

УТОЧНЕНИЕ ТЕОРИИ ПРОСТОГО КРАЕВОГО ЭФФЕКТА

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

В статье уточняется существующая приближенная теория простого краевого эффекта (краевого эффекта, возникающего вблизи некоторого контура, нигде не касающегося асимптотических линий срединной поверхности). Эта теория была разработана для осесимметричных оболочек [вращения И. Я. Штаерманом^[1] и Геккелером^[2] и обобщена Ю. Н. Работновым^[3] и А. Л. Гольденвейзером^[4] на оболочки произвольного очертания. Упомянутые авторы сохраняли в каждом отдельном члене только одно — главное — слагаемое. В предлагаемой статье соответствующая теория называется теорией первого приближения и рассматривается вопрос о возможности построения теорий более высоких приближений. В монографии^[5] А. И. Лурье предложил теорию простого краевого эффекта, точность которой адекватна точности теории оболочек, но этот результат охватывает только осесимметричные оболочки вращения.

§ 1. Приближенная теория простого краевого эффекта первого приближения построена на интегрировании разрешающего уравнения

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right\} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right\} W + \quad (1.1)$$

$$+ i \sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{B}{A} \frac{1}{R_2'} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{R_{12}} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{R_{12}} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{A}{B} \frac{1}{R_1'} \frac{\partial W}{\partial \beta} \right] = 0$$

где α, β — параметры ортогональной, но, вообще говоря, не сопряженной системы криволинейных координат, к которым отвесена срединная поверхность оболочки, A, B — коэффициенты первой квадратичной формы

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$$

R_1', R_2' — радиусы нормальной кривизны [срединной поверхности вдоль α - и β -линий соответственно, R_{12} — величина, характеризующая степень несопряженности координатных линий (если α - и β -линии сопряжены — то $R_{12} = \infty$, а R_1', R_2' становятся равными R_1, R_2 — главным радиусам кривизны), h — полутолщина оболочки, σ — коэффициент Пуассона.

Комплексное неизвестное W связано с нормальным прогибом оболочки w и одной из четырех функций напряжения с формулой

$$W = \sqrt{\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}} 2Ehw + ic \quad (E — модуль Юнга) \quad (1.2)$$

Усилия, моменты и компоненты деформации выражаются через w и c при помощи следующих формул:

а) компоненты изгибной деформации

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta}, & \kappa_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \\ \tau^{(1)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, & \tau^{(2)} &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (1.3)$$

б) моменты

$$\begin{aligned} G_1 &= -\frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} (\kappa_1 + \sigma \kappa_2), & G_2 &= -\frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} (\kappa_2 + \sigma \kappa_1) \\ H_1 &= \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} (\tau^{(1)} + \sigma \tau^{(2)}), & H_2 &= \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} (\tau^{(2)} + \sigma \tau^{(1)}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

в) тангенциальные усилия

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \frac{\partial c}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial c}{\partial \alpha}, & T_2 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial c}{\partial \beta} \\ S_1 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{A} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{1}{B} \frac{\partial c}{\partial \beta}, & S_2 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{B} \frac{\partial c}{\partial \beta} - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial c}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (1.5)$$

г) перерезывающие усилия

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (BG_1) - \frac{\partial A}{\partial \beta} H_1 + \frac{\partial}{\partial \beta} (AH_2) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} G_2 \right] \\ N_2 &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (AG_2) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} H_2 - \frac{\partial}{\partial \alpha} (BH_1) - \frac{\partial A}{\partial \beta} G_1 \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь всюду приняты известные обозначения Лява, а через $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ обозначены энергетические компоненты деформации скручивания.

Разрешающее уравнение (1.1) для расчета простого краевого эффекта было почти одновременно предложено в работах [3,4]. Несколько раньше В. З. Власов показал [6], что к интегрированию (1.1) сводится задача о расчете пологой оболочки.

Вывод разрешающего уравнения и расчетных формул в том виде, как они приведены здесь, можно найти в монографии [7] (ч. IV, § 20). Этот вывод основан на предположении, что функция W существенно увеличивается при дифференцировании, в связи с чем при упрощениях отбрасывались слагаемые, содержащие производные порядка $p-2$, по сравнению со слагаемыми, содержащими производные порядка p . Отсюда вытекает, что и в уравнении (1.1) в каждом отдельно взятом выражении достоверными можно считать только те слагаемые, которые содержат производные W самого высокого и следующего за ним порядков.

Введя обозначения

$$h^* = \frac{h}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{i}{\lambda} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{B}{A} \frac{1}{R_2'} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{R_{12}} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{R_{12}} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{A}{B} \frac{1}{R_2'} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \\ N &= \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right\} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right\} \end{aligned}$$

(λ — характерный радиус кривизны оболочки), запишем разрешающее уравнение так:

$$L(W) + h^* N(W) = 0 \quad (1.8)$$

Буквами L и N здесь обозначены линейные дифференциальные операторы порядка 2 и 4, соответственно. Выполнив необходимые дифференцирования и расположив слагаемые, входящие в L и N по нисходящим порядкам символов дифференцирования, получим

$$L(W) = \sum_{i=0}^{i=2} a_{2-i; i} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^{2-i} \partial \beta^i} + \sum_{i=0}^{i=1} a_{1-i; i} \frac{\partial W}{\partial \alpha^{1-i} \partial \beta^i} + a_{00}^{(2)} W \quad (1.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{20}^{(0)} &= \frac{i}{\lambda} \frac{1}{A^2 R_2'}, & a_{11}^{(0)} &= \frac{i}{\lambda} \frac{2}{ABR_{12}}, & a_{02}^{(0)} &= \frac{i}{\lambda} \frac{1}{B^2 R_1'} \\ a_{10}^{(1)} &= \frac{i}{\lambda} \frac{1}{AB} \left[\left(\frac{B}{AR_2'} \right)_\alpha + \left(\frac{1}{R_{12}} \right)_\beta \right], & a_{01}^{(1)} &= \frac{i}{\lambda} \frac{1}{AB} \left[\left(\frac{A}{B} \frac{1}{R_1'} \right)_\beta + \left(\frac{1}{R_{12}} \right)_\alpha \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

(Нижние индексы α , β обозначают дифференцирование по соответствующим переменным)

$$\begin{aligned} N(W) &= \sum_{i=0}^{i=4} b_{4-i; i} \frac{\partial^4 W}{\partial \alpha^{4-i} \partial \beta^i} + \sum_{i=0}^{i=2} b_{3-i; i} \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^{3-i} \partial \beta^i} + \sum_{i=0}^{i=2} b_{2-i; i} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^{2-i} \partial \beta^i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{i=1} b_{1-i; i} \frac{\partial W}{\partial \alpha^{1-i} \partial \beta^i} + b_{00}^{(4)} W \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_{40}^{(0)} &= \frac{1}{A^4}, & b_{31}^{(0)} &= 0, & b_{22}^{(0)} &= \frac{2}{A^2 B^2}, & b_{13}^{(0)} &= 0, & b_{04}^{(0)} &= \frac{1}{B^4} \\ b_{30}^{(1)} &= \frac{2}{AB} \left(\frac{B}{A^3} \right)_\alpha, & b_{21}^{(1)} &= \frac{2}{AB} \left(\frac{1}{AB} \right)_\beta \\ b_{12}^{(1)} &= \frac{2}{AB} \left(\frac{1}{AB} \right)_\alpha, & b_{03}^{(1)} &= \frac{2}{AB} \left(\frac{A}{B^3} \right)_\beta \end{aligned}$$

Для коэффициентов $a_{ij}^{(k)}$ и $b_{ij}^{(k)}$, в которых $k \geq 2$, формулы не выписаны, так как эти величины в рамках точности уравнения (1.1), в силу сказанного выше, приходится считать неизвестными.

§ 2. Будем считать, что система криволинейных координат, на срединной поверхности оболочки выбрана так, что линия, вблизи которой локализован исследуемый простой краевой эффект, включена в число β -линий, т. е. задается уравнением $\alpha = \text{const}$. Предполагается, что криволинейные координаты ортогональны; поэтому R_{12} обращается в бесконечность тогда и только тогда, когда речь идет о простом краевом эффекте, локализованном вблизи линии кривизны.

Решение характеристического уравнения будем искать в виде

$$W = W_* e^{kf} \quad (k = k^* - i/2) \quad (2.1)$$

где f не зависит от k и принимает нулевые значения при $\alpha = \alpha_0$. Будем полагать

$$W_* \sim W_0 + k^{-1} W_1 + k^{-2} W_2 + \dots + k^{-n} W_n + \dots \quad (2.2)$$

где $\{W_j\}$ — функции, не зависящие от k .

Не нарушая общности, можно считать, что

$$W_0 \neq 0 \quad (2.3)$$

В противном случае в ряде (2.2) можно было бы вынести k^{-1} за скобки и, отбросив этот постоянный множитель (несущественный при решении однородного уравнения), вернуться к прежнему результату. Относительно функций f и $\{W_j\}$ мы будем предполагать, что их можно разложить по переменной α в ряды Тейлора вблизи $\alpha = \alpha_0$, т. е. представить в виде

$$f = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \frac{(\alpha - \alpha_0)}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2!} + \dots \quad (2.4)$$

$$W_j = W_j \Big|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{\partial W_j}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \frac{\alpha - \alpha_0}{1!} + \dots \quad (2.5)$$

Форма решения (2.1) отражает физическую сущность решаемой задачи, т. е. известное свойство простого краевого эффекта, а следовательно, и функции W быстро затухать по мере удаления от линии $\alpha = \alpha_0$. Вдоль линии $\alpha = \alpha_0$ функция W в зависимости от граничных условий может изменяться с произвольной скоростью, но надо считать, что в направлении линии $\alpha = \alpha_0$ изменение W будет менее интенсивным, чем в перпендикулярном направлении, так как иначе краевой эффект утерит свои специфические свойства (см. монографию [7]). Относительно медленное изменение W вдоль $\alpha = \alpha_0$ находится в соответствии с принятым выше допущением

$$f|_{\alpha=\alpha_0} = 0$$

Теория простого краевого эффекта первого приближения в сущности основана на предположении, что можно сохранять только первые члены (а) в ряде (2.2) и (б) в рядах (2.4) и (2.5).

Предположение (б) сводится к допущению, что экспоненциальный множитель правильно выражает характер затухания простого краевого эффекта, так, что f и W_* практически достаточно построить только в весьма узкой полосе, примыкающей к $\alpha = \alpha_0$. При этом функцию f , влияющую на характер затухания, надо строить относительно точно, но изменением по α функции W_* и ее производных практически можно пренебречь. Основываясь на этом, мы будем в дальнейшем, так же как и в теории первого приближения, заменять эти величины их контурными значениями.

Основные погрешности вносит предположение (а). Уточнение теории первого приближения в этом пункте и составляет цель предлагаемой работы. В дальнейшем мы будем говорить о теориях простого краевого эффекта первого, второго и т. д. приближений в зависимости от того, сколько слагаемых сохраняется в ряде (2.2).

§ 3. Производная любого порядка p от функции W вида (2.1) представляет собой произведение экспоненциального множителя на полином степени p от k , поэтому

$$L(W) = k^2 \{L_0(W_*) + k^{-1}L_1(W_*) + k^{-2}L_2(W_*)\} e^{kf}$$

$$N(W) = k^4 \{N_0(W_*) + k^{-1}N_1(W_*) + k^{-2}N_2(W_*) + \\ + k^{-3}N_3(W_*) + k^{-4}N_4(W_*)\} e^{kf}$$

Внося сюда вместо W_* ряд (2.2) и расположив в фигурных скобках члены по нисходящим степеням k , получим

$$L(W) \sim k^2 \{N_0(W_0) + k^{-1} [L_0(W_1) + L_1(W_0)] + \dots + k^{-\sigma} [L_0(W_\sigma) + L_1(W_{\sigma-1}) + L_2(W_{\sigma-2})] + \dots\} e^{kf}$$

$$N(W) \sim k^4 \{N_0(W_0) + k^{-1} [N_0(W_1) + N_1(W_0)] + \dots + k^{-\sigma} [N_0(W_\sigma) + N_1(W_{\sigma-1}) + N_2(W_{\sigma-2}) + N_3(W_{\sigma-3}) + N_4(W_{\sigma-4})] + \dots\} e^{kf}$$

Подставим в (1.8) вместо $L(W)$ и $N(W)$ написанные выше выражения, учтем, что $h^* = k^{-2}$, сократим полученное уравнение на экспоненциальный множитель и потребуем, чтобы в левой части обратились в нуль коэффициенты при каждой степени k в отдельности. Получим бесконечную систему уравнений (более подробный вывод ее можно найти в [7])

$$\begin{aligned} [L_0 + N_0](W_0) &= 0 \\ [L_0 + N_0](W_1) + [L_1 + N_1](W_0) &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$[L_0 + N_0](W_\sigma) + [L_1 + N_1](W_{\sigma-1}) + [L_2 + N_2](W_{\sigma-2}) + N_3(W_{\sigma-3}) + N_4(W_{\sigma-4}) = 0$$

Здесь $[L_i + N_i]$ — операторы порядка i , смысл которых можно раскрыть, проделав описанные выше операции. В частности, $[L_0 + N_0]$ — оператор нулевого порядка, т. е. выражение, не содержащее символов дифференцирования, а так как было принято, что W_0 отлично от тождественного нуля, то из первого уравнения написанной выше системы мы получим

$$L_0 + N_0 = 0 \tag{3.2}$$

В силу этого остальные уравнения системы принимают вид:

$$[L_1 + N_1](W_0) = 0 \tag{3.3}$$

$$[L_1 + N_1](W_1) + [L_2 + N_2](W_0) = 0 \tag{3.4}$$

§ 4. Уравнение (3.2) в развернутом виде записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\lambda} \left[\frac{1}{A^2 R_2'} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{2}{ABR_{12}} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{1}{B^2 R_1'} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)^2 \right] + \\ + \frac{1}{A^4} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^4 + \frac{2}{A^2 B^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{1}{B^4} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)^4 = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Будем предполагать, что оно выполняется не только в области, соответствующей внутренним точкам оболочки, но при $\alpha = \alpha_0$. Выше было принято, что контурные значения f равны нулю, отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial f}{\partial \beta^r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots) \tag{4.2}$$

Поэтому, положив в (4.1) $\alpha = \alpha_0$, получаем

$$\frac{i}{\lambda} \frac{1}{A^2 R_2'} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{A^4} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^4 = 0 \quad (\alpha = \alpha_0) \tag{4.3}$$

(Взятое в скобки равенство $\alpha = \alpha_0$ здесь и всюду в дальнейшем служит напоминанием, что в соответствующем уравнении все величины надо заменять их контурными значениями.)

Можно показать, что если f и $\partial f/\partial\alpha$ обращаются в нуль на контуре $\alpha = \alpha_0$, то из уравнения (4.1) следует, что при $\alpha = \alpha_0$ будут равны нулю и все производные от f , т. е. f будет равно нулю тождественно по α . Это решение не соответствует смыслу решаемой задачи, и мы его отбросим. Тогда из уравнения (4.3) получается

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha} = \nu \frac{A}{\sqrt{\lambda R_2'}} \quad (\alpha = \alpha_0) \quad (4.4)$$

где

$$\nu = \sqrt{-i} = \mp \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad (4.5)$$

Продифференцируем (4.1) по α и положим в полученном равенстве $\alpha = \alpha_0$. Тогда, учтя (4.2), (4.4) и равенство, которое получается из (4.4) дифференцированием по β , будем иметь

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} = \frac{\nu}{2V\lambda} \sqrt{R_2'} \left\{ \frac{1}{A} \left(\frac{A^2}{R_2'} \right)_\alpha + \frac{R_2'}{R_{12}} \frac{1}{B} \left(\frac{A^2}{R_2'} \right)_\beta \right\} \quad (\alpha = \alpha_0) \quad (4.6)$$

Также можно последовательно получить контурные значения любой производной от f по α , т. е. построить для функции f ряд (2.4) с любой степенью точности (практически едва ли целесообразно удерживать в этом ряде более двух членов).

§ 5. Уравнение (3.3) в развернутом виде записывается так:

$$\begin{aligned} & \frac{2i}{\lambda} \left[\left(\frac{1}{A^2 R_2'} \frac{\partial f}{\partial\alpha} + \frac{1}{ABR_{12}} \frac{\partial f}{\partial\beta} \right) \frac{\partial W_0}{\partial\alpha} + \left(\frac{1}{ABR_{12}} \frac{\partial f}{\partial\alpha} + \frac{1}{B^2 R_1'} \frac{\partial f}{\partial\beta} \right) \frac{\partial W_0}{\partial\beta} \right] + \\ & + \frac{i}{\lambda AB} \left\{ \left[\left(\frac{B}{A} \frac{1}{R_2'} \right)_\alpha + \left(\frac{1}{R_{12}} \right)_\beta \right] \frac{\partial f}{\partial\alpha} + \left[\left(\frac{A}{B} \frac{1}{R_1'} \right)_\beta + \left(\frac{1}{R_{12}} \right)_\alpha \right] \frac{\partial f}{\partial\beta} \right\} W_0 + \\ & + \frac{i}{\lambda} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{B}{AR_2'} \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + \frac{2}{R_{12}} \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{A}{BR_1'} \frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} \right\} W_0 + \quad (5.1) \\ & + 4 \left\{ \frac{1}{A^2} \left[\frac{1}{A^2} \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} \right)^3 + \frac{1}{B^2} \frac{\partial f}{\partial\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial\beta} \right)^2 \right] \frac{\partial W_0}{\partial\alpha} + \frac{1}{B^2} \left[\frac{1}{A^2} \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial\beta} + \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial f}{\partial\beta} \right)^3 \right] \frac{\partial W_0}{\partial\beta} \right\} + \\ & + \frac{2}{AB} \left\{ \left(\frac{B}{A^3} \right)_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} \right)^3 + \left(\frac{1}{AB} \right)_\beta \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial\beta} + \left(\frac{1}{AB} \right)_\alpha \frac{\partial f}{\partial\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial\beta} \right)^2 + \left(\frac{A}{B^3} \right)_\beta \left(\frac{\partial f}{\partial\beta} \right)^3 \right\} W_0 + \\ & + \left\{ \frac{6}{A^4} \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + \frac{2}{A^2 B^2} \left(\frac{\partial f}{\partial\beta} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + \frac{8}{A^2 B^2} \frac{\partial f}{\partial\alpha} \frac{\partial f}{\partial\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{2}{A^2 B^2} \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} + \right. \\ & \left. + \frac{6}{B^4} \left(\frac{\partial f}{\partial\beta} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} \right\} W_0 = 0 \end{aligned}$$

Положив здесь $\alpha = \alpha_0$ и учитывая (4.2), получим

$$\begin{aligned} & \frac{2i}{\lambda} \left(\frac{1}{A^2 R_2'} \frac{\partial f}{\partial\alpha} \frac{\partial W_0}{\partial\alpha} + \frac{1}{ABR_{12}} \frac{\partial f}{\partial\alpha} \frac{\partial W_0}{\partial\beta} \right) + \frac{i}{\lambda AB} \left[\left(\frac{B}{A} \frac{1}{R_2'} \right)_\alpha + \left(\frac{1}{R_{12}} \right)_\beta \right] \frac{\partial f}{\partial\alpha} W_0 + \\ & + \left(\frac{i}{\lambda} \frac{1}{A^2 R_2'} \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + \frac{2i}{\lambda AB} \frac{1}{R_{12}} \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} \right) W_0 + \\ & + \frac{4}{A^4} \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} \right)^3 \frac{\partial W_0}{\partial\alpha} + \frac{2}{AB} \left(\frac{B}{A^3} \right)_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} \right)^3 W_0 + \frac{6}{A^4} \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} W_0 = 0 \quad (\alpha_0 = \alpha) \end{aligned}$$

Отсюда при помощи формулы (4.4) будем иметь

$$\frac{1}{A} \frac{\partial W_0}{\partial\alpha} = \frac{R_2'}{R_{12}} \frac{1}{B} \frac{\partial W_0}{\partial\beta} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \ln \frac{B}{\sqrt{R_2'^3}} - \frac{R_2'}{R_{12}} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \frac{\sqrt{R_2'^3}}{A^3 R_{12}} \right] W_0 \quad (5.2)$$

Дифференцируя уравнение (5.1) пужное число раз по переменной α , можно последовательно находить контурные значения производных от W по α любого порядка. Все они линейно выразятся через контурные значения W_0 и его производных по β .

В частности, таким образом нетрудно вывести, что

$$\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \alpha^2} = \frac{R_2'^2}{R_{12}^2} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \beta^2} + U \quad (5.3)$$

кроме того, продифференцировав обе части равенства (5.2) по β , получим

$$\frac{1}{AB} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{R_2'}{R_{12}} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \beta^2} + U \quad (5.4)$$

Здесь и в (5.3) через U обозначены члены, содержащие $\partial W_0 / \partial \beta$ и W_0 .

§ 6. Уравнение (3.4) в развернутом виде мы выписывать не будем, а приведем только то равенство, в которое оно превращается при $\alpha = \alpha_0$:

$$\begin{aligned} & \frac{2i}{\lambda} \left[\frac{1}{A^2 R_2'} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB R_{12}} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial W_1}{\partial \beta} \right] + \frac{i}{\lambda AB} \left[\left(\frac{B}{A} \frac{1}{R_2'} \right)_\alpha + \left(\frac{1}{R_{12}} \right)_\beta \right] \frac{\partial f}{\partial \alpha} W_1 + \\ & + \frac{i}{\lambda} \frac{1}{AB} \left[\frac{B}{A R_2'} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{2}{R_{12}} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \right] W_1 + \frac{4}{A^4} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^3 \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} + \frac{2}{AB} \left(\frac{B}{A^3} \right)_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^3 W_1 + \\ & + \frac{6}{A^4} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} W_1 = - \frac{i}{\lambda} \left[\frac{1}{A^2 R_2'} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \alpha^2} + \frac{2}{AB R_{12}} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \alpha \partial \beta} + \right. \quad (6.1) \\ & + \left. \frac{1}{B^2 R_1'} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \beta^2} \right] - \frac{i}{\lambda} \frac{1}{AB} \left\{ \left[\left(\frac{B}{A R_2'} \right)_\alpha + \left(\frac{1}{R_{12}} \right)_\beta \right] \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} + \left[\left(\frac{A}{B R_1'} \right)_\beta + \left(\frac{1}{R_{12}} \right)_\alpha \right] \frac{\partial W_0}{\partial \beta} \right\} - \\ & - a_{00}^{(0)} W_0 - \frac{1}{A^4} \left\{ 6 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial \alpha^2} + 12 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} + \right. \\ & + \left[4 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right] W_0 \left. \right\} - \frac{2}{A^2 B^2} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial \beta^2} + 4 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial W_0}{\partial \beta} + \right. \\ & + \left[2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right] W_0 \left. \right\} - \frac{2}{AB} \left(\frac{B}{A^3} \right)_\alpha \left[3 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} + \right. \\ & + 3 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} W_0 \left. \right] - \left(\frac{1}{A^2 B^2} \right)_\beta \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 \frac{\partial W_0}{\partial \beta} + \right. \\ & + \left. 2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} W_0 \right] - b_{20}^{(2)} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 W_0 \quad (\alpha = \alpha_0) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что контурное значение $\partial W_1 / \partial \alpha$ определяется при помощи (5.2), (5.3) и (5.4), как линейная функция контурных значений

$$W_1, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \beta}, \quad W_0, \quad \frac{\partial W_0}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial^2 W_0}{\partial \beta^2}$$

Однако разрешающее уравнение (1.1) не дает возможности обоснованно расшифровать эту зависимость, так как в соответствующую формулу войдут неизвестные величины $a_{00}^{(0)}$ и $b_{20}^{(2)}$.

Для дальнейшего существенно, что обе эти величины стоят множителями при W_0 , поэтому из (6.1) при помощи (5.2) и (5.3) можно вывести следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A} \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} = - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\nu} R_2'^{3/2} \left[\frac{3R_2'}{R_{12}^2} + \frac{2}{R_2'} - \frac{1}{R_1'} \right] \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \beta^2} + \frac{R_2'}{R_{12}} \frac{1}{B} \frac{\partial W_1}{\partial \beta} - \quad (6.2) \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \frac{B}{\sqrt{R_2'^3}} - \frac{R_2'}{R_{12}} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \frac{\sqrt{R_2'^3}}{A^2 R_{12}} \right] W_1 + \text{члены с } \frac{\partial W_0}{\partial \beta} \text{ и } W_0 \quad (\alpha = \alpha_0) \end{aligned}$$

в правой части которого неизвестным будет только коэффициент при W_0 .

§ 7. Выше был построен процесс, при помощи которого коэффициенты разложений (2.5) могут быть выражены через контурные значения W_0, W_1, W_2, \dots . Последние надо определять из граничных условий. Для конкретности рассмотрим этот вопрос для случая, когда на контуре $\alpha = \alpha_0$ заданы значения нормального прогиба w и угла поворота γ_1 . Будем считать, что $\alpha = \alpha_0$ является краем оболочки и что во внутренних точках срединной поверхности выполняется неравенство $\alpha - \alpha_0 > 0$. Если при этом вблизи $\alpha = \alpha_0$ нет какой-либо другой линии искажения напряженного состояния, то искомый простой краевой эффект должен быстро затухать при возрастании $\alpha - \alpha_0$. Отсюда следует, что из двух значений ν (4.5) надо выбрать то, при котором действительная часть f при $\alpha = \alpha_0 + 0$ будет отрицательной, т. е.

$$\nu = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Искомое напряженное состояние будет состояться как сумма двух напряженных состояний: одного, вызванного краевым нормальным прогибом, и другого, вызванного краевым углом поворота. Чтобы не усложнять формул, ограничимся построением первого из этих напряженных состояний, т. е. поставим такие граничные условия при $\alpha = \alpha_0$:

$$2Ehw = k^a \varphi(\beta), \quad 2Eh\gamma_1 = -\frac{2Eh}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0$$

Интеграл разрешающего уравнения был задан в виде (2.1), но так как дифференциальное уравнение однородно, то можно, введя постоянный множитель, записать

$$W = k^b W_* e^{kf} \quad (\alpha - \text{любое})$$

Отсюда

$$\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \alpha} = k^b \left(k \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} W_* + \frac{1}{A} \frac{\partial W_*}{\partial \alpha} \right) e^{kf} \quad (\alpha - \text{любое})$$

На контуре $f = 0$ и, следовательно, экспоненциальный множитель обращается в единицу; кроме того, W_* можно заменить его асимптотическим разложением, а величину $2Ehw$ выразить через W при помощи формулы (1.2). Следовательно, граничные условия можно записать так: при $\alpha = \alpha_0$.

$$k^b \operatorname{Re} \{ W_0 + k^{-1} W_1 + k^{-2} W_2 + \dots \} = \sqrt{\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}} k^a \varphi(\beta) \quad (7.1)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} W_0 + \frac{k^{-1}}{A} \left(\frac{\partial W_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} W_1 \right) + \frac{k^{-2}}{A} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} W_2 \right) + \dots \right\} = 0$$

Учитывая, что

$$\sqrt{\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}} = \lambda h^* = \lambda k^{-2}$$

закключаем, что b надо выбрать равным $a - 2$, так как иначе контурное значение W_0 , а вместе с ним и контурные значения всех производных W_0 будут обращаться в нуль и условие (2.3) не выполнится. Сократив первое из соотношений (7.1) на k^{a-2} и заменив во втором производную от f ее контурным значением

$$\frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1}{V \lambda R_2'} \quad (7.2)$$

получим

$$W_0 = \lambda(1 - i) \varphi(\beta) \quad (\alpha = \alpha_0)$$

$$\operatorname{Re} \{W_1\} = 0, \quad \operatorname{Im} \{W_1\} = \frac{V2\lambda R_2'}{A} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} \right\} \quad (\alpha = \alpha_0) \quad (7.3)$$

$$\operatorname{Re} \{W_2\} = 0, \quad \operatorname{Im} \{W_2\} = \frac{V2\lambda R_2'}{A} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} \right\} \quad (\alpha = \alpha_0) \quad (7.4)$$

.....

Отсюда при помощи таких формул, как (5.2) и (6.2), можно последовательно определить контурные значения W_0, W_1, W_2, \dots , т. е. завершить задачу об определении коэффициентов разложений (2.5).

Для рассмотренного случая граничных условий связь между контурными значениями W_1, W_2, W_3, \dots и контурными значениями W_0 выражается формулами вида

$$W_1 = p_{11} \frac{\partial W_0}{\partial \beta} + p_{10} W_0, \quad W_2 = p_{22} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \beta^2} + p_{21} \frac{\partial W_0}{\partial \beta} + p_{20} W_0 \dots \quad (7.5)$$

Можно показать, что вид этих формул сохраняется и при любых других граничных условиях, хотя, конечно, смысл коэффициентов p_{ij} изменится. В частном случае, когда $R_{12} = \infty$ при $\alpha = \alpha_0$, т. е. когда рассматриваемая линия искажения является линией кривизны, в формуле (5.2) член с $\partial W_0 / \partial \beta$ исчезает; в связи с этим обратится в нуль коэффициент p_{11} (при любых граничных условиях), однако p_{22} , как видно из формулы (6.2), при $R_{12} = \infty$ в нуль уже, вообще говоря, не обратится.

§ 8. Мы можем теперь проанализировать теории простого краевого эффекта различных приближений с точки зрения их асимптотических погрешностей.

Будем считать, что нас интересует только зона, непосредственно примыкающая к контуру $\alpha = \alpha_0$, т. е. будем судить о точности по контурным значениям W , или, что то же, по контурным значениям W_0 . Пусть граничные условия таковы, что показатель изменяемости искомого напряженного состояния в направлении контура $\alpha = \alpha_0$ равен ϑ , т. е.

$$\frac{\partial^n W_0}{\partial \beta^n} \approx h^{*-n\vartheta} W_0 \quad (\alpha = \alpha_0)$$

Здесь \approx — знак соизмеримости.

В теории i -го приближения в ряде (2.2) отбрасывается член $h^{-i} W_i$, который в силу формул (7.5) соизмерим с

$$h^{-i} h^{*-i\vartheta} W_0 = h^{*1/2 i - i\vartheta}$$

Отсюда вытекает, что асимптотическая погрешность теории i -го приближения будет порядка ¹

$$\varepsilon_i = h^{*1/2 i - i\vartheta}$$

В частности, для теории первого приближения

$$\varepsilon_1 = h^{*1/2 - \vartheta} \quad (8.1)$$

Оценка (8.1) теряет силу, когда линия искажения напряженного состояния $\alpha = \alpha_0$ проходит вдоль линии кривизны, так как тогда в первой

¹ Погрешности, содержащиеся в разрешающем уравнении, пока не принимаются в расчет.

из формул (7.5) коэффициент p_{11} обращается в нуль. В этом случае отбрасывание в ряде (2.2) члена $k^{-1}W_1$ приводит к асимптотической погрешности порядка

$$\varepsilon_1' = h^{*1/2}$$

а отбрасывание членов $k^{-n}W_n$ — к асимптотической погрешности порядка

$$\varepsilon_n = h^{*1/2}n^{-n\vartheta} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

Отсюда следует, что теория первого приближения при построении простого краевого эффекта вблизи линии кривизны приводит к асимптотической погрешности, порядок которой равен наибольшей из величин $\varepsilon_1', \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots$, т. е.

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} h^{*1/2} & \text{при } \vartheta \leq \frac{1}{4} \\ h^{*1-2\vartheta} & \text{при } \vartheta \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (8.1a)$$

Теория второго приближения приводит к асимптотической погрешности порядка

$$\varepsilon_2 = h^{*1-2\vartheta}$$

независимо от того, проходит или нет линия искажения вдоль линии кривизны.

Теория третьего приближения, основанная на разрешающем уравнении (1.1), вообще говоря, логически непоследовательна, так как в этой теории приходится пользоваться формулой (6.2), где не все коэффициенты можно считать известными. Однако если $\vartheta > 0$, то в правой части равенства (6.2) неизвестное нам слагаемое с W_0 будет мало по сравнению с другими, содержащими $\partial^2 W_0 / \partial \beta^2$ и $\partial W_0 / \partial \beta$. Поэтому можно построить «неполную» теорию третьего приближения, учитывая в выражении для W_2 только те слагаемые, которые зависят от $\partial^2 W_0 / \partial \beta^2$, или только те слагаемые, которые зависят от $\partial^2 W_0 / \partial \beta^2$ и $\partial W_0 / \partial \beta$. Первый из этих двух вариантов «неполной» теории третьего приближения (с учетом членов, зависящих только от $\partial^2 W_0 / \partial \beta^2$) не вносит больших осложнений в выкладки. Так, например, для граничных условий, рассмотренных в § 7, контурные значения W_1 и W_2 выражаются соответственно через контурные значения $\partial W_0 / \partial \alpha$ и $\partial W_1 / \partial \alpha$, а контурное значение $\partial W_0 / \partial \alpha$, как показывает (5.2), не зависит от $\partial^2 W_0 / \partial \beta^2$, поэтому в правой части равенства (6.2) достаточно сохранить только первые два слагаемых. Погрешность этого варианта «неполной» теории третьего приближения складывается:

а) из погрешности порядка $h^{*1-\vartheta}$ от отбрасывания членов, зависящих от $\partial W_0 / \partial \beta$ и W_0 в выражении для W_2 ;

б) из погрешностей порядков $h^{*2/2-3\vartheta}$, $h^{*2-4\vartheta}$, ... от отбрасывания соответственно W_3, W_4, \dots . Таким образом,

$$\varepsilon = \begin{cases} h^{*1-\vartheta} & \text{при } \vartheta \leq \frac{1}{4} \\ h^{*2/2-3\vartheta} & \text{при } \vartheta \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Второй вариант «неполной» теории третьего приближения (с учетом членов, зависящих от $\partial^2 W_0 / \partial \beta^2$ и $\partial W_0 / \partial \beta$) сопряжен со значительно

более громоздкими выкладками. Для него порядок асимптотической погрешности будет

$$\varepsilon = \begin{cases} h^{*1} & \text{при } \vartheta \leq \frac{1}{6} \\ h^{*2/3-3\vartheta} & \text{при } \vartheta \geq \frac{1}{6} \end{cases}$$

§ 9. Выведем формулы для расчета простого краевого эффекта по теории второго приближения. При этом в выкладках в каждом отдельно взятом соотношении или группе соотношений надо сохранять только члены, содержащие две самые высокие степени k (экспоненциальные множители в расчет не принимаются).

В группе формул (1.5), определяющих тензор тангенциальных усилий, в правых частях слагаемым, содержащим наивысшую степень k , будет то, в которое входит вторая производная от c по α . Соответственно в этих соотношениях мы будем учитывать только члены, в которых c дифференцируется по α по меньшей мере один раз. Тогда (1.5) примут вид:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial c}{\partial \alpha}, & T_2 &= \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \frac{\partial c}{\partial \alpha} \\ S_1 &= -S_2 = -\frac{1}{AB} \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial c}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (9.1)$$

Здесь и в дальнейшем подчеркнуты слагаемые, которые учитываются в теории первого приближения.

Также в группе формул (1.3), определяющих компоненты изгибной деформации, мы сохраним только те члены, в которых w дифференцируются по α минимум один раз. В результате формулы (1.4), определяющие тензор моментов, запишутся так:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\lambda^2}{k^4} \left\{ -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left[\frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial \alpha} - \frac{\sigma}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} (2Ehw) \\ G_2 &= \frac{\lambda^2}{k^4} \left\{ -\frac{\sigma}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left[-\frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{\sigma}{A^3} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} (2Ehw) \\ H_1 &= -H_2 = \frac{\lambda^2}{k^4} (1 - \sigma) \left\{ \frac{1}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} (2Ehw) \end{aligned} \quad (9.2)$$

Здесь величина $h^2/3(1 - \sigma^2)$ выражена через k и λ при помощи (1.7) и (2.1).

Формулы (1.6), определяющие вектор перерезывающих усилий, для теории второго приближения на тех же основаниях надо брать в виде

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{\lambda^2}{k^4} \left\{ \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + \frac{1}{B} \left(\frac{B}{A^3} \right)_\alpha \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right\} (2Ehw) \\ N_2 &= -\frac{\lambda^2}{k^4} \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right\} (2Ehw) \end{aligned} \quad (9.3)$$

Но по формулам (1.2), (1.7) и (2.1)

$$2Ehw = \frac{k^2}{\lambda} \operatorname{Re} \{W\}, \quad c = \operatorname{Im} \{W\}$$

Следовательно, выведенную группу формул надо пополнить соотношениями, определяющими производные от W . Имеем точные формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha} &= \left\{ k \frac{\partial f}{\partial \alpha} W_* + \frac{\partial W_*}{\partial \alpha} \right\} e^{kf} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} &= \left\{ k^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 W_* + k \left(2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial W_*}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} W_* \right) + \frac{\partial^2 W_*}{\partial \alpha^2} \right\} e^{kf} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta} &= \left\{ k^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \beta} W_* + k \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial W_*}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial W_*}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} W_* \right) + \frac{\partial^2 W_*}{\partial \alpha \partial \beta} \right\} e^{kf} \\ \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^3} &= \left\{ k^3 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^3 W_* + k^2 \left[3 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 \frac{\partial W_*}{\partial \alpha} + 3 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} W_* \right] + \right. \\ &\quad \left. + k \left[3 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 W_*}{\partial \alpha^2} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \frac{\partial W_*}{\partial \alpha} + \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3} W_* \right] + \frac{\partial^3 W_*}{\partial \alpha^3} \right\} e^{kf} \end{aligned} \quad (9.4)$$

В правых частях этих равенств в коэффициентах при экспоненциальных множителях мы будем, как было оговорено выше, заменять все входящие в них величины их контурными значениями и, в частности, считать f равным нулю. Кроме того, в теории второго приближения

$$W_* = W_0 + k^{-1} W_1$$

Отсюда вытекает, что формулы (9.4) для теории второго приближения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha} &= \left\{ k \frac{\partial f}{\partial \alpha} W_0 + \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} W_1 + \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} \right] \right\} e^{kf}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta} = \left\{ k \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial W_0}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} W_0 \right] \right\} e^{kf} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} &= \left\{ k^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 W_0 + k \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 W_1 + 2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} W_0 \right] \right\} e^{kf} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^3} &= \left\{ k^3 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^3 W_0 + k^2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^3 W_1 + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} + 3 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} W_0 \right] \right\} e^{kf} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Здесь контурные значения величин $\partial f / \partial \alpha$ и $\partial^2 f / \partial \alpha^2$ определяются формулами (4.4) и (4.6). Контурное значение $\partial^2 f / \partial \alpha \partial \beta$ находится путем дифференцирования обеих частей равенства (4.4) по β . Контурные значения W_0 и W_1 , а следовательно, и их производных по β , определяются из граничных условий. Для контурных значений $\partial W_0 / \partial \alpha$ мы имеем формулу (5.2).

Функцию f , стоящую в показателе экспоненциального множителя, конечно, нельзя заменять ее контурным значением, а надо вычислять при помощи ряда (2.4), в котором, вероятно, наиболее рационально сохранить первые два члена.

§ 10. В этом параграфе в качестве примеров выводятся формулы (9.5) для оболочек конкретной формы.

Цилиндрическая оболочка произвольного очертания. Отнеся срединную поверхность оболочки к обычной системе криволинейных координат, в которой координатными линиями являются прямолинейные образующие и направляющие кривые, получим $A = B = 1$, $R_1' = R_{12} = \infty$, $R_2' = \rho$, где α — длина дуги вдоль образующей, β — длина дуги вдоль направляющей кривой, а ρ — радиус кривизны поперечного сечения.

Формулы (4.4), (4.6), (5.2) показывают, что если принять $\lambda = \rho$, то

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{v}{\rho}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} = 0 \quad (\alpha = \alpha_0)$$

Отсюда на основании (9.5) заключаем, что

$$W = (\underline{W}_0 + k^{-1}W_1) e^{kf}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{kv}{\rho} (\underline{W}_0 + k^{-1}W_1) e^{kf}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial \beta} = kv \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial W_0}{\partial \beta} + \left(\frac{1}{\rho} \right)_\beta W_0 \right] e^{kf}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} = \frac{k^2 v^2}{\rho^2} (\underline{W}_0 + k^{-1}W_1) e^{kf}, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^3} = \frac{k^3 v^3}{\rho^3} (\underline{W}_0 + k^{-1}W_1) e^{kf}$$

Если в этих соотношениях положить $W_0 + k^{-1}W_1 = W_0$, то они перейдут в формулы теории первого приближения (в формуле для смешанной производной W , где сохраняются только главные члены, смысл W_0 не изменяется). Итак, при расчете простого краевого эффекта, возникающего вблизи поперечного сечения цилиндрической оболочки, теории первого и второго приближений не отличаются одна от другой.

Круговая коническая оболочка. В качестве координатных линий на срединной поверхности такой оболочки выберем образующие конуса и его направляющие окружности. Тогда

$$A = 1, \quad B = \alpha \sin \theta, \quad R_1' = R_{12} = \infty, \quad R_2' = \alpha \operatorname{tg} \theta$$

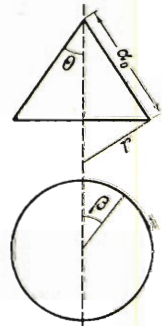
где α — длина дуги вдоль образующей, отсчитываемая от вершины, β — угловое расстояние вдоль направляющей окружности, θ — половина угла раствора конуса. Обозначив через r значение, которое принимает на $\alpha = \alpha_0$ главный радиус кривизны конуса ($r = \alpha_0 \operatorname{tg} \theta$), получим при помощи (4.4), (4.6), (5.2)

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{v}{r}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = -\frac{v \operatorname{tg} \theta}{2r^2}, \quad \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{4r} W_0 \quad (\alpha_0 = \alpha_0)$$

Формулы (9.5) для конической оболочки примут вид:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \left\{ k \frac{v}{r} W_0 + \frac{v}{r} W_1 + \frac{\operatorname{tg} \theta}{4r} W_0 \right\} e^{kf}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} = \left\{ k^2 \frac{v^2}{r^2} W_0 + k \frac{v^2}{r^2} W_1 \right\} e^{kf}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^3} = \left\{ k^3 \frac{v^3}{r^3} W_0 + k^2 \left[\frac{v^3}{r^3} W_1 - \frac{3v^2}{4r^3} \operatorname{tg} \theta W_0 \right] \right\} e^{kf}$$



Фиг. 1

Сферическая оболочка. Срединную поверхность оболочки отнесем к изотермическим географическим координатам. Координатными линиями в этой системе являются меридианы и параллели, а коэффициенты первой квадратичной формы и радиусы кривизны определяются формулами

$$A = B = \frac{r}{\operatorname{ch} \alpha}, \quad R_1' = r, \quad R_{12} = \infty, \quad R_2' = r$$

Здесь $\alpha = \ln \operatorname{tg} \varphi / 2$, φ — полярное расстояние, β — долгота, r — радиус сферы. В этом случае получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{v}{\operatorname{ch} \alpha_0}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = -v \frac{\operatorname{sh} \alpha_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha_0}, \quad \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} = \frac{\operatorname{tg} h \alpha_0}{2} W_0 \quad (\alpha = \alpha_0)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \left\{ k \frac{v}{\operatorname{ch} \alpha_0} W_0 + \left[\frac{v}{\operatorname{ch} \alpha_0} W_1 + \frac{\operatorname{tg} h \alpha_0}{2} W_0 \right] \right\} e^{kf}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} = \left\{ k^2 \frac{v^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha_0} W_0 + k \frac{v^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha_0} W_1 \right\} e^{kf}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^3} = \left\{ k^3 \frac{v^3}{\operatorname{ch}^2 \alpha_0} W_0 + k^2 \left[\frac{v^3}{\operatorname{ch}^3 \alpha_0} W_1 - \frac{3v^2}{2r^3} \frac{\operatorname{sh} \alpha_0}{\operatorname{ch}^3 \alpha_0} W_0 \right] \right\} e^{kf}$$

Преобразуем полученные формулы, введя новое независимое переменное, при помощи равенства

$$s = \frac{r}{\operatorname{ch} \alpha_0} \alpha$$

Геометрический смысл параметра s легко вскрыть при помощи формулы для дифференциала длины дуги α — линии сферы:

$$ds_\alpha = A d\alpha = \frac{r d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha}$$

отсюда вытекает, что s — длина дуги меридиана в окрестности рассматриваемой параллели $\alpha = \alpha_0$. Заметив, что $\operatorname{sh} \alpha_0 = -\operatorname{ctg} \varphi_0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{v}{r}, & \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= \frac{v}{r^2} \operatorname{ctg} \varphi_0, & \frac{\partial W_0}{\partial s} &= -\frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{2r} W_0 \quad (s = s_0) \\ \frac{\partial W}{\partial s} &= \left\{ \frac{kv}{r} W_0 + \left[\frac{v}{r} W_1 - \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{2r} W_0 \right] \right\} e^{kf}, & \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} &= \left\{ \frac{k^2 v^2}{r^2} W_0 + k \frac{v^2}{r^2} W_1 \right\} e^{kf} \\ \frac{\partial^3 W}{\partial s^3} &= \left\{ \frac{k^3 v^3}{r^3} W_0 + k^2 \left[\frac{v^3}{r^3} W_1 + \frac{3v^2}{2r^3} \operatorname{ctg} \varphi_0 W_0 \right] \right\} e^{kf} \end{aligned}$$

В § 8 даны оценки асимптотических погрешностей, т. е. установлено только, с какой скоростью убывают ошибки с убыванием h^* . Полученные формулы позволяют внести некоторые уточнения. Мы видим, что для сферической и конической оболочек в поправочных членах при W_0 стоят, кроме k^{-1} , множители, возрастающие по мере отклонения φ_0 от $1/2\pi$ и θ от нуля, т. е. по мере того, как оболочки становятся более пологими. Это показывает, что в полой оболочке, где использованные здесь специфические свойства чистого краевого эффекта утрачиваются, истинные погрешности теории первого приближения возрастают.

При $\varphi_0 = 1/2\pi$ (полусферическая оболочка), когда полоса, в которой строится краевой эффект, имеет наибольшую подъемистость, теория первого приближения не отличается от теории второго приближения.

Замечание. Как показывают примеры сферической и конической оболочек, подъемистость полоски рационально измерять тангенсом угла ψ , который составляет линия с соприкасающейся плоскостью линии $\alpha = \alpha_0$.

Поступила 6 II 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. О применении метода асимптотического интегрирования к расчету упругих оболочек. Известия Киевского политехнического и сельскохозяйственного институтов, кн. 1, вып. 2, 1924.
2. Geckeler J. W. Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen. Forschungsarbeiten auf dem Gebiet d. Ingenieurwesens, № 276, 1926.
3. Работнов Ю. Н. Уравнения пограничной зоны в теории оболочек. ДАН СССР, т. XVII, № 5, 1945.
4. Гольденвейзер А. Л. Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки. ПММ, т. IX, вып. 6, 1945. Некоторые приемы интегрирования уравнений теории тонких оболочек. ПММ, т. X, вып. 3, 1946.
5. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
6. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения обшей теории упругих оболочек. ПММ, т. VIII, вып. 2, 1944.
7. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.