Прикладная математика и механика. Том XX 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Н. Г. Четаев

(Москва)

1. Можно отметить возникновение большого интереса к различным задачам устойчивости.

Общую задачу об устойчивости движения для механических систем с конечным числом степеней свободы сформулировал А. М. Ляпунов в сочинении «Общая задача об устойчивости движения» (1892)[1].

Остроумие ляпуновского определения устойчивости состоит в том, что определение это не беспредельно широко, иначе оно было бы безинтересным, и сужено оно ровно настолько, чтобы охватить все коренное во всевозможных задачах устойчивости.

Задачи об устойчивости в конечном, за ограниченный промежуток времени, при действии подходящим образом стесненных возмущающих сил можно в известном смысле накрыть некоторой задачей об устойчивости в смысле Ляпунова.

Ляпунов исходил из уравнений Лагранжа в независимых определяющих координатах. В ряде задач ради вычислительных удобств, а иногда и из-за отсутствия иных путей приходится пользоваться уравнениями движения в зависимых переменах, как то: уравнениями Лагранжа или Рауза со множителями λ, уравнениями Пуанкаре, любыми уравнениями движения неголономных механических систем.

По существу механической задачи уравнения связей, наложенных на механическую систему, должны оставаться неизменными. Задачи устойчивости при этом приобретают характер задач об условной устойчивости, ибо начальные значения зависимых переменных и их скоростей стеснены уравнениями связей.

Для механических систем, стесненных неголономными связями:

$$\sum (a_{j\nu}\, dx_\nu + b_{j\nu}\, by_\nu + c_{j\nu}\, dz_\nu) + e_j\, dt = 0$$

постановка задачи об устойчивости движения требует большого внимания. Связи должны оставаться неварьируемыми, если нет специальных оговорок. При этом только половина условий на начальные данные выписывается просто:

$$\left[\sum (a_{j\nu}\, x_\nu' + b_{j\nu}\, y_\nu' + c_{j\nu}\, z_\nu') + e_j\right]_0 = 0$$

Другая часть условий явно не выписывается, так как по существу неголономных связей система уравнений Пфаффа, описывающих связи, является неинтегрируемой. Кроме того, для заданной величины наибольшего допустимого отклонения A не всякое состояние, сколь угодно близкое к невозмущенному, является возможным при сохранении наложенных на систему связей.

Присоединение к уравнениям движения уравнений связей и формальное варьирование начальных значений всех переменных могут изменить механическую задачу тем, что при этом могут меняться наложенные на систему связи весьма существенным образом. Например, если на точку (x, y, z) наложена связь

$$dy + [a + f(z)(y + ax)]\,dx = 0 \qquad (a \text{ — постоянная})$$

и если эта связь для невозмущенного движения реализуется как голономная $y + ax = 0$, то при любых малых начальных возмущениях координат, не удовлетворяющих условию $y_0 + ax_0 = 0$, рассматриваемая связь перестает быть голономной и становится существенно неголономной.

2. В массе задач об устойчивости движения прикладного инженерного характера обычно стремятся обеспечить асимптотическую устойчивость первым приближением, для исследования которой бывают пригодны грубые приближенные методы.

Можно было бы привести сколько угодно подобных примеров, в которых принимаются в расчет различного рода сопротивления, но они сами по себе не представляют большого теоретического интереса. Обычные затруднения в таких задачах состоят в определении действующих сил и в выполнении вполне понятных, но громоздких вычислений.

В аналитической динамике большинство важнейших задач об устойчивости движения относилось к консервативным, голономным системам, уравнения движения которых можно записать в канонической форме Гамильтона

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где q_s — определяющие (голономные) координаты, p_s — им сопряженные импульсы, $H(t, q_n, p_n)$ — функция Гамильтона.

Выделенное для исследования некоторое движение этой системы $q_s = q_s(t)$, $p_s = p_s(t)$ Ляпунов называл *невозмущенным*, Пуанкаре — *ведущим*.

Вопрос об устойчивости невозмущенного движения начинается с исследования уравнений в вариациях Пуанкаре

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\,\partial q_j}\xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s\,\partial p_j}\eta_j\right)$$
$$\frac{d\eta_s}{dt} = -\sum\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_s\,\partial q_j}\xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial q_s\,\partial q_j}\eta_j\right)$$

в которых ξ_s, η_s обозначают вариации соответственно координат q_s и импульсов p_s.

Если ξ_s, η_s и ξ_s', η_s' суть два каких-либо частных решения уравнений в вариациях, то

$$\sum(\xi_s\eta_s' - \eta_s\xi_s') = \mathrm{const}$$

Исходя из этого инварианта, доказано [2] общее предложение, что если рассматриваемое невозмущенное движение устойчиво, то решения уравнений в вариациях имеют все характеристичные числа равными нулю, что уравнения в вариациях являются при этом приводимыми и имеют знакоопределенный квадратичный интеграл.

Эта фундаментальная теорема обобщает теорему Лагранжа для равновесий и теорему Пуанкаре-Ляпунова для периодических движений.

Для устойчивых положений равновесия и установившихся в смысле Рауза движений этот интеграл продолжается до знакоопределенного интеграла полных уравнений возмущенных движений — интеграла живых сил, если устойчивость является вековой.

3. Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия при максимуме силовой функции является первой из теорем, вызвавшей интерес как к задаче минимума потенциальной функции, так и к задаче знакоопределенных интегралов уравнений возмущенных движений.

Чтобы остановиться на чем-либо определенном, рассмотрим задачу о характере устойчивости лапласового равностороннего треугольника в плоской задаче трех тел, тяготеющих по закону Ньютона; ее в первом приближении разрешили Гашо (Gasheau), Рауз [3], Жуковский [4], Ляпунов [5].

Пусть для простоты центр тяжести тел неподвижен. Обозначим через m_α массу α-го тела, через $r_{\alpha\beta}$ — расстояние между телами m_α и m_β, $M = \Sigma m_\alpha$, через φ обозначим угол поворота луча, соединяющего какие-либо два тела.

Потенциальная функция сил в относительном движении трех тел относительно плоскости, вращающейся относительно неподвижного центра тяжести с постоянной угловой скоростью вращения $\omega = d\varphi / dt$, есть

$$W = \frac{\omega^2}{2M} \sum_{(\alpha\beta)} m_\alpha m_\beta r_{\alpha\beta}{}^2 - \sum_{(\alpha\beta)} \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

Здесь $(\alpha\beta)$ обозначает суммирование по комбинациям индексов по два без повторения.

При предположении постоянства ω функция W имеет экстремум для равностороннего треугольника Лапласа. Если бы этот экстремум W был минимум, то этого было бы достаточно для устойчивости. Но W — максимум, и, следовательно, при постоянстве ω равносторонний треугольник в задаче трех тел неустойчив, и, так как неустойчивость эта нечетной степени, ее в рассматриваемом относительном движении нельзя стабилизировать добавлением каких угодно гироскопических сил.

Предоставленные самим себе три тяготеющих тела в возмущенном движении будут двигаться по закону площадей согласно интегралу

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \beta$$

сопутствующему циклическую координату φ. T — живая сила, $\varphi' = d\varphi / dt = \omega$, β — постоянная интеграла площадей. При этом угловая скорость ω вообще не будет постоянной.

Измененная после исключения циклической координаты потенциальная функция в интеграле живых сил

$$\Pi = \frac{\beta^2}{2} \frac{M}{\sum\limits_{(\alpha\beta)} m_\alpha m_\beta r_{\alpha\beta}{}^2} - \sum_{(\alpha\beta)} \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

имеет экстремальное значение для равностороннего треугольника Лапласа; поэтому треугольник этот может иметь форму относительного равновесия трех тел.

Для равностороннего треугольника Лапласа функция П не имеет минимума, и, следовательно, равносторонний треугольник Лапласа не имеет вековой устойчивости. Степень вековой неустойчивости — четная, и поэтому равносторонний треугольник Лапласа может иметь только гироскопическую устойчивость в движении относительно центра тяжести.

Уравнения в вариациях имеют при условии гироскопической устойчивости знакоопределенный квадратичный интеграл. Интеграл этот в своем продолжении для полных уравнений возмущенных движений не может привести к алгебраическому, так как уравнения движения трех тел при фиксированном значении β согласно теореме Брунса не имеют подобных интегралов. Интеграл живых сил

$$\sum_{(\alpha\beta)} m_\alpha m_\beta r_{\alpha\beta}^2 \sum_{(ij)} m_i m_j r_{ij}'^2 + m_1 m_2 m_3 \sum m_1 (r_{12} r_{13} A_1')^2 - 2\Pi = h$$

не является для равностороннего треугольника Лапласа знакоопределенным. В последней сумме суммирование происходит по всем циклическим перемещениям индексов; A_1 — угол в треугольнике, лежащий против стороны r_{23}; штрихами обозначены производные по времени.

4. Для случая гироскопической устойчивости знакоопределенный интеграл уравнений в вариациях легко найти в связке первых интегралов. Не уменьшая общности и имея в виду также и другие задачи, будем исходить из уравнений в нормальных координатах

$$x'' - Apy' = ax + \ldots$$
$$y'' + Apx' = by + \ldots$$

В интересующем нас случае постоянные Ap, a, b — положительные. Уравнения первого приближения имеют следующие два первых интеграла:

$$H = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) = h$$

$$\Gamma = 2(byx' - axy') - Ap(ax^2 + by^2) + \frac{b-a}{2Ap}(y'^2 - x'^2 + ax^2 - by^2) = k$$

которые при этом не являются знакоопределенными.

Если

$$A^2p^2 - a - b > 0, \qquad (A^2p^2 - b - a)^2 - 4ba > 0$$

то квадратичный интеграл уравнений в вариациях

$$ApH - \Gamma = \frac{A^2p^2 + b - a}{2Ap} x'^2 - 2byx' + \frac{A^2p^2 + b - a}{2Ap} by^2 +$$
$$+ \frac{A^2p^2 + a - b}{2Ap} y'^2 + 2axy' + \frac{A^2p^2 + a - b}{2Ap} ax^2$$

будет определенно положительным; выписанные неравенства являются условиями гироскопической устойчивости.

Голоморфный интеграл полных уравнений возмущенных движений был найден еще Ляпуновым [1] в следующей интересной форме. Если чисто мнимые корни характеристического уравнений $\pm\lambda_1\sqrt{-1}$, $\pm\lambda_2\sqrt{-1}$ удовлетворяют условию, что ни одно отношение λ_1/λ_2, λ_2/λ_1 не представляет целого числа, то система уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi - Ap\varphi = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} f + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \varphi + Apf = \frac{\partial U}{\partial y}$$

(где $U = {}^1/_2 (ax^2 + by^2) + \cdots$ обозначает силовую функцию) имеет два голоморфных решения f и φ, отвечающих корням λ_1 и λ_2. Эти голоморфные решения f, φ определяют траектории периодических решений уравнением

$$2U - f^2 - \varphi^2 = \text{const}$$

5. С некоторой задачей об устойчивости движения тесно связана задача Коши о развитии открытой Гамильтоном аналогии между динамикой консервативных голономных механических систем и оптикой Гюйгенса.

На эту задачу спустя много лет снова обратил внимание математиков Ф. Клейн. Связь этой задачи с некоторой задачей устойчивости, на мой взгляд, может быть пояснена следующим образом. Вейерштрасс в связи с теоремой Лагранжа об устойчивости равновесия при максимуме силовой функции доказал, что вблизи устойчивого равновесия голономной консервативной механической системы все бесконечно малые возмущенные движения имеют колебательный характер, причем в нормальных координатах эти колебания суть гармонические, и наоборот.

Для устойчивого движения голономной консервативной механической системы уравнения в вариациях имеют все характеристические числа равными нулю и являются приводимыми. Это значит, что в соответствующих переменных бесконечно малые возмущенные движения рассматриваемой механической системы аналогичны движениям вблизи устойчивого положения равновесия консервативной голономной системы.

Следовательно, если существует аналогия между динамикой и математической теорией света Коши, в которой свет понимается как колебательный процесс, то эту аналогию следует искать в возмущенных движениях вблизи устойчивых движений голономных, консервативных систем.

Допустим, что связи не зависят от времени и функция Гамильтона имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} \sum g_{ij}\, p_i\, p_j - U$$

Уравнение в частных производных Гамильтона будет

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial V}{\partial q_j} - U = 0$$

Пусть

$$V\ (t,\ q_1,\ \ldots,\ q_n,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) = \text{const}$$

есть функция действия Гамильтона или какой-либо другой полный интеграл последнего уравнения в частных производных. Решение динамической задачи определяется, как известно, системой уравнений

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Вообразим, что возмущенное движение порождается варьированием одних постоянных $\beta_1, \ldots, \beta_n$ при фиксированных значениях постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Устойчивость невозмущенного движения при этих предположениях будет условием, необходимым для устойчивости при варьировании всех постоянных α и β.

Уравнения в вариациях при этом будут

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum_r \frac{\partial}{\partial q_r}\left(\sum_j g_{sj}\frac{\partial U}{\partial q_j}\right)\xi_r$$

Одно из необходимых условий устойчивости может быть получено отсюда по теореме Ляпунова о сумме характеристических чисел правильных систем

$$\text{хар. число } \exp\int\sum_s \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\sum_r g_{sr}\frac{\partial V}{\partial q_r}\right)dt = 0$$

Если в уравнениях в вариациях переменные разделяются, то аналогичные условия устойчивости можно написать по одному для каждой замкнутой в себе группы разделенных переменных.

Предыдущее условие устойчивости в примитивных случаях сводится к эллиптическому уравнению

$$\sum_s \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\sum_r g_{sr}\frac{\partial V}{\partial q_r}\right) = 0$$

Поступила 2 II 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1950.
2. Четаев Н. Г. Об одной задаче Коши, ПММ, т. IX, вып. 5, 1945.
3. Routh. An elementary treatise on the dynamics of a system of rigid bodes, 1877, p. 380.
4. Жуковский Н. Е. О прочности движения, 1882.
5. Ляпунов А. М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч. А. М. Ляпунова, т. I, стр. 327.