

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. В. Соколовский

(Москва)

Пластическое течение в непосредственной близости от граничной кривой, на которой контактное касательное напряжение равно пределу текучести, т. е. в некотором узком пограничном слое, отличается известными особенностями, представляющими существенный интерес. Оно может быть исследовано в криволинейных координатах, соответствующих форме граничной кривой.

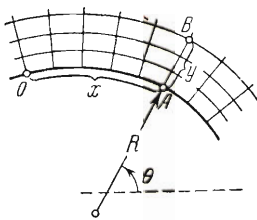
Возьмем сначала ортогональные криволинейные координаты α и β общего вида и обозначим через H_α и H_β соответствующие коэффициенты Ламе. Напомним, что квадрат бесконечно малого элемента длины dl выражается так:

$$dl^2 = H_\alpha^2 d\alpha^2 + H_\beta^2 d\beta^2$$

Напряжения в координатах α и β определяются компонентами σ_α , σ_β , $\tau_{\alpha\beta}$, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\beta \sigma_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\alpha \tau_{\alpha\beta}) - \sigma_\beta \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} + \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\beta \tau_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\alpha \sigma_\beta) + \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} - \sigma_\alpha \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

а скорости — компонентами ε_α , ε_β , $\gamma_{\alpha\beta}$, связанными с компонентами скорости v_α , v_β дифференциальными соотношениями



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{H_\alpha} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} \right) \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{H_\beta} \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + \frac{v_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} \right) \\ 2\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v_\beta}{H_\beta} \right) + \frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v_\alpha}{H_\alpha} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Выберем теперь за координаты α и β соответственно длину x дуги граничной кривой OA и длину y нормали AB (фиг. 1), т. е. положим $\alpha = x$ и $\beta = y$. Так обычно поступают при изучении пограничного слоя в гидромеханике [1].

Нетрудно видеть, что если через $R = R(x) = -dx/d\theta$ обозначить радиус кривизны контура в точке A , то квадрат бесконечно малого элемента длины dl напишется так:

$$dl^2 = \left[1 + \frac{y}{R(x)}\right]^2 dx^2 + dy^2$$

а потому коэффициенты Ламе будут

$$H_\alpha = H = 1 + \frac{y}{R(x)}, \quad H_\beta = 1$$

Принимая в дальнейшем указанные ортогональные криволинейные координаты x и y , будем обозначать

$$\sigma_\alpha = \sigma_x, \quad \sigma_\beta = \sigma_y, \quad \tau_{\alpha\beta} = \tau_{xy}; \quad \varepsilon_\alpha = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_\beta = \varepsilon_y, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{xy}; \quad v_\alpha = u, \quad v_\beta = v$$

Не следует, конечно, смешивать эти координаты x и y с прямоугольными прямолинейными координатами, которые обычно обозначаются теми же буквами.

Теперь дифференциальные уравнения равновесия (1) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + H \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{2\tau_{xy}}{R} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + H \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{R} = 0 \quad (3)$$

а дифференциальные соотношения (2) будут

$$\varepsilon_x = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R} \right), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 2\gamma_{xy} = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{R} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

Примем обычное условие пластичности

$$\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2$$

и выразим компоненты напряжения через две новые величины σ и φ следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \sigma \pm k \cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = k \sin 2\varphi \quad (5)$$

Возьмем также обычные зависимости между компонентами напряжения и компонентами скорости деформации:

$$\frac{2\varepsilon_x}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\varepsilon_y}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\gamma_{xy}}{\tau_{xy}} \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения (3) на основании (5) могут быть без всякого труда преобразованы к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{R} \right) \sin 2\varphi - H \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos 2\varphi \right] &= 0 \\ H \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2k \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{R} \right) \cos 2\varphi + H \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin 2\varphi \right] &= 0 \end{aligned}$$

а дифференциальные соотношения (4) вследствие (6) представлены так:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R} \right) \sin 2\varphi - \left(\frac{\partial v}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{R} \right) \cos 2\varphi &= 0 \\ 2H \frac{\partial v}{\partial y} \sin 2\varphi + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{R} \right) \cos 2\varphi &= 0 \end{aligned}$$

После некоторых простых преобразований нетрудно вывести систему уравнений

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mp 2k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{R} \right) \right] + H \left[\frac{\partial \sigma}{\partial y} \mp 2k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \operatorname{tg} \left(\varphi \mp \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad (7)$$

а также систему уравнений

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R} + \frac{\partial v}{\partial x} \operatorname{tg} \left(\varphi \mp \frac{\pi}{4} \right) \right] + \left[H \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{R} + H \frac{\partial v}{\partial y} \operatorname{tg} \left(\varphi \mp \frac{\pi}{4} \right) \right] \operatorname{tg} \left(\varphi \mp \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad (8)$$

Эти системы уравнений принадлежат к гиперболическому типу, а их характеристики, определяются уравнениями

$$dy = H dx \operatorname{tg} \left(\varphi \mp \frac{\pi}{4} \right), \quad \sigma \mp 2k (\varphi + \theta) = \text{const} \quad (9)$$

Характеристики на плоскости координат x и y образуют два ортогональных семейства и совпадают с линиями скольжения.

Исследуем узкий пограничный слой, предполагая, что границей является кривая $y = 0$, на которой $\tau_{xy} = k$, и покажем, что в этом слое могут быть получены приближенные интегралы основных уравнений.

Такая граничная кривая $y = 0$ должна быть огибающей характеристик — линий скольжения, если она, конечно, не совпадает с одной из них, так как вследствие (5) с точностью до числа, кратного π , угол $\varphi = 1/4 \pi$.

Будем полагать, что вдоль кривой $y = 0$ величина $\sigma = \sigma(x)$, а компоненты скорости $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Тогда согласно (4) компонента скорости деформации

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x) = u'(x) + \frac{v(x)}{R} \quad (10)$$

Отметим, что если границей служит неподвижная стенка, то

$$v(x) = 0, \quad \varepsilon_x(x) = u'(x)$$

Займемся сначала определением приближенных выражений величин σ и φ или компонент напряжения вблизи стенки. С этой целью положим

$$\sigma(x) = 2ks(x), \quad \sigma = 2k[s(x) + S], \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \Phi$$

и будем предполагать, что S , Φ и y являются малыми величинами. Тогда на основании (5) приближенно можно написать

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = 2k[s(x) + S \mp \Phi], \quad \tau_{xy} = k(1 - 2\Phi^2) \quad (11)$$

Внесем σ и φ в уравнения (7), а затем оценим порядок различных членов и отбросим те из них, которые малы по сравнению с остальными. В результате соответствующих выкладок приближенно получим

$$\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial y} \right] \Phi = s'(x) + \frac{1}{R} \quad (12)$$

Первое уравнение и граничные условия $S = \Phi = 0$ при $y = 0$ уравнивают, что

$$S = -\Phi \quad (13)$$

а второе уравнение сразу же преобразуется:

$$\frac{\partial \Phi^2}{\partial y} = s'(x) + \frac{1}{R}$$

Оно должно быть проинтегрировано с учетом граничного условия $\Phi = 0$ при $y = 0$, что окончательно дает

$$\Phi^2 = \left[s'(x) + \frac{1}{R} \right] y \quad (14)$$

причем $s'(x) \geq -1/R$, так как $y \geq 0$.

Перейдем теперь к выводу приближенных выражений компонент скорости u и v . Для этого положим

$$u = u(x) + U, \quad v = v(x) + V$$

и будем считать U и V малыми величинами.

Подставим u и v в уравнения (8), а затем опять-таки оценим порядок входящих членов и опустим те из них, которые малы по сравнению с остальными. После таких рассуждений приближенно найдем

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{u(x)}{R} \right] \Phi = -\varepsilon_x(x), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\varepsilon_x(x)$$

Первое уравнение на основании (14) может быть проинтегрировано с учетом условия $U = 0$ при $y = 0$ в виде

$$U = \left[\frac{u(x)}{R} - \frac{2}{\Phi} \varepsilon_x(x) \right] y \quad (15)$$

а второе уравнение и граничное условие $V = 0$ при $y = 0$ определяют

$$V = -\varepsilon_x(x) y \quad (16)$$

Нетрудно дать оценку порядка малости полученных величин в непосредственной близости от границы. Ясно, что величины S , Φ , $U \sim \sqrt{y}$, а величина $V \sim y$.

Теперь можно получить уравнения характеристик — линий скольжения в узком пограничном слое, если переписать уравнения (9) в виде

$$s(x) + S \mp (\Phi + \theta) = \text{const}$$

а затем использовать (13) и (14).

Одна линия скольжения, проходящая через какую-нибудь точку $x = x_0$, $y = 0$ на граничной кривой, представляет собой прямую $x = x_0$ или $\theta = \theta_0$, а другая линия скольжения — кривую

$$y = \frac{[s(x) - s(x_0) - (\theta - \theta_0)]^2}{4[s'(x) + 1/R(x)]}$$

Эта кривая, как легко установить путем разложения правой части по степеням $x - x_0$ и пренебрежения малыми членами, может быть приближенно определена в виде

$$y = \frac{1}{4} \left[s'(x_0) + \frac{1}{R(x_0)} \right] (x - x_0)^2$$

Соберем предыдущие результаты. Компоненты напряжения в пограничном слое выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2k \left[s(x) + \sqrt{2 \left(s'(x) + \frac{1}{R} \right) y} \right], & \sigma_y &= 2ks(x) \\ \tau_{xy} &= k \left[1 - 2 \left(s'(x) + \frac{1}{R} \right) y \right] \end{aligned} \quad (17)$$

а компоненты скорости даются так:

$$u = u(x) \left(1 + \frac{y}{R} \right) + \frac{\kappa 2\varepsilon_x(x)}{\sqrt{s'(x) + 1/R}} \sqrt{y}, \quad v = v(x) - \varepsilon_x(x) y \quad (18)$$

причем знак

$$\kappa = \text{sign}(\sigma_x - \sigma_y) = \pm 1.$$

Линиями скольжения в том же пограничном слое являются прямые $x = x_0$ и кривые

$$y = \frac{1}{4} \left[s'(x_0) + \frac{1}{R(x_0)} \right] (x - x_0)^2, \quad x_0 = \text{const}$$

имеющие огибающую, граничную кривую $y = 0$.

Сделаем некоторые выводы из формул (17) и (18). Обратим внимание, что компонента напряжения $\sigma_y = 2ks(x)$ не зависит от y , а следовательно, не меняется по нормали к граничной кривой и равна своему значению на ней.

Отметим, что при пластическом течении вдоль неподвижной стенки невозможно прилипание, т. е. что пластическое течение в пограничном слое, независимо от шероховатости стенки, всегда сопровождается некоторым проскальзыванием по контактной кривой.

Действительно, полагая $u(x) = v(x) = 0$, на основании (18) обнаружим, что компоненты скорости $u = v = 0$ и пластического течения нет.

Выясним также поведение компонент скорости деформации вблизи от границы. Об этом можно судить по приближенным зависимостям

$$\frac{\varepsilon_y}{\gamma_{xy}} = -\frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}} = 2\Phi$$

которые следуют из (5) и (6).

В качестве первого примера рассмотрим плоское полярно симметричное вихревое пластическое течение вне граничной окружности $r = a$.

Решение этой задачи в полярных координатах r и θ было получено А. Надаи. Используя принятые здесь криволинейные координаты x и y , будем обозначать

$$\sigma_r = \sigma_y, \quad \sigma_\theta = \sigma_x, \quad \tau_{r\theta} = -\tau_{xy}, \quad v_r = v, \quad v_\theta = -u$$

Компоненты напряжения содержат произвольную постоянную σ_0 и определяются в таком виде:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \sigma_0 + \kappa k \left[\ln \left(\frac{r^2}{a^2} + \sqrt{\frac{r^4}{a^4} - 1} \right) \pm \sqrt{1 - \frac{a^4}{r^4}} \right], \quad \tau_{xy} = k \frac{a^2}{r^2} \quad (19)$$

а компоненты скорости содержат произвольные постоянные u_0 , n и даются следующим образом:

$$u = \frac{r}{a} \left[u_0 + n \sqrt{1 - \frac{a^4}{r^4}} \right], \quad v = \kappa n \frac{a}{r} \quad (20)$$

так что компонента

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) = \frac{na^3}{r^2 \sqrt{r^4 - a^4}}$$

Вблизи граничной окружности $r = a$, т. е. при малых $y = r - a$, предыдущие выражения могут быть приближенно заменены более простыми. Вместо (19) найдем

$$\sigma_x = \sigma_0 + \kappa 4k \sqrt{\frac{y}{a}}, \quad \sigma_y = \sigma_0, \quad \tau_{xy} = k \left(1 - 2 \frac{y}{a}\right)$$

а вместо (20) будем иметь

$$u = u_0 \left(1 + \frac{y}{a}\right) + 2n \sqrt{\frac{y}{a}}, \quad v = \kappa n \left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

так что компонента

$$\gamma_{xy} \approx \frac{n}{2\sqrt{ay}}$$

Легко также убедиться, что при малых y линиями скольжения приближенно служат радиальные прямые $x = x_0$ или $\theta = \theta_0$ и кривые

$$y = \frac{1}{4a} (x - x_0)^2, \quad x_0 = \text{const}$$

Те же выражения следуют из формул (17) и (18), если принять

$$R = a, \quad \sigma(x) = 2ks(x) = \sigma_0, \quad u(x) = u_0, \quad v(x) = \kappa n$$

Рассмотрим теперь узкий пограничный слой, считая, что границей служит прямая $y = 0$ на которой поперечному $\tau_{xy} = k$. Предыдущие формулы несколько упростятся, так как при этом радиус кривизны $R = \infty$, а x и y переходят в обычные прямоугольные прямолинейные координаты.

Нетрудно видеть, что компоненты напряжения в пограничном слое напишутся так:

$$\sigma_x = 2k [s(x) + \kappa 2 \sqrt{s'(x)y}], \quad \sigma_y = 2ks(x), \quad \tau_{xy} = k [1 - 2s'(x)y] \quad (21)$$

а компоненты скорости будут

$$u = u(x) + \frac{\kappa 2u'(x)}{\sqrt{s'(x)}} \sqrt{y}, \quad v = v(x) - u'(x)y \quad (22)$$

причем поперечному знак

$$\kappa = \text{sign}(\sigma_x - \sigma_y) = \pm 1.$$

Линиями скольжения в том же слое служат прямые $x = x_0$ и параболы

$$y = \frac{1}{4} s'(x_0) (x - x_0)^2, \quad x_0 = \text{const}$$

имеющие огибающую — граничную прямую $y = 0$.

В качестве второго примера разберем одностороннее пластическое течение между двумя параллельными шероховатыми стенками $y = \mp b$, возникающее в результате их приближения или удаления.

Решение этой задачи было получено Л. Прандтлем в простой замкнутой форме. Компоненты напряжения содержат произвольную постоянную σ_0 и определяются в виде

$$\sigma_x = \sigma_0 + k \frac{x}{b} + \kappa 2k \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, \quad \sigma_y = \sigma_0 + k \frac{x}{b}, \quad \tau_{xy} = -k \frac{y}{b} \quad (23)$$

а компоненты скорости содержат произвольные постоянные u_0 , v_0 , n и выражаются следующим образом:

$$u = u_0 + \kappa n \frac{x}{b} + 2n \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, \quad v = v_0 - \kappa n \frac{y}{b} \quad (24)$$

так что компонента

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{ny}{b \sqrt{b^2 - y^2}}$$

В непосредственной близости от стенки $y = -b$, т. е. при малых $y_1 = y + b$, предыдущие выражения могут быть заменены приближенными. Считая ту же стенку неподвижной, примем $v_0 = -\kappa n$.

Вместо (23) получим

$$\sigma_x = \sigma_0 + k \frac{x}{b} + \kappa 4k \sqrt{\frac{y_1}{2b}}, \quad \sigma_y = \sigma_0 + k \frac{x}{b}, \quad \tau_{xy} = k \left(1 - \frac{y_1}{b} \right)$$

а вместо (24) найдем

$$u = u_0 + \kappa n \frac{x}{b} + 4n \sqrt{\frac{y_1}{2b}}, \quad v = -\kappa n \frac{y_1}{b}$$

так что компонента

$$\gamma_{xy} \approx \frac{n}{\sqrt{2by_1}}$$

Нетрудно также показать, что при малых y_1 линиями скольжения приближенно являются прямые $x = x_0$ и параболы

$$y_1 = \frac{1}{8b} (x - x_0)^2, \quad x_0 = \text{const}$$

Те же выражения могут быть сразу установлены и по формулам (21) и (22), если заменить y на y_1 и положить

$$\sigma(x) = 2ks(x) = \sigma_0 + k \frac{x}{b}, \quad u(x) = u_0 + \kappa n \frac{x}{b}, \quad v(x) = 0$$

Решение (23) и (24) изучал А. А. Ильюшин^[2] и высказал ряд соображений о поведении компонент **напряжения** и скорости вблизи от **стенки**. Так, например, он отметил, что при пластическом течении прилипание на стенке невозможно.

В заключение отметим еще раз, что полученные выше интегралы уравнений пластичности справедливы лишь в узком слое вдоль граничной кривой — огибающей линии скольжения; они могут быть использованы при решении многих задач.

Поступила 12 III 1956

Институт механики

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат, 1948.
2. Ильюшин А. А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхности. ПММ т. XVIII, вып. 3, 1954.