Прикладная математика и механика. Том XX 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПРИМЕНЕНИИ ВТОРОГО МЕТОДА А. М. ЛЯПУНОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ВРЕМЕНИ

Н. Н. Красовский
(Свердловск)

В работе приводится один способ обобщения метода функций Ляпунова на уравнения с запаздываниями времени.

§ 1. Рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t - h_{i1}(t)), \ \ldots, \ x_n(t - h_{in}(t)), \ t)$$
$$X_i(0, \ \ldots, \ 0, \ t) = 0 \qquad \text{при } t \geqslant 0 \quad (i = 1, \ \ldots, \ n) \tag{1.1}$$

Функции X_i определены, непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица

$$| X_i(x_1'', \ \ldots, \ x_n'', \ t) - X_i(x_1', \ \ldots, \ x_n', \ t) | < L \sum_{i=1}^{n} | x_j'' - x_j' | \tag{1.2}$$

в области

$$| x_i | < H \qquad (H = \text{const}) \tag{1.3}$$

Величины запаздывания $h_{ij}(t)$ — кусочно-непрерывные функции[1]

$$0 \leqslant h_{ij}(t) \leqslant h_j \qquad (h_j = \text{const}) \tag{1.4}$$

В точках разрыва h_{ij} в уравнениях (1.1) символ dx_i/dt означает правую производную, а траектории — продолженными по непрерывности.

Непосредственное применение теорем Ляпунова [1] для уравнений (1.1) целесообразно лишь в отдельных случаях (например, [2] при малых h_{ij}), так как в общем случае теоремы второго метода Ляпунова для уравнений (1.1) необратимы [3]. В этой заметке указывается один способ обобщения метода функций Ляпунова на уравнения (1.1). При этом траектории (1.1) рассматриваются в функциональном пространстве.

Именно, так как траектория (1.1) при $t \geqslant t_0$ определяется функциями $x_i(t_0 - \vartheta)$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant h_i)$, то в качестве элемента траектории $x_i(x_1(t_0 - \vartheta), \ldots, x_n(t_0 - \vartheta), t)$, соответствующего времени t, примем n функций $x_i(t - \tau) = x_i \quad (x_1(t_0 - \vartheta), \ \ldots, \ x_n(t_0 - \vartheta), \ t - \tau) \quad (0 \leqslant \tau \leqslant h_i)$. Роль функций Ляпунова $v(x_1, \ \ldots, \ x_n, \ t)$ будут играть функционалы $V(y_1(-\tau), \ldots, \ y_n(-\tau), \ t)$, определенные на функциях $y_i(-\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant h_i)$.

В дальнейшем во всех формулах переменные ϑ и τ как аргументы x_i, y_i меняются в пределах отрезка $[0, \ h_i]$.

Отметим особенность исследования уравнений (1.1) на устойчивость. Уравнения (1.1) являются уравнениями возмущенного движения, состав-

[1] При этом, в точках разрыва функции h_{ij} предполагается существование левого и правого пределов.

ленными для возмущений, которые могли иметь место при $t \leqslant t_0$. При этом в реальном объекте, описываемом уравнениями (1.1), может не быть возмущений при $t < t_0$, соответствующих некоторым начальным кривым $x_i(t_0 - \vartheta)$, определяющим траекторию (1.1) при $t \geqslant t_0$. Это противоречие объясняется, в частности, тем обстоятельством, что уравнения (1.1) описывают возмущенное движение после действия сил, вызвавших начальное отклонение, а вблизи момента $t = t_0$ в реальном объекте действуют возмущающие силы, поэтому характер функций X_i и h_{ij} фактически является сложным и часто неизвестен. В случае отсутствия запаздываний эта трудность снимается тем, что, не нарушая общности задачи, возмущенные движения можно рассматривать с момента $t = t_1 > t_0$ (Ляпунов [1], стр. 82), так как любым начальным данным $x_i(t_1)$ соответствуют возмущения $x_i(t_0)$, лежащие на той же возмущенной траектории. В случае уравнений с запаздываниями фактические возмущения при $t = t_0$ могут определить лишь узкий класс начальных кривых $x_i(t_1 - \vartheta)$ при $t_1 > h + t_0$, $h = \max h_i$, относительно которых и следует изучать устойчивость. Если требовать устойчивости решения $x_i = 0$ относительно всевозможных кривых $x_i(t_1 - \vartheta)$ из окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$, то для конкретных задач условия устойчивости могут оказаться непомерно узкими.

В качестве иллюстрации этого рассмотрим простой пример:

$$\frac{dx}{dt} = x(t) - \mu(t)\, x(t - h(t)), \qquad \mu(t) = 2e^{-h(t)} \tag{1.5}$$

где

$$h(t) = {}^1\!/_2 t \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 2, \qquad h(t) = 1 \quad \text{при } t \geqslant 2$$

Решения (1.5), соответствующие всевозможным начальным данным x_0 при $t_0 = 0$, имеют вид $x(t) = x_0 e^{-t}$ и, следовательно, решение $x = 0$ устойчиво. Если рассматривать уравнение (1.5) при $t \geqslant t_1 = 3$, допуская любые начальные кривые $x(3 - \vartheta)$, то существует кривая $x^*(3 - \vartheta)$, для которой $x(t) = x(x^*(3 - \vartheta),\ t) \to \infty$ при $t \to \infty$, так как трансцендентное уравнение $\lambda = 1 - 2e^{-(\lambda+1)}$, соответствующее (1.5) при $t > 2$, имеет корень λ такой, что $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Таким образом, корректная постановка задачи устойчивости для уравнений (1.1) включает по крайней мере три вопроса: 1) исследование начальных возмущений при $t = t_0$; 2) определение класса допустимых при $t > t_0 + h$ начальных кривых $x_i(t - \vartheta)$, которые возможны для данной задачи; 3) указание условий устойчивости или неустойчивости относительно этих допустимых кривых $x_i(t - \vartheta)$[1]. В соответствии с этим функционал $V(y_1(-\tau), \ldots, y_n(-\tau), t)$, заменяющий функцию Ляпунова, следует рассматривать при каждом t лишь на классе функций $y_i(-\tau) = x_i(t - \tau)$, допустимых при этом t. Однако эффективное решение такой задачи существенно зависит от успешного решения вопроса о выделении класса допустимых функций $x_i(t - \tau)$. Общие теоремы § 2 и 3 можно изложить, рассматривая лишь классы допустимых при каждом t функций $x_i(t - \tau)$, однако, если при этом не указан эффективный путь выделения допустимых кривых, такое изложение имело бы лишь

[1] Практический смысл имеет, очевидно, лишь такая устойчивость, которая не нарушается малыми вариациями семейства допустимых начальных кривых.

формальный смысл. Поэтому здесь задача устойчивости для уравнений (1.1) рассматривается в такой постановке, когда требуется устойчивость решения $x_i = 0$ относительно более широкого класса функций $x_i(t-\tau)$, чем класс допустимых функций. Именно рассматривается устойчивость относительно класса (L_1) кривых $y_i(-\vartheta) = x_i(t_0 - \vartheta)$, удовлетворяющих условию Липшица, т. е.

$$| y_i(-\vartheta_1) - y_i(-\vartheta_2) | \leqslant L_1 | \vartheta_2 - \vartheta_1 | \tag{1.6}$$

Последнее объясняется тем, что допустимые функции $x_i(t_0 - \vartheta)$ при $t_0 > 2h$ (если возмущения были при $t \leqslant 0$ включены в класс (L_1), где L_1 — достаточно большое число. Действительно, если траектория (1.1) при $t < t_0 - h$ лежит в области (1.3) (чего всегда можно добиться выбором достаточно малого $\delta > 0$ вследствие интегральной непрерывности на конечном отрезке времени $-h < t \leqslant t_0$), то вследствие (1.2)

$$\left| \frac{dx_i}{dt} \right| \leqslant \sup(|X_i|) < nLH = L_1 \qquad \text{в области (1.3)}$$

В дальнейшем уравнения (1.1) рассматриваются при $t \geqslant t_0 > 2h = 2\max h_i$, а функции $x_i(t)$ предполагаются удовлетворяющими (1.6), не оговаривая это каждый раз.

Определения. (A) Решение $x_i = 0$ устойчиво, если для любого $t_0 > h$ и $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что

$$\| x(x_0(t_0 - \vartheta),\ t - \tau) \|_\tau < \varepsilon \qquad \text{при } t \geqslant t_0$$

если только

$$\| x_0(t_0 - \vartheta) \|_\vartheta \leqslant \delta$$

Здесь и в дальнейшем

$$\| x(t_0 - \vartheta) \|_\vartheta = \sup \{ | x_i(t_0 - \vartheta) | \} \qquad \text{при } 0 \leqslant \vartheta \leqslant h_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\| x(x_0(t_0 - \vartheta),\ t - \tau) \|_\tau = \sup \{ | x_i(x_{10}(t_0 - \vartheta), \ \ldots, \ x_{n0}(t_0 - \vartheta),\ t - \tau | \}$$
$$(0 \leqslant \tau \leqslant h_i)$$

(B) Если существует $\delta > 0$, не зависящее от t_0, то устойчивость равномерна.

(C) Решение $x_i = 0$ устойчиво асимптотически, если при (A) существует число $H_1 > 0$ такое, что

$$\lim [x(x_0(t_0 - \vartheta),\ t)] = 0 \qquad \text{при } t \to \infty, \qquad \| x_0(t_0 - \vartheta) \|_\vartheta < H_1$$

(D) Решение $x_i = 0$ асимптотически равномерно устойчиво, если при (B) для любого $\eta > 0$ можно указать число $T(\eta)$ такое, что

$$\| x(x_0(t_0 - \vartheta),\ t - \tau) \|_\tau < \eta \qquad \text{при } t \geqslant t_0 + T(\eta), \qquad \| x_0(t_0 - \vartheta) \|_\vartheta < H_1$$

Эти определения для уравнений (1.1) соответствуют известным определениям для обыкновенных уравнений [1, 4, 5].

§ 2. В этом параграфе дается обобщение теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [1] (стр. 92) на уравнения (1.1).

Определения. Функционал $V(y_1(-\tau), \ \ldots, \ y_n(-\tau),\ t)$ является определенно положительным, если существует непрерывная функция $\varphi(r)$ такая, что

$$V(y_1(-\tau), \ \ldots, \ y_n(-\tau),\ t) > \varphi(\| y(-\tau) \|_\tau) \qquad \text{при } t > h,\ \varphi(r) > 0,\ r \neq 0$$

В случае

$$V(y_1(-\tau), \ldots, y_n(-\tau), t) < -\varphi(\|y(-\tau)\|_\tau) \qquad \text{при } t > h, \ \varphi(r) > 0, \ r \neq 0$$

функционал V определенно отрицателен.

Если существует непрерывная функция $F(r)$ такая, что

$$|V(y_1(-\tau), \ldots, y_n(-\tau), t)| < F(\|y(-\tau)\|_\tau) \qquad \text{при } t > h, \ F(0) = 0$$

то V допускает бесконечно малый высший предел.

В дальнейшем рассматриваются лишь функционалы

$$V(y(-\tau), t) = V(y_1(-\tau), \ldots, y_n(-\tau), t)$$

определенные при $\|y(-\tau)\|_\tau < H_2$ (H_2 — некоторая положительная постоянная), обращающиеся в нуль при $\|y(-\tau)\|_\tau = 0$ и непрерывно зависящие от $y(-\tau)$ и t в том смысле, что разность $V(y''(-\tau), t_1) - V(y'(-\tau), t_2)$ мала, если малы норма $\|y''(-\tau) - y'(-\tau)\|$ и разность $|t_1 - t_2|$. Эти определения соответствуют известным свойствам функций Ляпунова [1].

Теорема 2.1. Если существует функционал $V(y(-\tau), t)$, определенно положительный, допускающий бесконечно малый высший предел на функциях $y(-\tau)$ при $\|y(-\tau)\|_\tau < H_2$ и такой, что производная

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}[V(x(x_0(t_0 - \vartheta), t - \tau), t)] \tag{2.1}$$

вдоль траекторий, (1.1) при подстановке $x(x_0(t_0 - \vartheta), t - \tau) = y(-\tau)$ является при $\|x(x_0(t_0 - \vartheta), \ t - \tau)\|_\tau < H_2$ определенно отрицательным функционалом, то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы Ляпунова [1] (стр. 86). Заметим лишь, что из доказательства, как и в случае обыкновенных уравнений [5], следует, что асимптотическая устойчивость равномерна в смысле определения (D).

Примечание. Условие существования и определенной отрицательности dV/dt можно заменить более слабым условием (2.2)

$$\overline{\lim_{\Delta t \to +0}} \left[\frac{V(x(x_0(t_0 + \vartheta), t + \Delta t - \tau), t + \Delta t) - V(x(x_0(t_0 - \vartheta), t - \tau,) t)}{\Delta t}\right] \leqslant -f(\|x\|)$$

где $f(r)$ — непрерывная, положительная при $r \neq 0$ функция.

В приложениях трудно построить функционал V, производная которого dV/dt является определенно отрицательным функционалом, также трудно построить функционал, удовлетворяющий условию (2.2). Поэтому укажем обобщение теоремы 2.1.

Теорема 2.2. Если определенно положительный функционал V допускает бесконечно малый высший предел и

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left[\frac{V(x(x_0(t_0 - \vartheta), t + \Delta t - \tau), t + \Delta t) - V(x(x_0(t_0 - \vartheta), t - \tau), t)}{\Delta t}\right] < \\ < -f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \tag{2.3}$$

где f — определенно положительная функция $x_1, \ldots, x_n$, то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть $\alpha = \inf V$ при $\|y(-\tau)\|_\tau = \varepsilon$. Вследствие (2.3) непрерывная функция $v(t) = V(x(t - \tau), t)$ не возрастает. Если при $\|x_0(t_0 - \vartheta)\|_\vartheta \leqslant \delta$ выполняется неравенство $V(x_0(t_0 - \tau), t_0) < \alpha$, то $v(t) < \alpha$

при $t \geqslant t_0$ и, следовательно, $\| x(x_0(t_0 - \vartheta), \; t - \tau) \|_\tau < \varepsilon$, так как $\| x(t - \tau) \|_\tau$ меняется непрерывно по t и при $\| x(t - \tau) \|_\tau = \varepsilon$ имеем $V \geqslant \alpha$. Устойчивость доказана.

Предположим, что устойчивость не асимптотическая. Тогда существует траектория, точки которой $x_i(t) = (x_{10}(t_0 - \vartheta), \; \ldots, \; x_{n0}(t_0 - \vartheta), \; t)$ лежат в области $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > \varepsilon_1^2$ при $t = t_1, \ldots, t_k, \ldots \to \infty$, причем $\| x_0(t_0 - \vartheta) \|_\vartheta < \delta$.

Вследствие (1.2) скорость точки $\{x_i(t)\}$ в пространстве $\{x_i\}$ ограничена, поэтому сумма длин интервалов времени $t_k^* < t < t_k^* + T_k$, в течение которых точки $\{x_i(t)\}$ лежат в области $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > {}^1/_4 \, \varepsilon_1^2$, неограниченно возрастает со временем, и так как

$$v(t_k^*) - v(t_0) < -\varepsilon_2 \sum_{j=1}^{k-1} T_j \qquad \left(\varepsilon_2 = \inf f \text{ при } x_1^2 + \ldots + x_n^2 > \left[\frac{1}{2} \varepsilon_1 \right]^2 \right)$$

то функция $v(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$, что невозможно. Противоречие доказывает теорему.

В случае стационарных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t - h_{i1}), \; \ldots, \; x_n(t - h_{in})) \tag{2.4}$$

с постоянными h_{ij} для доказательства асимптотической устойчивости можно применять следующую теорему.

Теорема 2.3. Если определенно положительный функционал

$$V(y(-\tau)) = V(y_1(-\tau), \; \ldots, \; y_n(-\tau))$$

допускает бесконечно малый высший предел и

$$\overline{\lim} \frac{\Delta V}{\Delta t} \leqslant 0 \qquad \text{при } \Delta t \to +0 \tag{2.5}$$

причем нет траекторий (кроме $x = 0$), вдоль которых при $t \geqslant t_0$ в условии (2.5) выполняется тождественно равенство, то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Доказательство. Устойчивость решения $x = 0$ доказывается так же, как и в предыдущей теореме. Предположим, что устойчивость не асимптотическая. Тогда существует траектория

$$x_i'(t) = x_i(x_{10}'(-\vartheta), \; \ldots, \; x_{n0}'(-\vartheta), \; t)$$

и последовательность $t_k \to \infty$ такие, что $\| x(x_0'(-\vartheta), \; t_k - \tau) \|_\tau \geqslant \varepsilon_1 > 0$, причем $\| x_0'(-\vartheta) \|_\vartheta < \delta$ и, следовательно,

$$\| x(x_0'(-\vartheta), \; t - \tau) \|_\tau < \varepsilon \qquad \text{при } t > 0$$

Последовательности функций

$$y_{ik}(-\tau) = x_i(x_0'(-\vartheta), \; t_k - \tau) \qquad (i = 1, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots)$$

равномерно ограничены и равностепенно непрерывны (класс L_1). Можно выбрать последовательность, сходящуюся равномерно к функциям $x_i^*(-\tau)$. Функция $v(t) = V(x(x_0'(-\vartheta), \; t - \tau))$ не возрастающая и ограничена снизу, поэтому существует

$$\lim v(t) = v_0 \quad \text{при } t \to \infty, \qquad v(t) \geqslant v_0 \quad \text{при } t > 0 \tag{2.6}$$

Вследствие непрерывности V и выбора $x_i^*(-\tau)$ имеем $V(x^*(-\tau))=v_0>0$. Функция $v^*(t)=V(x(x^*(-\vartheta),\ t-\tau))$ не остается равной v_0 при $t>0$ вследствие (2.5), и поэтому есть момент $t=t^*$, когда $v^*(t^*)<v_0$.

Вследствие интегральной непрерывности [6] траектория $x_i(x_0'(-\vartheta),\ t)$ попадает в область $V<v_0$, что противоречит (2.6). Противоречие доказывает теорему [1].

§ 3. Здесь рассматривается вопрос обращения теорем об устойчивости. Наиболее жесткие условия на V налагает теорема 2.1, соответствующая теореме Ляпунова, поэтому рассмотрим лишь обращение этой теоремы. Выше указывалось, что при условиях теоремы 2.1 асимптотическая устойчивость равномерна (D). Обратно, при условии (D) существует функционал V из теоремы 2.1.

Теорема 3.1. Если решение $x=0$ равномерно асимптотически устойчиво в смысле определения (D), то существует определенно положительный функционал $V(y(-\tau),\ t)$ при $\|y(-\tau)\|_\tau<H_1$, допускающий бесконечно малый высший предел и такой, что производная (правая) dV/dt в силу (1.1) существует, непрерывна и является определенно отрицательным функционалом. Кроме того,

$$|V(y''(-\tau),\ t)-V(y'(-\tau),\ t)|<L_2\|y''(-\tau)-y'(-\tau)\|_\tau \quad (L_2=\text{const}) \tag{3.1}$$

Доказательство. Из определения (D) следует существование монотонно убывающей функции $\varphi(t)$ класса C_1 такой, что

$$\|x(x_0(t_0-\vartheta),\ t-\tau)\|_\tau<\varphi(t-t_0) \qquad \text{при } t\geqslant t_0,\ t_0>h$$
$$\lim\varphi(t)=0 \qquad \text{при } t\to\infty \tag{3.2}$$

для всех $x_0(t_0-\vartheta)$ из области притяжения $\|x_0(t_0-\vartheta)\|_\vartheta<H_1$. Траектории (1.1) в области (1.3) удовлетворяют неравенству

$$\|x(x_0''(t_0-\vartheta),\ t-\tau)-x(x_0'(t_0-\vartheta),\ t-\tau)\|_\tau<n\|x_0''(t_0-\vartheta)-$$
$$-x_0'(t_0-\vartheta)\|e^{nL(t-t_0)} \qquad \text{при } t\geqslant t_0,\ t_0>h \tag{3.3}$$

которое следует из оценок работы [6] или можно установить непосредственно, переходя от (1.1) к соответствующим интегральным уравнениям, так же, как это делается для получения аналогичных оценок в случае обыкновенных уравнений [7] (стр. 23).

В работах [5, 8] доказано существование монотонно возрастающей функции $G(\varphi)$ класса C_1, имеющей монотонную производную такой, что

$$G(\varphi)>0 \qquad \text{при } \varphi\neq 0$$

$$\int_0^\infty G(\varphi(\xi))\,d\xi=N<\infty, \qquad \int_0^\infty G'(\varphi(\xi))\,e^{nL\xi}d\xi=M<\infty \tag{3.4}$$

Функционал

$$V(y_1(-\tau),\ \ldots,\ y_n(-\tau),\ t)=\int_t^\infty G(\|x(x_{10}(t-\tau),\ \ldots,\ x_{n0}(t-\tau),\ \xi-\vartheta)\|_\vartheta)\,d\xi$$
$$(y_i(-\tau)=x_{i0}(t-\tau))$$

---

[1] Теорема справедлива и в случае периодических функций h_{ij} и X_i (одного и того же периода T).

удовлетворяет всем условиям теоремы. Производная (правая) в силу (1.1)

$$\frac{dV}{dt} = -G(\|x_0(t_0-\tau)\|_\tau) = -G(\|y(-\tau)\|_\tau)$$

является определенно отрицательным функционалом. (На некоторых кривых $x_0(t_0-\tau)$ речь может идти лишь о *правой* производной dV/dt вдоль траектории, так как при $t<t_0$ эта траектория может быть непродолжимой.) Величина V является определенно положительным функционалом, так как

$$V(y(-\tau),\ t) > \int\limits_t^{t+\beta} G\left(\tfrac{1}{2}\|x_0(t-\tau)\|_\tau\right)d\xi = \beta G\left(\tfrac{1}{2}\|y(-\tau)\|_\tau\right)$$

$$\left(\beta = \frac{1}{2L_1}\|y(-\tau)\|_\tau\right)$$

что следует из монотонности функции $G(\varphi)$ и того факта, что функции $x_i(x_{10}(t-\tau),\ \ldots,\ x_{n0}(t-\tau),\ \xi)$ удовлетворяют по ξ условиям Липшица с постоянной L_1 (1.6), вследствие чего

$$\|x(x_0(t-\tau),\ \xi-\vartheta)\|_\vartheta > {}^1/_2\|x_0(t-\tau)\|_\tau \qquad \text{при } 0<\xi<\beta$$

Функционал V допускает бесконечно малый высший предел, так как

$$|V(y(-\tau),\ t)| < \int\limits_t^{t+t_1} G(R)\,d\xi + \int\limits_{t+t_1}^{\infty} G(\varphi(\xi-t))\,d\xi \tag{3.5}$$

где $R=\max\|x(x_0(t-\tau),\ \xi-\vartheta)\|_\vartheta$ при $t\leqslant\xi\leqslant t+t_1$, и выбором достаточно большого t_1 второе слагаемое в (3.5) вследствие (3.4) можно сделать сколь угодно малым, а первый интеграл при фиксированном t_1 сколь угодно мал, если $\|x_0(t-\tau)\|_\tau<\delta$, где δ — достаточно малое число; причем t_1 и δ вследствие равномерности устойчивости не зависят от t. Функционал непрерывен и удовлетворяет (3.1), так как

$$|V(y''(-\tau),t)-V(y'(-\tau),t)| < \int\limits_0^\infty M_1\|y''(-\tau)-y'(-\tau)\|_\tau e^{nL\xi}G'(\varphi(\xi))\,d\xi =$$

$$= MM_1\|y''(-\tau)-y'(-\tau)\|_\tau \qquad (M_1=\text{const})$$

вследствие (3.3) и (3.4). Теорема доказана.

Если правые части уравнений (1.1) и запаздывания h_{ij} — периодические функции одного и того же периода T (в частности, не зависят явно от t), то асимптотическая устойчивость всегда равномерна (D). Этот факт устанавливается, как и в случае обыкновенных уравнений [8], опираясь на свойство интегральной непрерывности и на компактность семейства функций $x_{i0}(t_0-\vartheta)$ (класс L_1) и $h_{ij}(t)$ $(0\leqslant t_0\leqslant T)$. Поэтому следствием теоремы 3.1 является следующая теорема.

Теорема 3.2. Для того чтобы решение $x=0$ уравнений (1.1), где X_i и h_{ij} — периодические функции t одного периода, было асимптотически устойчивым, достаточно и необходимо, чтобы существовал функционал V из теоремы 2.1, причем в случае обращения существует функционал, удовлетворяющий условиям (3.1).

§ 4. Существование функционала V позволяет, как и в случае обыкновенных уравнений [5, 9], установить сохранение устойчивости при малых вариациях функций X_i. Докажем здесь, в частности, теорему об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Определение. Решение $x=0$ уравнений (1.1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$, $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$ такие, что решения уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1(t-h_{i1}^*(t)),\ \ldots,\ x_n(t-h_{in}^*(t)),\ t)+$$
$$+\varphi_i(x_1(t-h_{i1}^*(t)),\ \ldots,\ x_n(t-h_{in}^*(t)),\ t) \tag{4.1}$$

удовлетворяют условиям

$$\|x(x_0(t_0-\vartheta),\ t-\tau)\|_\tau<\varepsilon \qquad \text{при } t\geqslant t_0,\quad t_0>h \tag{4.2}$$

если

$$\|x_0(t_0-\vartheta)\|_\vartheta\leqslant\delta,\ |\varphi_i|<\Delta_1 \qquad \text{при } |x_1|+\ldots+|x_n|<\varepsilon$$
$$|h_{ij}(t)-h_{ij}^*(t)|<\Delta_2, \qquad h_{ij}^*(t)\geqslant 0 \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. Если решение $x=0$ уравнений (1.1) асимптотически равномерно устойчиво (D), то имеет место устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

Доказательство. Пусть V — функционал из теоремы 3.1, определенный при $\|y(-\tau)\|_\tau<H_1$, $\varepsilon<H_1$ и $\delta>0$ такое, что

$$\sup(V)_{\|y(-\tau)\|\leqslant\delta}<\inf(V)_{\|y(-\tau)\|=\varepsilon}$$

Достаточно доказать, как и в случае обыкновенных уравнений [5], существование чисел Δ_1, Δ_2 таких, что при условиях (4.2) в области

$$\delta\leqslant\|y(-\tau)\|_\tau\leqslant\varepsilon \tag{4,4}$$

справедливо неравенство

$$\overline{\lim}\frac{\Delta V}{\Delta t}\leqslant 0 \qquad \text{при } \Delta t\to+0 \tag{4.5}$$

в силу уравнений (4.1). В статье [2] показано, что изменения в запаздываниях $\Delta h_{ij}=h_{ij}^*-h_{ij}$ сводятся к добавкам f_i к правым частям уравнений, и поэтому, учитывая оценки из [2], а также неравенства (4.3), уравнения (4.1) можно записать в виде

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1(t-h_{i1}(t)),\ \ldots,\ x_n(t-h_{in}(t)),\ t)+\varphi_i+f_i \tag{4.6}$$

где величины f_i в области (4.4) удовлетворяют неравенству

$$|f_i|<M_3\Delta_2 \qquad (M_3=\text{const}) \tag{4.7}$$

Вычислим $\overline{\lim}(\Delta V/\Delta t)_{(4.1)}$ в силу (4.1);

$$\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(4.1)}=\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(1.1)}+\frac{V(x^*(t+\Delta t-\tau),\ t+\Delta t)-V(x(t+\Delta t-\tau),\ t+\Delta t)}{\Delta t}$$

где $x^*(t)$ — траектории (4.1), $x(t)$ — траектории (1.1). Учитывая условия (3.1), (4.3) и (4.7) в области (4.4), имеем

$$\overline{\lim_{\Delta t\to+0}}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(4.1)}<\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(1.1)}+M_5\Delta_2+M_4\Delta_1 \qquad (M_{5,4}=\text{const})$$

Из последней оценки следует, что при достаточно малых Δ_1 и Δ_2 выполняется (4.5) вследствие определенной отрицательности $(dV/dt)_{(1.1)}$. Теорема доказана. Следствием теорем 3.2 и 4.1 является такой результат.

Теорема 4.2. Если X_i и h_{ij} — периодические функции t периода T (или X_i и h_{ij} не зависят явно от времени), то для устойчивости при постоянно действующих возмущениях достаточно, чтобы невозмущенное движение было асимптотически устойчивым.

§ 5. Если известна скорость стремления $x(t)$ к нулю при $t \to \infty$, можно указать более точные оценки величин φ_i, не нарушающих устойчивости. Рассмотрим случай, характерный для асимптотической устойчивости при линейных уравнениях возмущенного движения, когда $\|x(t-\tau)\|_\tau$ убывает по экспоненциальному закону.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t-h_{i1}(t)), \ldots, x_n(t-h_{in}(t)), t, \beta_1, \ldots, \beta_k) \qquad (5.1)$$

правые части которых непрерывны и удовлетворяют условиям

$$|X_i(x_1'', \ldots, x_n'', t, \beta_1'', \ldots, \beta_k'') - X_i(x_1', \ldots, x_n', t, \beta_1', \ldots, \beta_k')| <$$
$$< L_3\Big(\sum_{j=1}^n |x_j''-x_j'| + \max\Big\{\sum_{j=1}^n |x_j''|, \ \sum_{j=1}^n |x_j'|\Big\}\sum_{j=1}^k |\beta_j''-\beta_j'|\Big) \qquad (5.2)$$

(β_j — параметры, $L_3 = \mathrm{const}$).

Теорема 5.1. Если решения уравнений (5.1) при значениях β_j из области $b_j < \beta_j < B_j$ ($b_j \geqslant -\infty$, $B_j \leqslant \infty$) удовлетворяют условиям

$$\|x(x_0(t_0-\vartheta), \ t-\tau)\|_\tau < B\|x_0(t_0-\vartheta)\|_\vartheta \, e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (5.3)$$

при $\|x_0(t_0-\vartheta)\|_\vartheta < H_1$, $t \geqslant t_0$, $t_0 > h$ (α, $B > 0$ — постоянные), то существует функционал $V(y(-\theta), t, \beta_1, \ldots, \beta_k)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2h$, определенный при $\|y(-\theta)\|_\theta < H_1$ и $b_j < \beta_j < B_j$. Функционал V является определенно положительным, допускает бесконечно малый высший предел и удовлетворяет условиям

$$\overline{\lim}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(5.1)} < -c_1\|y(-\theta)\|_{0\leqslant\theta\leqslant 2h} \qquad \text{при } \Delta t \to +0 \qquad (5.4)$$

$$|V(y''(-\theta), \ t, \beta_1'', \ldots, \beta_k'') - V(y'(-\theta), \ t, \beta_1', \ldots, \beta_k')| < \qquad (5.5)$$
$$< c_2\Big(\sum_{i=1}^n \|y''(-\theta) - y'(-\theta)\|_\theta + \max\{\|y''(-\theta)\|, \|y'(-\theta)\|\}\sum_{i=1}^k |\beta_i''-\beta_i'|\Big)$$

(c_1, c_2 — положительные постоянные).

Доказательство. Функционал (5.6)

$$V(y(-\theta), \ t, \ \beta_1, \ldots, \beta_k)) = \int_t^T (\|x(x_0(t-\theta), \beta_1, \ldots, \beta_k, \ \xi-\theta_1)\|_{0\leqslant\theta_1\leqslant 2h})\, d\xi +$$
$$+ \sup(\|x(x_0(t-\theta), \ \beta_1, \ldots, \beta_k, \ \xi-\theta_1)\|_{\theta_1})_{t\leqslant\xi\leqslant T} \qquad \left(T = t+h+\frac{1}{\alpha}\ln 2B\right)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. (Здесь $x_0(t-\theta) = y(-\theta)$.) Действительно

$$\overline{\lim}\frac{\Delta V}{\Delta t} \leqslant -\|y(-\theta)\|_\theta + \|x(x_0(t-\theta), \ \beta_1, \ldots, \beta_k, \ t+h+$$
$$+\frac{1}{\alpha}\ln 2B+\theta_1)\|_{\theta_1} < -\tfrac{1}{2}\|y(-\theta)\|_{0\leqslant\theta\leqslant 2h} \qquad (y(-\theta) = x_0(t-\theta))$$

так как

$$\Big\|x(x_0(t-\theta_1, \beta_1 \ldots, \beta_k), \ t+h+\frac{1}{\alpha}\ln 2B+\theta_1)\Big\|_{\theta_1} < \tfrac{1}{2}\|x_0(t-\theta)\|_\theta$$

вследствие (5.3). Остальные условия теоремы проверяются так же, как это сделано при доказательстве 3.1, с той разницей, что здесь оценки получаются проще, так как интеграл (5.6) собственный. Зависимость (5.5) функционала V от параметров β_j следует из (5.2) и того факта, что при условиях (5.2) решения $x(x_0(t_0-\theta), \beta_1, \ldots, \beta_k, t)$ удовлетворяют условиям

$$\|x(x_0''(t_0-\theta), \beta_1'', \ldots, \beta_k'', t-\theta_1)-$$

$$-x(x_0'(t_0-\theta), \beta_1', \ldots, \beta_k', t-\theta_1)\|_{0\leqslant\theta_1\leqslant 2h} < L_4 \|x_0''(t_0-\theta)-x_0'(t_0-\theta)\|_0 +$$

$$+L_5 \max\{\|x_0''(t_0-\theta)\|, \|x_0'(t_0-\theta)\|\}\left(\sum_{j=1}^{k}|\beta_j''-\beta_j'|\right)$$

$$\text{при} \quad t_0 < t < t_0+h+\alpha^{-1}\ln 2B \qquad (L_4, L_5 = \mathrm{const}) \tag{5.7}$$

Неравенства (5.7) можно получить из теорем работы [6] или непосредственно, переходя к интегральным уравнениям, соответствующим (5.1). Функционал V из теоремы 5.1 можно применить для исследования устойчивости по первому приближению, так же как это делается в случае обыкновенных уравнений [10, 11, 12]. Приведем здесь в качестве примера одну теорему такого рода.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения (5.8)

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t)x_1(t-h_{i1})+\ldots+p_{in}(t)x_n(t-h_{in})+\varphi_i(x_1(t-h_{i1}^*),\ldots,x_n(t-h_{in}^*),t)$$

где h_{ij}, h_{ij}^* — неотрицательные постоянные

$$|\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)| < M(|x_1|+\ldots+|x_n|)^{1+\gamma} \qquad (\gamma>0,\ M,\ \gamma=\mathrm{const}) \tag{5.9}$$

и коэффициенты $p_{ij}(t)$ — непрерывные функции, такие, что

$$|p_{ij}(t_2)-p_{ij}(t_1)| < a|t_2-t_1| \qquad (a=\mathrm{const}) \tag{5.10}$$

Теорема 5.2. Если при всех $\beta>0$ решения уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(\beta)x_1(t-h_0)+\ldots+p_{in}(\beta)x_n(t-h_0) \tag{5.11}$$

удовлетворяют условиям (5.3), то можно указать постоянные $a>0$, $k>0$ такие, что решение $x=0$ уравнений (5.8) будет асимптотически устойчивым, если выполняются неравенства (5.10) и $|h_{ij}-h_0|<k$.

Примечание. Известно[3], что для асимптотической устойчивости решения $x=0$ системы уравнений (5.11) достаточно, чтобы корни $|\,\|p_{ij}(\beta)\|-\lambda e^{\lambda h_0}E\,|=0$ удовлетворяли условию $\operatorname{Re}\lambda<-\delta(\beta)<0$. Нетрудно проверить, что при фиксированном β условие (5.3) является следствием асимптотической устойчивости решения $x=0$. Теорема 5.2 требует, чтобы условие (5.3) выполнялось равномерно при всех $\beta>0$.

Доказательство теоремы 5.2. Вычислим $\overline{\lim}(\Delta v/\Delta t)$ при $\Delta t\to+0$ в силу уравнений (5.8) для функционала

$$v(y(-\theta),t) = V(y(-\theta),t,\beta=t)+\mu_{ij}\sum_{i=1,j=1}^{n}\mu_{ij}\int_{t_1}^{t}|x_i(\xi)|\,d\xi \qquad (t_1=t-h_{ij}^*)$$

Здесь $x_i(t)$ — траектории (5.8), V — функционал из теоремы (5.1) для уравнений (5.11). Имеем

$$\overline{\lim_{\Delta t\to+0}}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{(5.8)} < \overline{\lim}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(5.11)} + N_1 M\left(\sum_{i=1,j=1}^{n}|x_i(t-h_{ij}^*)|\right)^{1+\gamma}+$$

$$+ N_2 k \| x(t-\theta) \|_{0\leqslant\theta\leqslant 2h} + N_3 a \| x(t-\theta) \|_{0\leqslant\theta\leqslant 2h} + \sum_{j=1,i=1}^{n} \mu_{ij} | x_i(t) | -$$

$$- \sum_{j=1,i=1}^{n} \mu_{ij} | x_i(t - \overset{*}{h_{ij}}) | \qquad (h = \max(h_0, h_{ij}),\ N_{1,2,3} = \text{const})$$

Из последней оценки следует, что выбором чисел $a > 0$, $k > 0$, $\mu_{ij} > 0$ можно добиться выполнения неравенства (в малой окрестности точки $x=0$)

$$\overline{\lim} \frac{\Delta V}{\Delta t} < - c_3 \| x(t-\theta) \|_{0\leqslant\theta\leqslant 2h} \qquad \text{при } \Delta t \to +0 \ (c_3 > 0) \tag{5.12}$$

Полученная оценка (5.12) в силу примечания к теореме 2.1 и доказывает теорему 5.2.

§ 6. В этом параграфе приводится несколько примеров построения функционалов V для конкретных систем дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t-h(t)), t), \qquad f(0,t) = 0, \qquad 0 < h \leqslant h(t) \leqslant H, \quad \left| \frac{dh}{dt} \right| < H \tag{6.1}$$

где $f(x, t)$ — непрерывно дифференцируемая функция по x и непрерывная по t, удовлетворяющая неравенству

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| < L, \qquad \frac{f(x,t)}{x} < -a \qquad (a > 0) \tag{6.2}$$

При $t > 2h$ уравнение (6.1) можно записать в виде[1]

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) - \int_{-h(t)}^{0} f_x'(x(t+\xi)\ t) f(x(t+\xi-h(t+\xi)))\, d\xi \tag{6.3}$$

Выберем функционал V в виде

$$V = x^2 + \frac{a}{h} \int_{-h}^{0} d\tau \int_{t+\tau-h(t+\tau)}^{t} x^2(\vartheta)\, d\vartheta$$

Вычислим производную dV/dt. Имеем

$$\frac{dV}{dt} = 2x(t) f(x(t), t) - 2x(t) \int_{-h(t)}^{0} f_x' f(x(t+\xi-h(t+\xi)))\, d\xi + \frac{a}{h} \int_{-h}^{0} x^2(t)\, d\tau -$$

$$- \frac{a}{h} \int_{-h}^{0} x^2(t+\tau-h(t+\tau))\, d\tau + \frac{a}{h} \int_{-h}^{0} h'(t+\tau) x^2(t+\xi-h(t+\tau))\, d\tau <$$

$$< \int_{-h}^{0} \Big\{ -\frac{a}{h} x^2(t) + 2L^2 | x(t) x(t+\xi-h(t+\xi)) | - \frac{a}{h} x^2(t+\tau-h(t+\xi)) +$$

$$+ \frac{aH}{h} x^2(t+\xi-h(t+\xi)) \Big\}\, d\xi$$

Для того чтобы выполнялись условия теоремы 2.2, достаточно, чтобы форма переменных $x(t)$, $x(t+\xi-h(t+\xi))$ была определенно отрицательной, т. е. для асимптотической устойчивости решения $x=0$ достаточно выполнения неравенства

$$\left(\frac{a}{h} - H \frac{a}{h} \right) \frac{a}{h} > L^4 \qquad \text{или} \qquad h < \frac{a}{L^2} \qquad \text{при } h = \text{const} \tag{6.4}$$

---

[1] Уравнение (6.3), строго говоря, уже не является уравнением с дискретными запаздываниями $h(t)$, однако изложенный выше метод очевидным образом сохраняет смысл и для уравнений, в правой части которых стоят *функционалы* от $x_i(t-\vartheta)$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant h)$ более общего вида, чем в уравнениях (1.1).

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t, x, y) + f(x(t - h(t))) \qquad \left(y = \frac{dx}{dt}\right)$$

$$(h(t), \varphi \text{ — периодические функции } t) \tag{6.5}$$

где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, причем выполняются условия

$$0 \leqslant h(t) \leqslant h, \qquad \frac{\varphi(t, x, y)}{y} < -a, \qquad \frac{f(x)}{x} < -b, \qquad |f'| < L, \ \varphi(t, x, 0) = 0$$

Запишем уравнение (6.5) в виде эквивалентной системы уравнений (при $t > 2h$)

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = \varphi(t, x, y) + f(x) + \int\limits_{-h(t)}^{0} f'y(t + \tau)\, d\tau$$

Выбирая функционал

$$V = -2\int\limits_0^x f(\xi)\, d\xi + y^2 + \frac{a}{h}\int\limits_{-h}^{0} d\tau \int\limits_{t+\tau}^{t} y^2(\vartheta)\, d\vartheta$$

получим

$$\frac{dV}{dt} = 2y\varphi(t, x, y) + 2y\int\limits_{-h(t)}^{0} f'y(t + \tau)\, d\tau + \frac{a}{h}\int\limits_{-h}^{0} (y^2 - y^2(t + \tau))\, d\tau$$

Следовательно

$$\frac{dV}{dt} < -\int\limits_{-h}^{0}\left(\frac{a}{h}y^2(t) - 2L\,|y(t)\,y(t + \tau)| + \frac{a}{h}y^2(t + \tau)\right) d\tau \tag{6.6}$$

Из (6.6) вследствие теоремы 2.3 следует, что для асимптотической устойчивости решения $x = 0$ уравнения (6.5) достаточно выполнения условия

$$h < \frac{a}{L} \tag{6.7}$$

3. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\, x_j(t - h_j) \qquad (h_j = \text{const}) \tag{6.8}$$

где корни уравнения $|\,\|a_{ij}\| - \lambda E\,| = 0$ имеют отрицательные действительные части. Тогда существует определенно положительная квадратичная форма

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sum c_{ij}x_ix_j$$

такая, что в силу системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \tag{6.9}$$

имеет место равенство [1]

$$\left[\frac{dv}{dt}\right]_{(6.9)} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Выбирая функционал

$$V = v + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \int\limits_{t-h_i}^{t} x_i^2(\vartheta)\, d\vartheta$$

будем иметь в силу (6.8) (6.10)

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) + \sum_{k=1,\, j=1,\, i=1}^{n} c_{ik}b_{kj}x_kx_j(t - h_j) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i^2(t) - x_i^2(t - h_i))$$

и если можно подобрать числа $\mu_i > 0$ таким образом, чтобы в правой части получилась определенно отрицательная форма переменных $x_i(t), x_j(t-h_j)$, то согласно теореме 2.2 решение $x=0$ уравнений (6.8) асимптотически устойчиво. В частности, для уравнения $\dot{x} = -ax(t) + b(t)x(t-h)$ этим путем получается такое достаточное условие асимптотической устойчивости $|b| < a - \varepsilon$ (ε — сколь угодно малая положительная постоянная).

Заметим, что для некоторых задач функционал V, решающий задачу устойчивости, имеет физический смысл.

Рассмотрим, например, электрический контур, в который наряду с сопротивлением R, индуктивностью L и емкостью C включен элемент A, возвращающий в контур при t некоторую долю энергии, рассеянную на сопротивлении R в момент $t-h$. Уравнение, описывающее процесс, имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{i}{C}, \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{u}{L} - \frac{R}{L}i + \frac{A}{L}i^2(t-h)\operatorname{sign}(i) \tag{6.11}$$

Функционал V имеет вид:

$$V = \frac{1}{2}cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 + \int_{t-h}^{t} \varphi(t, \tau)\, d\tau \qquad (\varphi(t,t) = Ri^2,\ \varphi(t, t-h) = A|i|i^2(t-h))$$

и характеризует запас энергии.

Производная в силу уравнений (6.11)

$$\frac{dV}{dt} = \int_{t-h}^{t} \varphi_t'(t, \tau)\, d\tau$$

характеризует убыль запаса энергии при возрастании времени.

В заключение пользуюсь случаем выразить признательность Н. Г. Четаеву за его ценные замечания.

Поступила 31 III 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.— Л., 1950.
2. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, т. XVIII, вып. 3, 1954.
3. Эльсгольц Л. Э. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений. УМН, т. IX, вып. 4(62), 1954.
4. Персидский К. П. Об устойчивости интегралов дифференциальных уравнений. Диссертация, 1946.
5. Малкин И. Г. К вопросу об обращении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
6. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. УМН, т. IV, вып. 5, 1949.
7. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.— Л., 1949.
8. Massera J. L. On Liapounoff's condition of stability. Annals of Math., vol. 50, № 3, 1949.
9. Барбашин Е. А. Метод сечений в теории динамических систем. Мат. сб., т. 29, вып. 2, 1951.
10. Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
11. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
12. Красовский Н. Н. Об устойчивости по первому приближению. ПММ, т. XIX, вып. 5, 1955.