Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ

Б. С. Разумихин

(Москва)

Н. Г. Четаев [2] предложил способ решения задачи устойчивости нулевого решения системы вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} [c_{ij} + \varepsilon f_{ij}(t)]\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где c_{ij} — постоянные, $f_{ij}(t)$ — ограниченные функции, ε — параметр. При этом предполагается, что система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

удовлетворяет условиям асимптотической устойчивости.

Способ состоит в построении определенно положительной квадратичной формы

$$V = \sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

удовлетворяющей уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} (c_{s1} x_1 + c_{s2} x_2 + \ldots + c_{sn} x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \tag{2}$$

Построенная указанным образом определенно положительная квадратичная форма V является функцией Ляпунова и для системы (1), если значение параметра ε для всяких $t > t_0$ удовлетворяет n неравенствам

$$(-1)^r \begin{vmatrix} h_{11} \ldots h_{1r} \\ \ldots \\ h_{r1} \ldots h_{rr} \end{vmatrix} > 0 \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

где

$$h_{ij} = -\delta_{ij} + \tfrac{1}{2} \varepsilon \sum_{s=1}^{n} (\alpha_{is} f_{sj}(t) + \alpha_{js} f_{si}(t)) \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 1 & \text{при } i \neq j \end{cases}\right) \tag{4}$$

Пределы, в которых должно заключаться значение параметра ε, определяются ближайшими к нулю корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} h_{11} \ldots h_{1n} \\ \ldots\ldots \\ h_{n1} \ldots h_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Другой способ, также принадлежащий Н. Г. Четаеву [3,4], относится к системам с медленно меняющимися коэффициентами.

Пусть коэффициенты системы уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

таковы, что любая система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t^*)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

где t^* — произвольное фиксированное число из интервала $0 \leqslant t^* < \infty$, удовлетворяет условиям асимптотической устойчивости.

Кроме того, предположим, что функции $p_{ij}(t)$ дифференцируемы и их производные могут быть представлены в виде

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = \varepsilon q_{ij}(t) \tag{7}$$

где ε — параметр, а $q_{ij}(t)$ — ограниченные функции.

Определим квадратичную форму

$$V = \sum_{ij=1}^{n} \alpha_{ij}(t)\, x_i x_j \tag{8}$$

удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}(t)\, x_1 + p_{s2}(t)\, x_2 + \ldots + p_{sn}(t)\, x_n)\, \frac{\partial V}{\partial x_s} = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \tag{9}$$

При этом коэффициенты $\alpha_{ij}(t)$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} [\alpha_{is}(t)\, p_{sj}(t) + \alpha_{js}(t)\, p_{si}(t)] = -\delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

Производная квадратичной формы в силу системы (5) будет иметь вид:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{ij=1}^{n} \left(\frac{d\alpha_{ij}}{dt} - \delta_{ij}\right) x_i x_j \tag{11}$$

Но из системы (10), определяющей функции $\alpha_{ij}(t)$, и условия (7) следует, что производная $d\alpha_{ij}/dt$ может быть представлена в виде

$$\frac{d\alpha_{ij}}{dt} = \varepsilon \varphi_{ij}(t) \tag{12}$$

где $\varphi_{ij}(t)$ — ограниченные функции.

Квадратичная форма V, очевидно, является определенно положительной. Квадратичная форма dV/dt будет определенно отрицательной при условиях

$$(1)^s \det_s \left\| \frac{d\alpha_{ij}}{dt} - \delta_{ij} \right\| > 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

где s указывает порядок определителя, δ_{ij} — символ Кронекера определенный (4).

Подставляя выражения производных согласно равенствам (12), получаем n неравенств, которым должно удовлетворять значение параметра ε при всяких $t > t_0$.

Так как при изменении параметра ε от нулевого значения первым обращается в нуль старший из определителей Сильвестера, пределами, в которых должна заключаться величина параметра ε, будут ближайшие к нулю корни уравнения

$$\det_n \| \varepsilon\varphi_{ij} - \delta_{ij} \| = 0 \tag{14}$$

Изложенный выше способ допускает обобщение, которое является целью настоящей работы.

Рассматривается система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{15}$$

коэффициенты которой $p_{ij}(t)$ ограничены, имеют ограниченные первые производные и таковы, что система с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(\varkappa)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{16}$$

где $\varkappa$ — параметр, удовлетворяет условиям асимптотической устойчивости при всяких положительных значениях параметра $\varkappa$ и корни уравнения $\det_n \| p_{ij}(\varkappa) - \delta_{ij}\lambda \| = 0$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_i(\varkappa) < -\delta < 0$, где δ — произвольно малое фиксированное положительное число.

Введем новую независимую переменную τ; $t = t(\tau)$. Выполняя преобразование системы (15) к новой независимой переменной, получим

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^{n} \frac{dt}{d\tau}\, p_{ij}[t(\tau)]\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{17}$$

Пусть

$$V = \sum_{ij=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j \qquad (\beta_{ij} = \beta_{ji}) \tag{18}$$

квадратичная форма, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial V}{\partial x_s} \sum_{k=1}^{n} \frac{dt}{d\tau}\, p_{sk}[t(\tau)]\, x_k \right] = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \tag{19}$$

Коэффициенты β_{ij} такой квадратичной формы определяются из системы уравнений

$$\frac{dt}{d\tau} \sum_{s=1}^{n} \{\beta_{is}(\tau)\, p_{sj}[t(\tau)] + \beta_{js}(\tau)\, p_{si}[t(\tau)]\} = -\delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

Сравнивая систему (20) с системой (10), замечаем, что

$$\beta_{ij}(\tau) = \frac{1}{dt / d\tau}\, \alpha_{ij}[t(\tau)] \tag{21}$$

В силу условий, которым удовлетворяют коэффициенты $p_{ij}(t)$, функции $\alpha_{ij}[t(\tau)]$ являются коэффициентами определенно положительной квадратичной формы. Поэтому, чтобы функции $\beta_{ij}(\tau)$ также являлись коэффициентами определенно положительной квадратичной формы, необходимо выполнение следующего условия для производной $dt/d\tau$:

$$\eta < \frac{dt}{d\tau} < k \tag{22}$$

где k — произвольно большое фиксированное положительное число, η — произвольно малое фиксированное положительное число.

Производная квадратичной формы (18) в силу системы уравнений возмущенного движения (17) будет квадратичной формой вида

$$\frac{dV}{d\tau} = \sum_{ij=1}^{n} \left(\frac{d\beta_{ij}}{d\tau} - \delta_{ij}\right) x_i x_j \tag{23}$$

Производная $d\beta_{ij} / d\tau$ в силу (21) равна

$$\frac{d\beta_{ij}}{d\tau} = \frac{d\alpha_{ij}}{dt} - \alpha_{ij}(t) \frac{d^2 t / d\tau^2}{(dt / d\tau)^2}$$

Полагая $dt / d\tau = r$, получим

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\tau} = r\frac{dr}{dt}, \qquad \frac{d^2 t / d\tau^2}{(dt / d\tau)^2} = \frac{d}{dt}\ln r$$

Обозначая $\ln r = \sigma$, получим следующее выражение для квадратичной формы:

$$\frac{dV}{d\tau} = \sum_{ij=1}^{n} \left[\frac{d\alpha_{ij}}{dt} - \alpha_{ij}(t)\frac{d\sigma}{dt} - \delta_{ij}\right] x_i x_j \tag{24}$$

В силу условия (22) нулевое решение системы (13) устойчиво, если возможно определить ограниченную функцию $\sigma(t)$, производная которой удовлетворяет n неравенствам

$$(-1)^k \det{}_k \left\| \frac{d\alpha_{ij}}{dt} - \alpha_{ij}(t)\frac{d\sigma}{dt} - \delta_{ij} \right\| > 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

В виду того, что $\alpha_{ij}(t)$ — коэффициенты определенно положительной квадратичной формы и производные $d\alpha_{ij} / dt$ ограничены, квадратичная форма $dV / d\tau$ будет определенно отрицательной при достаточно больших значениях производной $d\sigma / dt$.

Если $\bar{\lambda}_k(t)$ — наибольший корень уравнения

$$\det{}_k \left\| \frac{d\alpha_{ij}}{dt} - \alpha_{ij}\lambda - \delta_{ij} \right\| = 0 \tag{25}$$

то для отрицательности квадратичной формы (24) необходимо

$$\frac{d\sigma}{dt} \geqslant \max\{\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \ldots \bar{\lambda}_n\} \tag{26}$$

Так как при уменьшении $d\sigma / dt$ от значения, удовлетворяющего неравенству (26), первым обращается в нуль старший из определителей Сильвестера, то для определения нижнего предела для производной $d\sigma / dt$ достаточно вычислить значения $\bar{\lambda}_n(t)$ наибольшего корня уравнения (25) при $k = n$.

При этом условие (26) принимает вид:

$$\frac{d\sigma}{dt} \geqslant \bar{\lambda}_n(t) \tag{27}$$

Производная $dt / d\tau$ положительна, так как

$$\frac{dt}{d\tau} = r = e^{\sigma} = \exp\int_0^t \frac{d\sigma}{dt}\, dt$$

следовательно, для выполнения условия (22) необходимо существование конечной верхней границы для функции $\sigma(t)$, производная которой удовлетворяет условию (27). Полагая $d\sigma / dt$ равной ее предельному значению $\overline{\lambda}_n(t)$, получим в качестве условия отрицательности квадратичной формы $dV / d\tau$ условие существования конечного верхнего предела интеграла

$$\int_0^t \overline{\lambda}_n(t)\, dt \qquad (\infty > t > 0) \tag{28}$$

Изложенное выше можно резюмировать в виде следующего предложения.

Невозмущенное движение устойчиво, если коэффициенты системы уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ограничены, имеют ограниченные первые производные, удовлетворяют для всякого $t > 0$ условиям Рауса-Гурвица и существует конечный верхний предел интеграла

$$\int_0^t \overline{\lambda}_n(t)\, dt \qquad (\infty > t > 0)$$

где $\overline{\lambda}_n$ — наибольший корень уравнения (25) при $k = n$.

Поступила 4 XII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
2. Н. Г. Четаев. Устойчивость движения. ОГИЗ, 1946.
3. Н. Г. Четаев. О наименьшем характеристичном числе. ПММ, т. IX, в. 3, 1945.
4. Н. Г. Четаев. О знаке наименьшего характеристичного числа. ПММ, т. XII. в. 1, 1948.