Прикладная математика и механика. Том XX 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ОПОРЫ

А. Ю. Ишлинский

(Киев)

Ниже приводятся некоторые решения задачи теоретической механики об относительном равновесии твердого тела с одной, закрепленной на подвижном основании точкой.

Для строгого решения этой задачи необходимо аналитическое рассмотрение вопроса с четким изложением исходных положений и ясным указанием тех систем координат, относительно которых составляются условия равновесия или определяются силы инерции переносного движения элементов твердого тела.

1°. Уже на примере отыскания положения равновесия относительно Земли простого математического маятника можно убедиться, что аналитические приемы исследования позволяют обнаружить такие частные решения задач механики, которые не всегда могут быть замечены при первом рассмотрении этих задач геометрическими методами.

При решении этого примера, а также и в дальнейшем, примем, что Земля является шаром, равномерно вращающимся около своей оси, ориентация которой относительно неподвижных звезд неизменна.

На материальную точку математического маятника действуют две силы: тяготение F к центру Земли по закону

$$F = f\frac{mM}{r^2} \tag{1.1}$$

и натяжение нити T, направленное к точке подвеса. Здесь, как обычно, f — гравитационная постоянная, M — масса Земли, m — масса материальной точки маятника и r — расстояние между этой точкой и центром Земли.

При рассмотрении движения математического маятника относильно системы координат, связанной с вращающейся Землей, к упомянутым силам следует добавить силу инерции переносного движения Q и кориолисову силу инерции S.

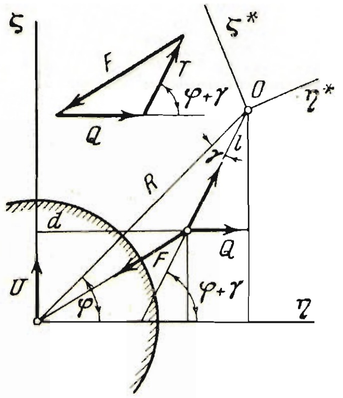
Согласно законам механики, геометрическая сумма сил F, T, Q и S равна вектору $m\dot{w}_r$, где w_r — ускорение относительного движения материальной точки маятника по отношению к системе координат, связанной с Землей.

Если математический маятник неподвижен относительно Земли, то ускорение w_r и кориолисова сила инерции S равны нулю. Следовательно, силы F, T и Q взаимно уравновешиваются. Так как число этих сил равно трем, то линии их действия должны пересекаться в одной точке и располагаться в одной плоскости. Первое требование соблюдается, так как силы F, T и Q приложены к материальной точке маятника, нить которого считается лишенной массы.

Сила тяготения F и сила натяжения нити T лежат в плоскости, содержащей также радиус Земли, проведенный через точку подвеса маятника. Согласно второму требованию, в этой же плоскости должна лежать линия действия силы инерции переносного движения Q, которую уместно в данном случае назвать центробежной силой инерции. Ее величина определяется формулой

$$Q = mU^2 d \tag{1.2}$$

где U — угловая скорость Земли и d — длина перпендикуляра, опущенного из материальной точки маятника на земную ось. Последний является линией действия силы Q. Следовательно, основание перпендикуляра лежит в одной плоскости с материальной точкой маятника, точкой его подвеса и центром Земли. Таким образом, нить маятника располагается в плоскости меридиана.



Фиг. 1

В дальнейшем следует рассмотреть треугольник, который образуют векторы сил F, T и Q, и связать длины его сторон с другими геометрическими элементами задачи (фиг. 1). В результате обнаруживаются два положения равновесия математического маятника, одно из которых не может осуществиться, так как нить маятника не допускает сжимающих напряжений[1].

Другому положению равновесия соответствует отклонение нити маятника на угол γ к югу от радиуса Земли (в северном полушарии), проведенного через точку подвеса маятника.

Угол γ, как следует из теорем подобия треугольников (фиг. 1), определяется уравнением

$$\sin\gamma = \frac{U^2 \sin(\varphi+\gamma)}{fMR} (R^2 + l^2 - 2Rl\cos\gamma)^{3/2} [R\cos\varphi - l\cos(\varphi+\gamma)] \tag{1.3}$$

Здесь R — длина упомянутого радиуса, l — длина нити маятника, φ — геоцентрическая широта точки подвеса маятника. Последняя связана с географической широтой φ_0 соотношением $\varphi_0 = \varphi + \gamma_0$, где γ_0 — угол отклонения к югу математического маятника бесконечно малой длины, или, что то же, отклонения к северу нормали к зеркалу покоящейся тяжелой жидкости (движение маятника рассматривается в северном полушарии).

В обычных условиях длина нити l ничтожно мала по сравнению с длиной радиуса Земли R; угол γ оказывается также весьма малым

[1] Если нить заменить бесконечно тонким, абсолютно жестким и лишенным массы стержнем, то такое положение равновесия окажется возможным. Оно является, как известно, неустойчивым.

Любопытно, что направления стержня в обоих положениях равновесия образуют между собой угол, строго говоря, отличающийся от двух прямых.

(порядка нескольких минут). Поэтому уравнение (1.3) удобно решать последовательными приближениями. Первое приближение приводит к известной формуле элементарной физики

$$\gamma = \frac{U^2R^3}{fM}\cos\varphi_0\sin\varphi_0 \tag{1.4}$$

Последующие уточнения формулы (1.4) совершенно незначительны.

Покажем теперь, что при соблюдении некоторых условий, касающихся длины математического маятника, существует бесчисленное множество других положений равновесия маятника.

Рассмотрим, например, окружность, расположенную в экваториальной плоскости Земли с центром на земной оси и с радиусом r, удовлетворяющим условию

$$U^2r = \frac{fM}{r^2} \tag{1.5}$$

Очевидно, что в любом месте этой окружности материальная точка будет находиться в относительном равновесии по отношению к Земле, так как сила тяготения F и центробежная сила инерции Q в этом случае равны и противоположно направлены.

Поэтому если соединить какую-либо материальную точку, расположенную на упомянутой окружности, нитью с произвольной точкой подвеса, то получится математический маятник, который находится в равновесии. Нить этого маятника, вообще говоря, уже не лежит в плоскости меридиана. Разумеется, далеко не всякий математический маятник заданной длины может иметь такое положение равновесия; этот случай имеет чисто теоретический интерес. Вместе с тем возможность подобного случая равновесия показывает, насколько осторожно следует относиться к заключениям, основанным, казалось бы, на очевидных геометрических соображениях.

Можно указать и другие теоретические случаи равновесия математического маятника, также отличные от указанных в начале настоящего параграфа.

Наиболее простой из них будет иметь место, если в уравнении (1.3) положить $\varphi = {}^1/_2\pi$, т. е. расположить точку подвеса маятника на земной оси. Получим в результате уравнение

$$\sin\gamma = \frac{U^2l\sin\gamma\cos\gamma}{fMR}(R^2 + l^2 - 2Rl\cos\gamma)^{3/2} \tag{1.6}$$

которое, помимо очевидных корней $\gamma = 0,\ \pi$ (линия маятника направлена вдоль земной оси), может иметь, вообще говоря, и другие корни, общие с корнями уравнения

$$\frac{U^2}{fMR}l\cos\gamma\,(R^2 + l^2 - 2Rl\cos\gamma)^{3/2} = 1 \tag{1.7}$$

Введем систему координат $\xi\eta\zeta$ с началом в центре Земли, ось ζ которой направлена вдоль оси Земли к северному полюсу, а ось η лежит в плоскости меридиана, содержащей материальную точку маятника.

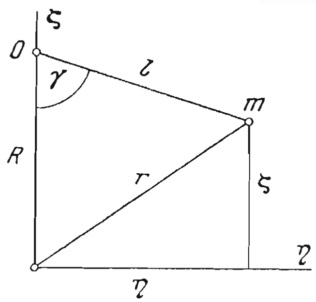
Нетрудно видеть (фиг. 2), что

$$l\cos\gamma = R - \zeta, \qquad R^2 + l^2 - 2Rl\cos\gamma = \eta^2 + \zeta^2$$

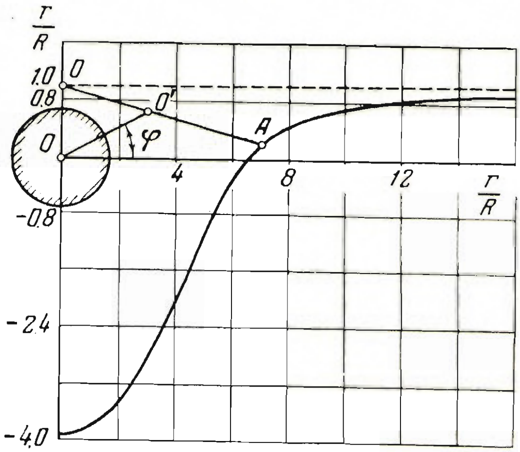
Поэтому уравнение (1.7) можно привести к виду

$$(\eta^2 + \zeta^2)^{3/2} (R - \zeta) = \frac{fRM}{U^2} \qquad (1.8)$$

Уравнение (1.8) определяет в плоскости $\eta\zeta$ геометрическое место точек равновесия математических маятников, имеющих подвес в точке с координатами $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = R$ (фиг. 3). Вместе с тем уравнение (1.3) может иметь корни, аналогичные только что указанным, и в случае $\varphi \neq {}^1/_2\pi$, конечно, при соответственно подобранной длине маятника l. Для доказательства достаточно указать, что, например,



Фиг. 2



Фиг. 3

положение равновесия OA (фиг. 3) маятника, подвешенного в точке оси ζ, совпадает с положением равновесия другого маятника, точкой подвеса которого является любая точка O' прямой OA с произвольной геоцентрической широтой φ.

2°. Приведем для сравнения аналитическое рассмотрение вопроса о равновесии математического маятника относительно вращающейся Земли.

Пусть теперь система координат $\xi\eta\zeta$, введенная выше, расположена так, что координатная плоскость $\eta\zeta$ содержит точку подвеса маятника. Угол между радиусом Земли R, проведенным к точке подвеса, и осью η является геоцентрической широтой φ этой точки.

Уравнение геометрической связи, налагаемой на материальную точку маятника обстоятельством нерастяжимости нити, имеет вид:

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = \xi^2 + (R\cos\varphi - \eta)^2 + (R\sin\varphi - \zeta)^2 - l^2 = 0 \qquad (2.1)$$

Здесь ξ, η и ζ — координаты материальной точки, l — длина нити. В соответствии с теорией равновесия материальной точки на идеальной поверхности имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} F_\xi + Q_\xi + \lambda \frac{\partial\psi}{\partial\xi} &= 0 \\ F_\eta + Q_\eta + \lambda \frac{\partial\psi}{\partial\eta} &= 0 \qquad\qquad \psi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \qquad (2.2) \\ F_\zeta + Q_\zeta + \lambda \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} &= 0 \end{aligned}$$

для определения искомых координат материальной точки и множителя Лагранжа λ.

Последний связан с величиной натяжения нити соотношением

$$T = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)^2} \tag{2.3}$$

В уравнениях (2.2) F_ξ, F_η, F_ζ — проекции силы тяготения F, а Q_ξ, Q_η и Q_ζ — проекции центробежной силы инерции Q:

$$F = \frac{fmM}{r^2}, \qquad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}; \qquad Q = mU^2 d, \qquad d = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \tag{2.4}$$

В развернутом виде первые три уравнения (2.2) представляются следующим образом:

$$\begin{gathered} -\frac{fmM}{r^3}\xi + mU^2\xi + 2\lambda\xi = 0 \\ -\frac{fmM}{r^3}\eta + mU^2\eta - 2\lambda(R\cos\varphi - \eta) = 0 \\ -\frac{fmM}{r^3}\zeta - 2\lambda(R\sin\varphi - \zeta) = 0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Согласно первому из них, либо $\xi = 0$ и, следовательно, в положении равновесия материальная точка маятника должна быть расположена вместе с его точкой подвеса в одной меридиальной плоскости, либо должно иметь место равенство

$$-\frac{fmM}{r^3} + mU^2 + 2\lambda = 0 \tag{2.6}$$

Если $\varphi \neq {}^1/_2\pi$, то из второго уравнения (2.5) немедленно получаем, что в этом случае $\lambda = 0$, т. е. натяжение нити маятника должно равняться нулю.

Равенство (2.6) приводится теперь к условию (1.5), а третье уравнение (2.5) указывает, что в положении равновесия $\zeta = 0$ и, следовательно, материальная точка должна находиться в экваториальной плоскости Земли. Отыскание остальных искомых координат сводится к решению двух алгебраических уравнений:

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{fM}{U^2}\right)^{2/3}, \qquad \xi^2 + \eta^2 - 2R\eta\cos\varphi + R^2 - l^2 = 0 \tag{2.7}$$

следующих из условия (1.5) и уравнения (2.1), при условии $\zeta = 0$

Решение системы уравнений (2.7) приводит к действительным значениям ξ лишь при длинах маятника l, заключенных в известных пределах; последние нетрудно установить.

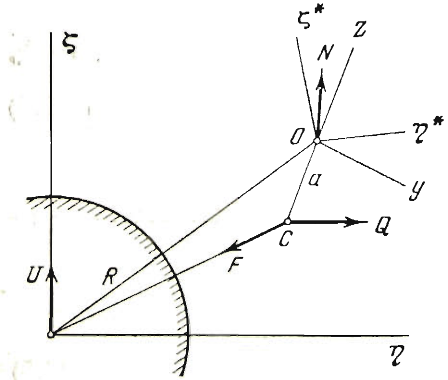
Если же при соблюдении условия (2.6) положить $\varphi = {}^1/_2\pi$, то первые два уравнения (2.5) обратятся в тождества, а последнее примет вид

$$-\frac{fmM}{r^3}\zeta + 2\lambda(R - \zeta) = 0 \tag{2.8}$$

Исключая отсюда посредством соотношения (2.6) множитель Лагранжа λ, приходим к уравнению

$$\frac{RfM}{U^2} = r^3 (R - \zeta) \tag{2.9}$$

которое приводится к уравнению (1.8), если в силу произвольной ориентации для данного случая осей ξ и η направить их так, чтобы плоскость $\eta\zeta$ содержала материальную точку маятника.



Фиг. 4

Вернемся теперь к случаю $\xi = 0$. Исключая множитель λ из двух последних уравнений (2.5), получим

$$\frac{fM\zeta}{(fM - U^2 r^3)\eta} = \frac{R \sin\varphi - \zeta}{R\cos\varphi - \eta} \tag{2.10}$$

Воспользуемся вновь углом γ отклонения нити маятника от радиуса R к югу. Имеем

$$\begin{aligned} R\cos\varphi - \eta &= l\cos(\varphi + \gamma) \\ R\sin\varphi - \zeta &= l\sin(\varphi + \gamma) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Используя соотношения (2.11) и (2.10), можно прийти к равенству

$$fMR\sin\gamma = U^2 r^3 [R\cos\varphi - l\cos(\varphi + \gamma)] \sin(\varphi + \gamma) \tag{2.12}$$

которое эквивалентно уравнению (1.3) в силу очевидной формулы

$$r^2 = R^2 + l^2 - 2Rl\cos\gamma \tag{2.13}$$

3°. Перейдем к рассмотрению задачи об отыскании положения относительного равновесия физического маятника по отношению к вращающейся Земле (фиг. 4).

Пусть маятник подвешен без трения за одну из точек его динамической оси симметрии. Центр тяжести маятника расположен на этой же оси на расстоянии a от точки подвеса.

Примем, что силы притяжения элементарных масс маятника к Земле сводятся к равнодействующей F, линия действия которой проходит через центр тяжести маятника и центр Земли.

Возьмем какую-либо систему координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ с осями, неизменно ориентированными по неподвижным звездам, и началом, расположенным в точке подвеса физического маятника.

При составлении уравнений движения физического маятника относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ к действующим на маятник силе тяготения F и реакции связи N следует добавить силы инерции переносного движения и кориолисовы силы.

В связи с тем что система координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ перемещается поступательно, кориолисовы силы отсутствуют, а силы инерции элементарных масс маятника, обусловленные переносным движением, параллельны друг другу и сводятся к единственной силе Q, равной произведению массы маятника на ускорение точки его подвеса.

Линия действия силы Q проходит через центр тяжести маятника параллельно перпендикуляру, опущенному из точки подвеса на земную ось.

Введем далее систему координат xyz, связанную с физическим маятником; начало этой системы также расположено в точке подвеса.

Пусть ось z направлена по динамической оси симметрии маятника и ω_x, ω_y, ω_z — проекции его угловой скорости на оси x, y, z. Динамические уравнения Эйлера движения маятника как твердого тела вокруг точки опоры по отношению к системе координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ имеют вид:

$$\begin{aligned} A\frac{d\omega_x}{dt} + (C-B)\,\omega_y\omega_z &= y_c(F_z+Q_z) - z_c(F_y+Q_y) \\ B\frac{d\omega_y}{dt} + (A-C)\,\omega_x\omega_z &= z_c(F_x+Q_x) - x_c(F_z+Q_z) \\ C\frac{d\omega_z}{dt} + (B-A)\,\omega_x\omega_y &= x_c(F_y+Q_y) - y_c(F_x+Q_x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь A, B и C — моменты инерции маятника относительно главных осей инерции x, y и z, причем в силу динамической симметрии

$$A = B \tag{3.2}$$

а x_c, y_c и z_c — координаты центра тяжести.

Последний лежит на оси z, поэтому в уравнениях (3.1) следует положить

$$x_c = y_c = 0, \qquad z_c = -a \tag{3.3}$$

Так как по предложению маятник неподвижен относительно Земли, то его угловая скорость равна угловой скорости Земли. Следовательно,

$$\omega_x = U_x, \qquad \omega_y = U_y, \qquad \omega_z = U_z \tag{3.4}$$

где U_x, U_y, U_z — проекции на оси x, y, z вектора угловой скорости Земли.

Замечая, что эти проекции суть постоянные величины, и учитывая равенства (3.2) и (3.3), преобразуем первые два уравнения (3.1) к виду

$$\begin{aligned} (C-A)\,U_yU_z - a(F_y+Q_y) &= 0 \\ (C-A)\,U_xU_z + a(F_x+Q_x) &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Что же касается третьего уравнения, то оно обращается в тождество.

Равенства (3.5) означают, что вектор, равный геометрической сумме векторов $[(C-A)\,U_z]\,U$, $-aF$ и $-aQ$, нормален к осям x и y, следовательно, параллелен оси z. Последнее обстоятельство можно представить в виде пропорции

$$\frac{(C-A)\,U_zU_\xi - a(F_\xi+Q_\xi)}{\lambda} = \frac{(C-A)\,U_zU_\eta - a(F_\eta+Q_\eta)}{\mu} =$$

$$= \frac{(C-A)\,U_zU_\zeta - a(F_\zeta+Q_\zeta)}{\nu} \tag{3.6}$$

где λ, μ, ν — искомые направляющие косинусы оси z в системе координат $\xi\eta\zeta$, начало которой расположено в центре Земли, ось ζ направлена по земной оси и координатная плоскость $\eta\zeta$ содержит точку подвеса физического маятника (ср. п. 2°).

Разумеется, пропорция (3.6) может быть получена из уравнений (3.5) чисто аналитическим путем, если использовать известные соотношения между косинусами углов, которые образуют между собой оси систем координат xyz и $\xi\eta\zeta$.

Так как

$$U_\xi = U_\eta = 0 \tag{3.7}$$

то

$$U_\zeta = U, \qquad U_z = \nu U \tag{3.8}$$

Далее имеем

$$Q_\eta = mU^2 R \cos\varphi, \qquad Q_\xi = Q_\zeta = 0 \tag{3.9}$$

Формулы для проекций силы F имеют следующий вид:

$$F_\xi = -\frac{fmM}{r^3}\xi_c, \qquad F_\eta = -\frac{fmM}{r^3}\eta_c, \qquad F_\zeta = -\frac{fmM}{r^3}\zeta_c \tag{3.10}$$

Здесь m — масса маятника, ξ_c, η_c и ζ_c — координаты его центра тяжести и

$$r = \sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2 + \zeta_c^2} \tag{3.11}$$

Используя равенства (3.7) — (3.10) в пропорции (3.6), получим

$$\frac{afmM\xi_c / r^3}{\lambda} = \frac{-a(mU^2R\cos\varphi - fmM\eta_c / r^3)}{\mu} = \frac{(C-A)U^2\nu + afmM\zeta_c / r^3}{\nu} \tag{3.12}$$

Координаты ξ_c, η_c и ζ_c выражаются через направляющие косинусы λ, μ и ν посредством соотношений

$$\xi_c = -\lambda a, \qquad \eta_c = R\cos\varphi - \mu a, \qquad \zeta_c = R\sin\varphi - \nu a \tag{3.13}$$

Следовательно,

$$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR(\mu\cos\varphi + \nu\sin\varphi)} \tag{3.14}$$

Таким образом, все члены пропорции (3.12) выражены явным образом через величины λ, μ и ν, которые, в свою очередь, связаны известным соотношением

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

Два равенства, на которые распадается пропорция (3.12), вместе с соотношением (3.14) образуют три алгебраических уравнения для отыскания искомых величин λ, μ, ν, задающих направление оси физического маятника в его положении равновесия относительно вращающейся Земли.

Первое из отношений пропорции (3.12), если учесть формулы (3.13), содержит искомую величину λ и в числителе и в знаменателе. Поэтому одному из решений задачи соответствует случай $\lambda = 0$, что означает расположение центра тяжести маятника в меридиальной плоскости $\eta\zeta$, содержащей также точку подвеса.

Случаю $\lambda \neq 0$ соответствуют решения, аналогичные тем, которые были получены для математического маятника при соблюдении условия (1.5). Эти решения, а также случай $\varphi = {}^1/_2\pi$, представляющие лишь теоретический интерес, здесь не рассматриваются.

Вводя угол отклонения γ динамической оси симметрии маятника от радиуса Земли, проходящего через точку подвеса, получим в случае $\lambda = 0$

$$\mu = \cos(\varphi + \gamma), \quad \nu = \sin(\varphi + \gamma) \tag{3.15}$$

после чего равенство двух последних отношений пропорции (3.12) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} -a\sin(\varphi+\gamma)\left[mU^2 R\cos\varphi - fmM\frac{R\cos\varphi - a\cos(\varphi+\gamma)}{r^3}\right] = \\ = \cos(\varphi+\gamma)\left[(C-A)\,U^2\sin(\varphi+\gamma) + afmM\frac{R\sin\varphi - a\sin(\varphi+\gamma)}{r^3}\right] \end{aligned} \tag{3.16}$$

содержащему искомый угол γ.

После упрощений, аналогичных тем, которые совершались при выводе уравнения (2.12), получим

$$fMR\sin\gamma = U^2 r^3\left[R\cos\varphi - \frac{A-C}{ma}\cos(\varphi+\gamma)\right]\sin(\varphi+\gamma) \tag{3.17}$$

где r выражается формулой (3.14). Уравнение (3.17) в отличие от уравнения (2.12) допускает корень $\gamma = 0$ при условии

$$\frac{A-C}{ma} = R \tag{3.18}$$

Таким образом, при соблюдении условия (3.18) центр Земли, точка подвеса покоящегося относительно Земли физического маятника и его центр тяжести лежат на одной прямой. При $C = 0$ это условие эквивалентно известному условию Шулера.

4°. Сравним углы отклонения γ_m и γ_{ph} двух маятников, математического и физического, при условии $l = a$. Приравнивая отношение правых и левых частей уравнений (2.12) и (3.17), получим

$$\frac{\sin\gamma_m}{\sin\gamma_{ph}} = \frac{R\cos\varphi - a\cos(\varphi+\gamma_m)}{R\cos\varphi - a\cos(\varphi+\gamma_{ph}) - (A_c - C)/ma\cos(\varphi+\gamma)_{ph}}\,\frac{\sin(\varphi+\gamma_m)}{\sin(\varphi+\gamma_{ph})} \tag{4.1}$$

где $A_c = A - ma^2$ — экваториальный момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести физического маятника (перпендикулярно оси динамической симметрии).

Если $A_c = C$, то центральный эллипсоид инерции маятника есть шар. В этом случае $\gamma_m = \gamma_{ph}$.

Нетрудно убедиться, что если $A_c < C$, то $\gamma_{ph} > \gamma_m$ и обратно.

Таким образом, в некоторых случаях физический маятник может отклониться от радиуса Земли на угол больший, нежели маятник математический.

5°. Наконец, рассмотрим физический маятник с подвижной точкой опоры и выясним, при соблюдении каких условий ось его динамической симметрии будет находиться в относительном покое по отношению к трехграннику Дарбу $\xi\eta\zeta$, вершина которого O движется по любому закону по поверхности неподвижной сферы радиуса R, концентрической с земным шаром[1]; оси ξ и η, касающиеся этой сферы, могут поворачиваться произвольным образом (фиг. 5).

---

[1] Здесь, как и ранее, можно считать центр Земли неподвижной точкой.

Для последующего необходимо определить абсолютное ускорение вершины трехгранника.

С этой целью обозначим через v_ξ, v_η, v_ζ проекции абсолютной скорости вершины трехгранника на его собственные оси $\xi\eta\zeta$ и через ω_ξ, ω_η, ω_ζ — проекции на те же оси его угловой скорости.

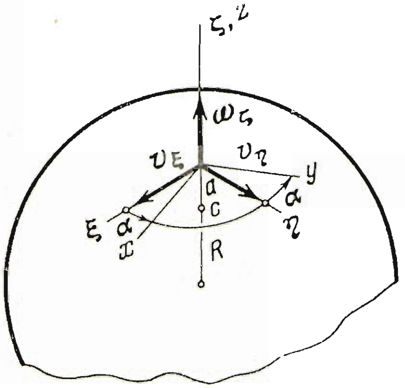
Нетрудно заметить, что проекции абсолютной скорости вершины трехгранника v_ξ и v_η выражаются соответственно через проекции его угловой скорости ω_ξ и ω_η.

Действительно, скорость любой точки трехгранника с координатами ξ, η и ζ имеет на оси трехгранника следующие проекции:

$$v_\xi + \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta, \qquad v_\eta + \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta, \qquad v_\zeta + \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi \tag{5.1}$$

Подставляя в эти выражения координаты центра Земли $\xi = \eta = 0$, $\zeta = -R$ и замечая, что его скорость равна нулю, получим

$$v_\xi = \omega_\eta R, \quad v_\eta = -\omega_\xi R, \quad v_\zeta = 0 \tag{5.2}$$



Фиг. 5

Последнее равенство очевидно.

Согласно известным теоремам кинематики твердого тела, проекции ускорения вершины трехгранника на его же оси выражаются формулами

$$\begin{aligned} w_\xi &= \frac{dv_\xi}{dt} + \omega_\eta v_\zeta - \omega_\zeta v_\eta \\ w_\eta &= \frac{dv_\eta}{dt} + \omega_\zeta v_\xi - \omega_\xi v_\zeta \\ w_\zeta &= \frac{dv_\zeta}{dt} + \omega_\xi v_\eta - \omega_\eta v_\xi \end{aligned} \tag{5.3}$$

Используя равенство (5.2), получим в соответствии с формулами (5.3) следующие искомые выражения для проекций ускорения вершины трехгранника:

$$w_\xi = \left(\frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\xi \omega_\zeta\right) R, \qquad w_\eta = \left(-\frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\eta \omega_\zeta\right) R, \qquad w_\zeta = -(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) R \tag{5.4}$$

Введем теперь вновь поступательно перемещающуюся систему координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$ с началом в точке подвеса маятника.

Относительно этой системы движение физического маятника будет подчиняться тем же по виду динамическим уравнениям Эйлера (3.1), что и в п. 3°, однако теперь проекции угловой скорости физического маятника уже не будут постоянными величинами.

Учитывая равенства (3.2) и (3.3), представим уравнения (3.1) в виде

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - A)\, \omega_y \omega_z &= a\,(F_y + Q_y) \\ A \frac{d\omega_y}{dt} - (C - A)\, \omega_x \omega_z &= -a\,(F_x + Q_x) \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$C \frac{d\omega_z}{dt} = 0$$

Ограничимся изучением такого движения маятника, при котором ось z непрерывно совпадает с осью ζ, т. е. направлена по радиусу Земли. В этом случае

$$F_x = F_y = 0 \tag{5.6}$$

Обозначим через α угол между осью x и осью ξ. Тогда, как нетрудно убедиться, имеют место соотношения

$$\omega_x = \omega_\xi \cos\alpha + \omega_\eta \sin\alpha, \quad \omega_y = -\omega_\xi \sin\alpha + \omega_\eta \cos\alpha, \quad \omega_z = \omega_\zeta + \frac{d\alpha}{dt} \tag{5.7}$$

Подставляя выражения для ω_x, ω_y, ω_z в уравнения (5.5), учитывая равенство (5.6), получим

$$\begin{gathered}
A\left(\frac{d\omega_\xi}{dt}\cos\alpha + \frac{d\omega_\eta}{dt}\sin\alpha\right) + A(-\omega_\xi \sin\alpha + \omega_\eta\cos\alpha)\frac{d\alpha}{dt} + \\
+ (C - A)\left(\omega_\zeta + \frac{d\alpha}{dt}\right)(-\omega_\xi\sin\alpha + \omega_\eta\cos\alpha) = aQ_y \\
A\left(-\frac{d\omega_\xi}{dt}\sin\alpha + \frac{d\omega_\eta}{dt}\cos\alpha\right) + A(-\omega_\xi\cos\alpha - \omega_\eta\sin\alpha)\frac{d\alpha}{dt} - \\
-(C - A)\left(\omega_\zeta + \frac{d\alpha}{dt}\right)(\omega_\xi\cos\alpha + \omega_\eta\sin\alpha) = -aQ_x \\
C\frac{d}{dt}\left(\omega_\zeta + \frac{d\alpha}{dt}\right) = 0
\end{gathered} \tag{5.8}$$

Умножим левую и правую части первого уравнения (5.8) на $\cos\alpha$, второго на $\sin\alpha$ и вычтем из первого уравнения второе. После очевидных упрощений придем к соотношению

$$A\frac{d\omega_\xi}{dt} + C\frac{d\alpha}{dt}\omega_\eta + (C - A)\omega_\eta\omega_\zeta = a(Q_x\sin\alpha + Q_y\cos\alpha) \tag{5.9}$$

Умножим далее левую и правую части первых двух уравнений соответственно на $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и произведем аналогичные операции. Получим в результате соотношение

$$A\frac{d\omega_\eta}{dt} - (C - A)\omega_\xi\omega_\zeta - C\omega_\xi\frac{d\alpha}{dt} = -a(Q_x\cos\alpha - Q_y\sin\alpha) \tag{5.10}$$

Замечая, что

$$\begin{gathered}
Q_x\cos\alpha - Q_y\sin\alpha = Q_\xi = -mw_\xi \\
Q_x\sin\alpha + Q_y\cos\alpha = Q_\eta = -mw_\eta
\end{gathered} \tag{5.11}$$

и принимая во внимание формулы (5.4), можно соотношения (5.9) и (5.10) преобразовать к виду

$$\begin{gathered}
(A - maR)\left(\frac{d\omega_\xi}{dt} - \omega_\eta\omega_\zeta\right) + C\omega_\eta\left(\omega_\zeta + \frac{d\alpha}{dt}\right) = 0 \\
(A - maR)\left(\frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\xi\omega_\zeta\right) - C\omega_\xi\left(\omega_\zeta + \frac{d\alpha}{dt}\right) = 0
\end{gathered} \tag{5.12}$$

$$C\frac{d}{dt}\left(\omega_\zeta + \frac{d\alpha}{dt}\right) = 0$$

В число соотношений (5.12) включено также третье из уравнений (5.8). Если физический маятник полностью неподвижен относительно трехгранника $\xi\eta\zeta$, то в равенствах (5.12) следует положить $\alpha = \text{const}$.

При произвольно изменяющихся величинах ω_ξ, ω_η, ω_ζ равенства (5.12) удовлетворяются только в том случае, если единовременно соблюдаются два условия:

$$\frac{A}{ma} = R, \qquad C = 0 \tag{5.13}$$

Первое из них есть известное условие Шулера (приведенная длина физического маятника должна быть равна радиусу Земли). Второе показывает, что в данном случае физический маятник неосуществим, так как все его массы должны расположиться на оси ζ.

Вращение маятника вокруг собственной оси z, совпадающей с осью ζ, для приложений мало существенно.

Поэтому, учитывая, что при $C \neq 0$ в силу третьего уравнения (5.12)

$$\omega_\zeta + \frac{d\alpha}{dt} = \text{const} \tag{5.14}$$

можно начальное значение относительной угловой скорости $d\alpha / dt$ выбрать таким, чтобы константа в первом интеграле (5.14) обратилась в нуль. Тогда первые два уравнения (5.12) тождественно удовлетворяются при соблюдении только первого условия (5.13). Момент инерции C может быть произвольным.

Заметим, что в этом случае проекция абсолютной угловой скорости маятника на ось его динамической симметрии z равна нулю.

В частном случае, если трехгранник $\xi\eta\zeta$ неподвижен относительно Земли, проекции его угловой скорости ω_ξ, ω_η, ω_ζ постоянны и, следовательно, условия (5.12) приводятся при $\alpha = \text{const}$ к виду

$$\begin{aligned} (A - C - maR)\,\omega_\xi\omega_\zeta &= 0 \\ (A - C - maR)\,\omega_\eta\,\omega_\zeta &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Отсюда следует условие (3.18), при соблюдении которого динамическая ось симметрии покоящегося маятника направлена к центру Земли.

Поступила 10 III 1956 Институт математики АН УССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслов Г. К. Теоретическая механика. ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.