\omega^4-g^2m^2)}\exp\left(-(b-y)\sqrt{m^2-\frac{\omega^4}{g^2}}\right) + \frac{1}{2}g\int\limits_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,e^{-\nu(b-y)}}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\frac{d\nu}{\nu}$$

Пользуясь этими формулами, получаем при $m>\omega^2/g$ для $y>b$

$$S_1 = -\frac{2\pi\omega^2}{\omega^4-g^2m^2}\,\mathrm{sh}\left(b\sqrt{m^2-\frac{\omega^4}{g^2}}\right)\exp\left(-y\sqrt{m^2-\frac{\omega^4}{g^2}}\right) + \\ +2g\int\limits_m^\infty \frac{e^{-\nu y}\sqrt{\nu^2-m^2}\,\mathrm{sh}\,b\nu}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\frac{d\nu}{\nu} \tag{13}$$

Для $0<y<b$ имеем

$$S_1 = \frac{\pi}{gm-\omega^2} + \frac{2\pi\omega^2}{\omega^4-m^2g^2}\exp\left(-b\sqrt{m^2-\frac{\omega^4}{g^2}}\right)\mathrm{ch}\left(y\sqrt{m^2-\frac{\omega^4}{g^2}}\right) - \\ -2g\int\limits_m^\infty \frac{e^{-\nu b}\sqrt{\nu^2-m^2}\,\mathrm{ch}\,\nu y}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\frac{d\nu}{\nu} \qquad \left(m>\frac{\omega^2}{g}\right) \tag{14}$$

§ 4. Теперь мы можем составить интеграл (4). Предположим сначала, что $0<y<b$. Пользуясь формулами (12) и (14), получаем

$$S = 2\pi\int\limits_0^\infty \frac{\sin ma}{m}\frac{\cos mx}{gm-\omega^2}\,dm + \\ +4\pi\omega^2\int\limits_0^\infty \frac{\sin ma}{m}\frac{\cos mx}{\omega^4-g^2m^2}\cos\left(y\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)\exp\left(-ib\sqrt{\frac{\omega^4}{g^4}-m^2}\right)dm - \\ -4g\int\limits_0^\infty \frac{\sin ma}{m}\cos mx\,dm\int\limits_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,\mathrm{ch}\,\nu y}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}e^{-\nu b}\frac{d\nu}{\nu} \tag{15}$$

Отметим при этом, что для $|m|>\omega^2/g$ функция $\sqrt{\omega^4/g^2-m^2}$ имеет значение $-i\sqrt{m^2-\omega^4/g^2}$ и при интеграции точка $m=\omega^2/g$ обходится сверху.

Для $y>b$ имеем по формулам (11) и (13)

$$S = -4\pi i\omega^2\int\limits_0^\infty \frac{\sin ma}{m}\frac{\cos mx}{\omega^4-g^2m^2}\sin\left(b\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)\exp\left(-iy\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)dm + \\ +4g\int\limits_0^\infty \frac{\sin ma}{m}\cos mx\,dx\int\limits_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,\mathrm{sh}\,b\nu}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}e^{-\nu y}\frac{d\nu}{\nu} \tag{16}$$

Изучим сначала формулу (15). Рассмотрим первый интеграл этой формулы:

$$s_1 = 2\pi \int_0^\infty \frac{\sin ma}{m} \frac{\cos mx}{gm - \omega^2} dm$$

Выполняя простые преобразования, можем переписать этот интеграл так:

$$s_1 = \frac{2\pi}{\omega^2} \int_0^\infty \frac{\sin ma \cos mx}{m - \omega^2 / g} dm - \frac{2\pi}{\omega^2} \int_0^\infty \frac{\sin ma}{m} \cos mx \, dm$$

Второй интеграл обращается в нуль для $x > a$; для вычисления первого интеграла применим теорию вычетов. Обходя точку $m = \omega^2 / g$ сверху, получаем

$$s_1 = -\frac{2i\pi^2}{\omega^2} \sin \frac{\omega^2 a}{g} \exp\left(-\frac{\omega^2 x}{g} i\right) + \frac{\pi}{g} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu (x+a)}}{\mu^2 + \omega^4 / g^2} d\mu - \frac{\pi}{g} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu (x+a)}}{\mu^2 + \omega^4 / g^2} d\mu$$

Для больших значений $x$ два последних интеграла стремятся к нулю; поэтому принимаем

$$s_1 = -\frac{2i\pi^2}{\omega^2} \sin \frac{\omega^2 a}{g} \exp\left(-\frac{\omega^2 x}{g} i\right) \tag{17}$$

Возьмем затем второй интеграл формулы (15)

$$s_2 = 4\pi\omega^2 \int_0^\infty \frac{\sin ma}{m} \frac{\cos mx}{\omega^4 - g^2 m^2} \cos\left(y \sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) \exp\left(-ib \sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) dm$$

и перепишем его следующим образом:

$$s_2 = s_2' + s_2'' + s_2'''$$

полагая

$$s_2' = \frac{4\pi}{\omega^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ma}{m} \cos mx \cos\left(y \sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) \exp\left(-ib \sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) dm$$

$$s_2'' = 2\pi g \int_{-\infty}^\infty \sin ma \frac{\cos mx}{\omega^2 - gm} \cos\left(y \sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) \exp\left(-ib \sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) dm$$

$$s_2''' = -2\pi g \int_{-\infty}^\infty \sin ma \frac{\cos mx}{\omega^2 + gm} \cos\left(y \sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) \exp\left(-ib \sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) dm$$

Первый из этих трех интегралов стремится к нулю при $x$, стремящемся к бесконечности. В этом можно убедиться применением известной формулы

$$\lim_{x=\infty} \int_0^h \varphi(m) \frac{\sin mx}{m} dm = \frac{\pi}{2} \varphi(0)$$

Что же касается интегралов $s_2''$ и $s_2'''$, то их асимптотические значения можно получить, например, следующим образом. Заменим путь интеграции, идущий вдоль действительной оси, составным путем, состоящим из четырех частей. Первая часть $\Gamma_1$ представляет собой ось абсцисс от $-\infty$ до точки $-2\omega^2 / g$; вторая часть $\Gamma_2$ есть полуокружность нижней полуплоскости с центром в точке $-\omega^2 / g$ и радиуса $\omega^2 / g$; третья часть $\Gamma_3$

есть полуокружность с центром в точке $\omega^2/g$ и радиуса $\omega^2/g$; наконец четвертая часть $\Gamma_4$ является осью абсцисс от точки $\omega^2/g$ до $\infty$.

Интегралы по путям $\Gamma_1$ и $\Gamma_4$ стремятся к нулю при $x\to\infty$; в этом можно убедиться применением формулы интегрирования по частям. Для получения асимптотических значений интегралов, взятых по кривым $\Gamma_2$ и $\Gamma_3$, надо разложить функцию

$$\cos\left(y\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)\exp\left(-ib\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)$$

в ряд Маклорена по степеням корня $\sqrt{\omega^2/g+m}$ или по степеням корня $\sqrt{\omega^2/g-m}$, выполнить затем почленную интеграцию рядов и к каждому члену ряда применить правило нахождения асимптотических значений интегралов вида

$$\int\limits_0^\infty f(\xi)\,e^{-x\xi}\,d\xi$$

при больших $x$.

Выполняя все вычисления, находим, что интегралы $s_2''$ и $s_3''$ стремятся к нулю при $x\to\infty$.

Разберем теперь двойной интеграл формулы (15); обозначая

$$\frac{\sin ma}{m}\int\limits_m^\infty\frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,\operatorname{ch}\nu y}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\,e^{-\nu b}\,\frac{d\nu}{\nu}$$

через $M(m)$, можно, интегрируя по частям, переписать двойной интеграл так:

$$J=\int\limits_0^\infty M(m)\cos mx\,dm=-\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty\frac{dM}{dm}\sin mx\,dm$$

Но можно показать, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty\left|\frac{dM}{dm}\right|dm$$

сходится. Благодаря этому интеграл $J$ будет стремиться к нулю при $x=\infty$ не менее быстро, чем $|x|^{-1}$.

Вернемся теперь к формуле (15); принимая во внимание оценку последнего интеграла этой формулы, можем сказать, что для больших значений $x$ имеем

$$S=-\frac{2i\pi^2}{\omega^2}\sin\frac{\omega^2 a}{g}\exp\left(-\frac{\omega^2 x}{g}i\right)$$

Отсюда, обращаясь к формуле (3), имеем для больших $|x|$ и для $|y|<b$ следующую формулу для возвышения поверхности жидкости:

$$\zeta=\frac{2p_0}{\rho g}\sin\frac{\omega^2 a}{g}\sin\frac{\omega^2}{g}\left(x-\frac{gt}{\omega}\right)\tag{18}$$

Совершенно так же мы можем установить следующую формулу, определяющую возвышение поверхности жидкости для больших $|y|$:

$$\zeta=\frac{2p_0}{\rho g}\sin\frac{\omega^2 b}{g}\sin\frac{\omega^2}{g}\left(y-\frac{gt}{\omega}\right)\quad\text{при }|x|<a\tag{19}$$

Таким образом, в полосах $|x|<a$ и $|y|<b$ распространяются прогрессивные волны, длина которых определяется по данной частоте из-

вестной элементарной формулой

$$\lambda = \frac{2\pi g}{\omega^2}$$

§ 5. Определим теперь вид поверхности жидкости для больших значений $x$, но для $y > b$. Двойной интеграл $S$, через который определяется возвышение $\zeta$, дается формулой (16). Однократный интеграл, входящий в эту формулу, может быть исследован совершенно так же, как был исследован аналогичный интеграл, входящий в формулу (15).

Выполняя вычисления, находим, что этот интеграл стремится к нулю при неограниченном возрастании $x$.

Рассмотрим затем двойной интеграл формулы (16); положим

$$u(m) = \frac{\sin ma}{m} \int\limits_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2 - m^2}\,\mathrm{sh}\, b\nu}{\omega^4 + g^2(\nu^2 - m^2)} e^{-\nu y} \frac{d\nu}{\nu}$$

Выполняя интегрирование по частям, мы можем преобразовать двойной интеграл к виду

$$\int\limits_0^\infty u(m) \cos mx\, dm = -\frac{1}{x} \int\limits_0^\infty \frac{du}{dm} \sin mx\, dm$$

Но

$$\left| \int\limits_0^\infty \frac{du}{dm} \sin mx\, dm \right| < \int\limits_0^\infty \left| \frac{du}{dm} \right| dm$$

Простые вычисления показывают, что интеграл, входящий в правую часть этого неравенства, сходится. Отсюда вытекает, что двойной интеграл формулы (16) стремится к нулю при $x$, стремящемся к бесконечности.

Это показывает нам, что при больших $x$ и при $y > b$ ординаты поверхности жидкости бесконечно малы; то же самое будет и при больших $y$ и $x > a$.

§ 6. Пользуясь формулой (16), можно исследовать интеграл $S$ для больших значений $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, предполагая, что точка $(x, y)$ лежит внутри некоторого угла, по величине близкого к $^1/_2\pi$ и не содержащего осей координат.

Положим $x = R\cos\gamma$, $y = R\sin\gamma$ и, задавшись произвольно малым числом $\varepsilon$, будем считать, что угол $\gamma$ удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon < \gamma < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$$

Рассмотрим сначала однократный интеграл формулы (16); представим его так:

$$-2\pi i\omega^2 \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin ma}{m} \frac{\cos mx}{\omega^4 - g^2 m^2} \sin\left(b\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) \exp\left(-iy\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) dm =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^\infty F(m)\, e^{iM_1(m)R}\, dm + \int\limits_{-\infty}^\infty F(m)\, e^{-iM_2(m)R}\, dm \qquad (20)$$

где

$$F(m) = -\frac{2\pi i\omega^2}{\omega^4 - g^2 m^2} \frac{\sin ma}{m} \sin\left(b\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right)$$

$$M_1(m) = m\cos\gamma - \sin\gamma\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}, \qquad M_2(m) = m\cos\gamma + \sin\gamma\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}$$

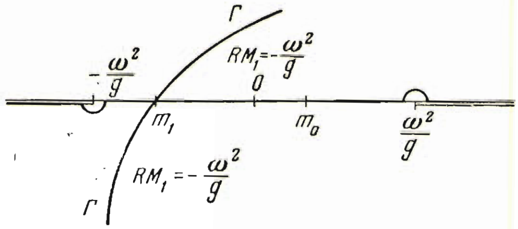
Найдем распределение значений функций $M_1(m)$ и $M_2(m)$ на плоскости комплексного переменного $m$. Возьмем функцию $M_1(m)$.

Для $m_1 = -\omega^2/g\sin\gamma$ производная $M_1'(m)$ обращается в нуль, а вторая производная

$M_1''(m_1) = g/\omega^2\cos^2\gamma$

и $M_1(m_1) = -\omega^2/g$

При $m_0 = \omega^2/g\cos\gamma$ функция $M_1$ обращается в нуль.




Фиг. 3

Значения радикала выбираются так, что $\sqrt{\omega^4/g^2 - m^2} = -i\sqrt{m^2-\omega^4/g}$ по верхней стороне правого разреза и по нижней стороне левого разреза (фиг. 3); разрезы проведены от точки $\omega^2/g$ до $\infty$ и от $-\omega^2/g$ до $-\infty$ вдоль действительной оси.

Применяя метод перевала, можем написать такое асимптотическое выражение интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(m)\, e^{iM_1(m)R}\, dm = F(m_1)\, e^{iM_1(m_1)R} \int_{(\Gamma)} \exp\left[\tfrac{1}{2}\, iM_1''(m_1)(m-m_1)^2\right] dm =$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2\pi g}}{\omega^3\sqrt{R}\sin 2\gamma} \sin\left(\frac{\omega^2 a}{g}\sin\gamma\right)\sin\left(\frac{\omega^2 b}{g}\cos\gamma\right)\exp\left[-i\left(\frac{\omega^2 R}{g}+\frac{1}{4}\pi\right)\right]$$

Такими же вычислениями находим и асимптотическое представление второго интеграла правой части формулы (20):

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(m)\, e^{-iM_2(m)R}\, dm =$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2\pi g}}{\omega^3\sqrt{R}\sin 2\gamma} \sin\left(\frac{\omega^2 a}{g}\cos\gamma\right)\sin\left(\frac{\omega^2 b}{g}\sin\gamma\right)\exp\left[-i\left(\frac{\omega^2 R}{g}+\frac{1}{4}\pi\right)\right]$$

Из двух последних формул следует, что однократный интеграл формулы (16) имеет при больших $R$ такое асимптотическое представление:

$$\frac{4\pi\sqrt{2\pi g}}{\omega^3}\,\frac{1}{\sin 2\gamma}\left[\sin\left(\frac{\omega^2 a}{g}\sin\gamma\right)\sin\left(\frac{\omega^2 b}{g}\cos\gamma\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{\omega^2 a}{g}\cos\gamma\right)\sin\left(\frac{\omega^2 b}{g}\sin\gamma\right)\right]\frac{1}{\sqrt{R}}\exp\left[-i\left(\frac{\omega^2 R}{g}+\frac{1}{4}\pi\right)\right]$$

Пользуясь соображениями предыдущего параграфа, мы приходим к заключению, что двойной интеграл формулы (16) стремится к нулю не менее быстро, чем $R^{-1}$. Отсюда для больших $R$ и углов $\gamma$ в промежутке $(\varepsilon, {}^1/_2\pi - \varepsilon)$ имеем для возвышения $\zeta$ следующее выражение:

$$\zeta = -\frac{8p_0}{\omega\rho\sqrt{2\pi g}}\,\frac{1}{\sin 2\gamma}\left[\sin\left(\frac{\omega^2 a}{g}\sin\gamma\right)\sin\left(\frac{\omega^2 b}{g}\cos\gamma\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{\omega^2 a}{g}\cos\gamma\right)\sin\left(\frac{\omega^2 b}{g}\sin\gamma\right)\right]\frac{1}{\sqrt{R}}\exp\left[-i\left(\frac{\omega^2 R}{g}-\omega t+\frac{1}{4}\pi\right)\right] \qquad (21)$$

Результаты всего нашего исследования, выражаемые формулами (18), (19) и (21), показывают, что при рассматриваемом способе приложения давления к поверхности жидкости имеет место направленное излучение волн. От области, подверженной давлению, распространяются в двух взаимно перпендикулярных направлениях незатухающие плоские прогрессивные волны, длина которых находится в согласии с частотой изменения давления; амплитуды этих волн определяются простыми формулами через размеры области приложения давлений и через частоту колебаний давления. По всей остальной части поверхности жидкости, находящейся вне полос распространения указанных прогрессивных волн и заключенной внутри четырех углов, близких по величине к $^1/_2\pi$ и симметрично расположенных относительно осей координат, движутся кольцевые волны, амплитуда которых, зависящая от угла $\gamma$, неограниченно уменьшается с увеличением расстояния от области приложения давления.

**§ 7.** Найдем выражение работы $W$, которую нужно совершать, чтобы поддерживать исследуемое периодическое волновое движение.

К поверхности жидкости прикладываются на площади прямоугольника $\Omega$ периодические давления

$$p = \mathrm{Re}\,(p_0 e^{i\omega t}) = p_0 \cos \omega t \tag{22}$$

Потенциал скоростей соответствующего движения жидкости будет

$$\varphi = \frac{\omega p_0}{4\pi^2 \rho}\,\mathrm{Re}\left\{ie^{i\omega t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dm\,dn \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b} e^{kz}\cos m(x-\alpha)\cos n(y-\beta)\frac{d\alpha\,d\beta}{gk-\omega^2}\right\}$$

Выполняя здесь интеграции по переменным $\alpha$ и $\beta$, легко находим следующую формулу, необходимую для дальнейших вычислений:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\omega p_0}{\pi^2\rho}\,\mathrm{Re}\left\{ie^{i\omega t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ma \sin nb}{gk-\omega^2}\cos mx \cos ny\,\frac{k\,dm\,dn}{mn}\right\} \tag{23}$$

Обозначим двойной интеграл, находящийся в фигурных скобках, через $A + Bi$; при этом сокращенном обозначении будем иметь

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{\omega p_0}{\pi^2\rho}(A \sin \omega t + B \cos \omega t) \tag{24}$$

Предпослав эти формулы, обратимся к определению работы $W$. Для ее вычисления имеем такую формулу:

$$W = \iint\limits_{\Omega} p\,(u\alpha + v\beta + w\gamma)\,d\sigma$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности жидкости, проведенной внутри жидкости, $d\sigma$ — элемент площади поверхности жидкости. Пользуясь известными выражениями для направляющих косинусов нормали к поверхности $\zeta = \zeta(x, y)$, а также формулами

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

получаем, отбрасывая квадратичные члены,

$$W = \iint\limits_{\Omega} p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} p\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dx\,dy$$

Подставим сюда вместо $p$ и $\partial\varphi/\partial z$ их значения из формул (23) и (24); получим

$$W = -\frac{\omega p_0^2}{\pi^2\rho}\left[\sin\omega t\cos\omega t\iint\limits_{\Omega} A\,dx\,dy + \cos^2\omega t\iint\limits_{\Omega} B\,dx\,dy\right]$$

Отсюда работа $\overline{W}$, выполненная за период колебания $2\pi/\omega$, будет определяться формулой

$$\overline{W} = -\frac{p_0^2}{\pi\rho}\iint\limits_{\Omega} B\,dx\,dy$$

Подставим сюда вместо $B$ его значение; найдем

$$\overline{W} = -\frac{p_0^2}{\pi\rho}\,\mathrm{Im}\left\{\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b}^{b} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ma \sin nb}{gk-\omega^2}\cos mx \cos ny\,\frac{k\,dm\,dn}{mn}\right\}$$

или, выполняя интеграции по $x$ и $y$, получаем

$$\overline{W} = -\frac{4p_0^2}{\pi\rho}\,\mathrm{Im}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ma}{m}\right)^2\left(\frac{\sin nb}{n}\right)^2\frac{k\,dm\,dn}{gk-\omega^2}\right\} \tag{26}$$

Двойной интеграл $J$ в этой формуле можно преобразовать к виду:

$$J = \frac{1}{g}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ma}{m}\right)^2\left(\frac{\sin nb}{n}\right)^2 dm\,dn + \frac{\omega^2}{g}J'$$

где

$$J' = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ma}{m}\right)^2\left(\frac{\sin nb}{n}\right)^2\frac{dm\,dn}{gk-\omega^2} \tag{27}$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 d\xi = \pi$$

то

$$J = \frac{\pi^2 ab}{g} + \frac{\omega^2}{g}J' \tag{28}$$

Обратимся теперь к вычислению интеграла $J'$. Рассмотрим сначала интеграцию по переменному $n$; имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin nb}{n}\right)^2\frac{dn}{gk-\omega^2} = \int\limits_{0}^{b} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2n\xi}{n(gk-\omega^2)}\,dn \tag{29}$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$S = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2n\xi}{n(gk-\omega^2)}\,dn = \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2n\xi i}}{n(gk-\omega^2)}\,dn - \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2n\xi i}}{n(gk-\omega^2)}\,dn$$

Первый из интегралов третьей части назовем через $S'$, а второй через $S''$, т. е. положим $S = S' + S''$.

Отметим, что точку $n=0$ можно обходить и выше и ниже начала координат; мы будем обходить точку $n=0$ полуокружностью, расположенной в нижней полуплоскости. В точках

$$n_1 = \sqrt{\omega^4/g^2 - m^2}, \qquad n_2 = -\sqrt{\omega^4/g^2 - m^2}$$

подинтегральная функция обоих интегралов имеет полюсы первого порядка. Если $|m| < \omega^2/g$, то эти полюсы будут лежать на пути интегрирования; в согласии с выбором пути интегрирования, сделанным в § 2, мы будем обходить точку $n_1$ сверху, а точку $n_2$ снизу. Заметим, кроме того, что точки $n = mi$ и $n = -mi$ являются точками ветвления подинтегральной функции.

Принимая в расчет все эти свойства, можем преобразовать интегралы $S'$ и $S''$ к такому виду:

$$S' = \pi\left\{\frac{1}{gm-\omega^2}+\frac{\omega^2 e^{2n_2\xi i}}{\omega^4-g^2m^2}\right\}-g\int\limits_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,e^{-2\nu\xi}}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\frac{d\nu}{\nu}$$

$$S'' = -\frac{\pi\omega^2 e^{-2n_1\xi i}}{\omega^4-g^2m^2}+g\int\limits_m^\infty \frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,e^{-2\nu\xi}}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\frac{d\nu}{\nu}$$

Отсюда имеем

$$S=\frac{\pi}{gm-\omega^2}+\frac{2\pi\omega^2}{\omega^4-g^2m^2}\exp\left(-2i\xi\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)-2g\int\limits_m^\infty\frac{\sqrt{\nu^2-m^2}\,e^{-2\xi\nu}}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\frac{d\nu}{\nu}$$

Эта формула получена для $|m|<\omega^2/g$; если же $|m|>\omega^2/g$, то

$$S=\frac{\pi}{gm-\omega^2}+\frac{2\pi\omega^2}{\omega^4-g^2m^2}\exp\left(-2\xi\sqrt{m^2-\frac{\omega^4}{g^2}}\right)-2g\int\limits_m^\infty\frac{\sqrt{\nu^2-m^2}e^{-2\xi\nu}}{\omega^4+g^2(\nu^2-m^2)}\frac{d\nu}{\nu}$$

Так как для вычисления $\overline{W}$ достаточно знать лишь мнимую часть интеграла $J'$, а следовательно, и интеграла $S$, то можем считать, что

$$S=\begin{cases}-\dfrac{2\pi\omega^2 i}{\omega^4-g^2m^2}\sin\left(2\xi\sqrt{\dfrac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right) & \text{при } |m|<\dfrac{\omega^2}{g}\\ 0 & \text{при } |m|>\dfrac{\omega^2}{g}\end{cases}$$

Вычислим теперь интеграл (29); при $|m|<\omega^2/g$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin nb}{n}\right)^2\frac{dn}{gk-\omega^2}=-\frac{2\pi i\omega^2}{\omega^4-g^2}\int\limits_0^b\sin\left(2\xi\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)d\xi=$$

$$=-\frac{2\pi i\omega^2 g}{(\omega^4-g^2m^2)^{3/2}}\sin^2\left(b\sqrt{\frac{\omega^4}{g^2}-m^2}\right)$$

если же $|m|>\omega^2/g$, то этот интеграл можно считать равным нулю.

Теперь мы можем интеграл (27) записать так:

$$J'=-2\pi i\omega^2 g\int\limits_{\omega^2/g}^{\omega^2/g}\left(\frac{\sin ma}{m}\right)^2\frac{\sin^2(b\sqrt{\omega^4/g^2-m^2})}{(\omega^4-g^2m^2)^{3/2}}\,dm \tag{30}$$

но

$$\overline{W}=-\frac{4p_0{}^2}{\pi\rho}\,\mathrm{Im}\,\{J\}\qquad\text{или}\qquad \overline{W}=-\frac{4p_0{}^2\omega^2}{\pi\rho g}\,\mathrm{Im}\,\{J'\}$$

Подставим сюда вместо $J'$ его значение (30); получим

$$\overline{W}=\frac{8p_0{}^2}{\rho}\omega^4\int\limits_{-\omega^2/g}^{\omega^2/g}\left(\frac{\sin ma}{m}\right)^2\frac{\sin^2(b\sqrt{\omega^4/g^2-m^2})}{(\omega^4-g^2m^2)^{3/2}}\,dm \tag{31}$$

Введем вместо переменного интеграции $m$ новое переменное $\psi$, полагая $m=(\omega^2/g)\sin\psi$; придадим тогда $\overline{W}$ такой симметричный вид:

$$\overline{W}=\frac{8p_0{}^2 g}{\rho\omega^4}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left\{\frac{\sin[(a\omega^2/g)\sin\psi]}{\sin\psi}\,\frac{\sin[(b\omega^2/g)\cos\psi]}{\cos\psi}\right\}^2 d\psi \tag{32}$$

**§ 8.** При исследовании вида поверхности жидкости мы установили, что для больших значений $|x|$ поверхность жидкости может быть представлена в полосе $-b < y < b$ следующим уравнением:

$$\zeta = \frac{2p_0}{\rho g} \sin \frac{\omega^2 a}{g} \sin \frac{\omega^2}{g} \left(x - \frac{gt}{\omega}\right)$$

а в полосе $-a < x < a$ и для больших $|y|$ уравнением

$$\zeta = \frac{2p_0}{\rho g} \sin \frac{\omega^2 b}{g} \sin \frac{\omega^2}{g} \left(y - \frac{gt}{\omega}\right)$$

Для энергии, которую уносят с собой в бесконечность эти волны за один период колебания давления, находим выражение

$$E = \frac{8{p_0}^2 g}{\rho\omega^4} \cdot 2\pi \left(\frac{a\omega^2}{g} \sin^2 \frac{\omega^2 b}{g} + \frac{\omega^2 b}{g} \sin^2 \frac{a\omega^2}{g}\right) \tag{33}$$

Сопоставим формулы (31) и (33). Предположим, что, оставляя неизменным параметр $\omega^2 b / g$, мы неограниченно увеличиваем $a\omega^2/g$. Это может быть, например, при неизменных $\omega$ и $b$ и неограниченно увеличивающемся $a$. В этих условиях и при добавочном предположении, что $\omega^2 b / g \neq \pi N$, где $N$ — целое число, можно формулу (33) заменить такой:

$$E = \frac{16\pi {p_0}^2}{\rho\omega^2} a \sin^2 \frac{\omega^2 b}{g} \tag{34}$$

Отметив это, обратимся к формуле (31) и найдем значение правой части этой формулы при больших значениях параметра $a\omega^2 / g$; изменением переменной интеграции можем переписать формулу (31) в виде:

$$\overline{W} = \frac{8\pi g {p_0}^2}{\rho\omega^4} \int_0^{{}^1/_2\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{2a\omega^2}{\pi g} n\right)}{\sin n}\right]^2 \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega^2 b}{g}\sqrt{1 - \frac{4n^2}{\pi^2}}\right)}{\left(1 - \frac{4n^2}{\pi^2}\right)^{{}^3/_2}} dn \tag{35}$$

В теории тригонометрических рядов Фурье доказывается при широких предположениях о функции $f(x)$, следующая теорема Фейэра [1]:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int_0^{{}^1/_2\pi} \frac{\sin^2 N\theta}{\sin^2 \theta} f(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \pi f(0)$$

Применим эту теорему к интегралу формулы (35). Тогда при больших значениях параметра $a\omega^2 / g$ будем иметь для $\overline{W}$ такое выражение:

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \frac{16\pi {p_0}^2}{\rho\omega^2} a \sin^2 \frac{\omega^2 b}{g}$$

Отсюда вытекает при сравнении с формулой (33), что

$$\overline{W} = \frac{1}{2} E$$

Мы получаем таким образом известный результат, что для поддержания правильных последовательностей прогрессивных волн достаточно сообщать жидкости энергию, равную половине энергии прогрессивных волн. Отсюда можно вывести далее, что при больших $\omega^2 a / g$ и ограниченных $\omega^2 b / g \neq \pi N$ энергия, сообщаемая жидкости давлениями, приложенными к прямоугольнику $|x| < a$, $|y| < b$, уносится, в основном, плоскими волнами, разбегающимися от этого прямоугольника в четырех взаимно перпендикулярных направлениях.

Поступила 26.I.1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Whittaker E. T. and Watson G. N., A Course of Modern Analysis, § 9°4.