Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

# ДАВЛЕНИЕ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ШТАМПА, ИМЕЮЩЕГО В ПЛАНЕ ФОРМУ ПОЛОСЫ

В. Л. Рвачев

(Осипенко)

В большинстве работ, посвященных пространственным контактным задачам теории упругости, предполагается, что область контакта есть круг или эллипс (Л. А. Галин [1], И. Я. Штаерман [2], М. Я. Леонов [3], А. И. Лурье [4], В. И. Моссаковский [5] и др.).

Решения пространственных контактных задач могут быть использованы при решении задач об изгибе балок и плит на упругом основании. С этой точки зрения большой интерес представляет задача о давлении под штампом в случае, когда область контакта имеет форму полосы Однако решение этой задачи не может быть получено как предельный случай из имеющихся решений задачи, относящихся к эллиптическому штампу, ввиду возникающих при таком переходе принципиальных затруднений.

§ 1. Пренебрегая силами трения между штампом и основанием, задачу о давлении на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы, можно привести к решению интегрального уравнения

$$w(x,\ y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\int\limits_{-a}^{a} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\xi,\ \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \qquad (|x|<a) \tag{1.1}$$

где $z = w(x,\ y)$ — уравнение поверхности основания штампа, $p(x,\ y)$ — искомое давление под подошвой штампа, $2a$ — ширина полосы, $\nu$ и $E$ — упругие постоянные.

В работе сначала рассматривается случай, когда функция $w(x,\ y)$ имеет вид:

$$w(x,\ y) = f(\lambda,\ x)\cos\lambda y \tag{1.2}$$

где $\lambda$ — произвольное положительное число.

При помощи решения, полученного в этом случае, оказывается возможным получить решение в общем случае при весьма общих предположениях относительно функции $w(x,\ y)$.

Если осадка под штампом определяется формулой (1.2), то уравнению (1.1) можно удовлетворить, полагая

$$p(x,\ y) = \varphi(\lambda,\ x)\cos\lambda y \qquad (|x|<a) \tag{1.3}$$

где $\varphi(\lambda,\ x)$ — решение уравнения

$$f(\lambda,\ x) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\int\limits_{-a}^{a}\varphi(\lambda,\ \xi)\,K_0(\lambda\,|x-\xi|)\,d\xi \tag{1.4}$$

В этой формуле $K_0(t)$ — видоизмененная функция Бесселя второго рода, удовлетворяющая уравнению

$$y'' + t^{-1}y' - y = 0 \tag{1.5}$$

Используя последнее обстоятельство, можно показать, что функция

$$\Phi(\lambda, x, z) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\int_{-a}^{a}\varphi(\lambda, \xi) K_0 [\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 + z^2}]\, d\xi \tag{1.6}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \lambda^2 \Phi = 0 \tag{1.7}$$

в точках плоскости $xoz$, за исключением точек отрезка $-a < x < a$, $z = 0$, и обращается в точках этого отрезка в функцию $f(\lambda, x)$. Кроме того, $\Phi(\lambda, x, z) \to 0$ при $x^2 + z^2 \to \infty$.

Так как функция $K_0(t)$ имеет единственную (логарифмическую) особенность при $t = 0$, можно получить следующие формулы, аналогичные известным формулам теории потенциала:

$$\frac{\partial \Phi(\lambda, x, +0)}{\partial z} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\varphi(\lambda, x), \qquad \frac{\partial \Phi(\lambda, x, -0)}{\partial z} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\varphi(\lambda, x) \qquad (|x| < a) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial \Phi(\lambda, x, 0)}{\partial z} = 0 \qquad (|x| > a) \tag{1.9}$$

Таким образом, если будет найдено решение $\Phi(\lambda, x, z)$ дифференциального уравнения (1.7), удовлетворяющее граничным условиям

$$\Phi(\lambda, x, 0) = f(\lambda, x) \quad \text{при } |x| < a; \qquad \Phi(\lambda, x, z) \to 0 \quad \text{при } x^2 + z^2 \to \infty$$

то функция $\varphi(\lambda, x)$ будет найдена из соотношений (1.8).

При отыскании решения уравнения (1.7) в области, расположенной вне отрезка $-a < x < +a$ оси $ox$, по его значению на этом отрезке оказывается удобным перейти к эллиптическим координатам.

**§ 2.** Положим

$$x = a\cos\eta \operatorname{ch}\xi, \qquad y = a \sin\eta \operatorname{sh}\xi \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.7) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \frac{a^2\lambda^2}{2}(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)\,\Phi = 0 \tag{2.2}$$

Граничные условия примут вид

$$\Phi(\lambda, 0, \eta) = f(\lambda, a\cos\eta), \qquad \Phi(\lambda, \infty, \eta) = 0 \tag{2.3}$$

Вместо формул (1.8) получим формулу

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \frac{2(1-\nu^2)}{E}\,|\sin\eta|\,\varphi(\lambda, a\cos\eta) \tag{2.4}$$

справедливую для всех значений $\eta$.

Пусть $\Phi = U(\xi)V(\eta)$. Тогда имеем уравнения Матье ($\alpha = \text{const}$)

$$V'' + (\alpha + \tfrac{1}{2}a^2\lambda^2\cos 2\eta)V = 0, \qquad U'' - (\alpha + \tfrac{1}{2}a^2\lambda^2 \operatorname{ch} 2\xi)U = 0 \tag{2.5}$$

Приведем некоторые соотношения из теории функций Матье (см., например, [6]), которые будут нужны в дальнейшем изложении.

**§ 3.** Рассмотрим уравнение Матье в виде

$$d^2y / dx^2 + (\alpha - 2q \cos 2x) y = 0 \tag{3.1}$$

Будем искать четные решения этого уравнения, имеющие период $\pi$ или $2\pi$. При $q = 0$ уравнение (3.1) принимает вид:

$$d^2y / dx^2 + \alpha y = 0 \tag{3.2}$$

Тогда для того, чтобы получить решения с периодом $\pi$ или $2\pi$, положим $\alpha = m^2$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$ Этим значениям параметра $\alpha$ будут соответствовать четные решения $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ уравнения (3.2).

Если $q \neq 0$, то для того, чтобы решение уравнения (3.1) имело период $\pi$ или $2\pi$, параметры $\alpha$ и $q$ должны быть связаны между собой. Можно показать, что для каждого действительного значения $q$ найдется последовательность значений $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots$, для которых уравнение (3.1) допускает четные решения, имеющие период $\pi$ или $2\pi$; эти решения уравнения (3.1) называют четными функциями Матье первого рода целого порядка и обозначают через $\mathrm{ce}_0(x, q), \mathrm{ce}_1(x, q), \ldots, \mathrm{ce}_m(x, q), \ldots$; при $q \to 0$ они переходят в $1, \cos x, \ldots, \cos mx, \ldots$ соответственно.

Вторые решения уравнения (3.1), соответствующие решениям $\mathrm{ce}_m(x, q)$, обозначаются $\mathrm{fe}_m(x, q)$. Эти решения уже не являются периодическими.

Если в уравнении (3.1) заменить $x$ на $ix$, получим

$$d^2y / dx^2 - (\alpha - 2q \operatorname{ch} 2x) y = 0 \tag{3.3}$$

Решения уравнения (3.3), полученные при тех же значениях параметров $\alpha$ и $q$, что и $\mathrm{ce}_m(x, q)$, называются модифицированными функциями Матье и обозначаются $\mathrm{Ce}_m(x, q)$. Вторые решения обозначаются $\mathrm{Fe}_m(x, q)$.

Вводятся и другие функции Матье, являющиеся решениями уравнения (3.3). Так, например, окажется удобным использовать в дальнейшем функции $\mathrm{Fek}_m(x, q)$, так как $\mathrm{Fek}_m(\infty, -q) = 0$. Функции $\mathrm{Fek}_m(x, q)$ могут быть получены путем линейной комбинации из функций $\mathrm{Ce}_m(x, q)$ и $\mathrm{Fe}_m(x, q)$.

Если в уравнении (3.1) положить $\frac{1}{2}\pi - x$ вместо $x$, получим

$$d^2y / dx^2 + (\alpha + 2q \cos 2x) y = 0 \tag{3.4}$$

что соответствует перемене знака параметра $q$ в уравнении (3.1). Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathrm{ce}_{2n}(x, -q) &= (-1)^n \mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{1}{2}\pi - x, q\right) \\ \mathrm{ce}_{2n+1}(x, -q) &= (-1)^n \mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\pi - x, q\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Множитель $(-1)^n$ в формулах (3.5) вводится в связи с тем, что при $q \to 0$ функции $\mathrm{ce}_{2n}(x, q)$ и $\mathrm{ce}_{2n+1}(x, q)$ должны по определению вырождаться в $\cos 2nx, \cos(2n+1)x$.

Функции $\pi^{-1/2}\mathrm{ce}_m(x, q)$ при $m > 0$ ортогональны и нормированы в промежутке $(0, 2\pi)$, т. е.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_m(x, q)\, \mathrm{ce}_n(x, q)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 1 & \text{при } m = n > 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_\theta^2(x, q)\,dx = 1 \tag{3.7}$$

Отметим также следующие разложения в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды Фурье:

$$\mathrm{ce}_{2n}(x, q) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{2\nu}^{(2n)} \cos 2\nu x, \qquad \mathrm{ce}_{2n+1}(x, q) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{2\nu+1}^{(2n+1)} \cos(2\nu+1)x \tag{3.8}$$

Коэффициенты $A_n^{(m)}$ есть функции от $q$. Для их вычисления можно составить рекуррентные формулы. Можно воспользоваться также готовыми таблицами [7].

На основании свойств ортогональности функций $\mathrm{ce}_m(x, q)$ можно получить следующие разложения в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды по этим функциям:

$$1 = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} A_0^{(2\nu)}\,\mathrm{ce}_{2\nu}(x, q) \qquad \cos 2nx = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{2n}^{(2\nu)}\,\mathrm{ce}_{2\nu}(x, q), \tag{3.9}$$

$$\cos(2n+1)x = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{2n+1}^{2\nu+1}\,\mathrm{ce}_{2\nu+1}(x, q) \qquad (n \geqslant 1)$$

§ 4. Будем предполагать, что функция $f(\lambda, x)$ такова, что может быть разложена на промежутке $-a \leqslant x \leqslant a$ в равномерно сходящийся ряд по полиномам Чебышева:

$$f(\lambda, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu T_\nu\left(\frac{x}{a}\right), \qquad T_\nu\left(\frac{x}{a}\right) = \cos \nu \arccos \frac{x}{a} \tag{4.1}$$

$$s_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\lambda, a\cos\varphi)\,d\varphi, \qquad s_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\lambda, a\cos\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi \tag{4.2}$$

На основании формулы (4.1) граничные условия (2.3) примут вид:

$$\Phi(\lambda, 0, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \cos \nu\eta, \qquad \Phi(\lambda, \infty, \eta) = 0 \tag{4.3}$$

Если воспользоваться формулами (3.5) и (3.8), первую из формул (4.3) можно переписать так:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda, 0, \eta) &= 2s_0 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i A_0^{(2i)}\,\mathrm{ce}_{2i}(\eta, -q) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu s_{2\nu} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i A_{2\nu}^{(2i)}\,\mathrm{ce}_{2i}(\eta, -q) + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s_{2\nu+1} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i A_{2\nu+1}^{(2i+1)}\,\mathrm{ce}_{2i+1}(\eta, -q)\end{aligned} \tag{4.4}$$

Так как функции $\mathrm{ce}_m(\eta, -q)$ и $\mathrm{Fek}_m(\xi, -q)$ являются решениями соответственно первого и второго уравнений (2.5), при одном и том же значении параметра $\alpha$ и при $q = {}^1/_4 a^2\lambda^2$, то их произведение есть решение уравнения (1.7). Это позволяет решение уравнения (1.7), удовлетворяющее граничному условию (4.3), выбрать в виде

$$\Phi(\lambda, \xi, \eta) = 2s_0 \sum_{i=0}^{\infty} r_0^{(2i)} \operatorname{Fek}_{2i}(\xi, -q) \operatorname{ce}_{2i}(\eta, -q) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu s_{2\nu} \sum_{i=0}^{\infty} r_{2\nu}^{(2i)} \operatorname{Fek}_{2i}(\xi, -q) \operatorname{ce}_{2i}(\eta, -q) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s_{2\nu+1} \sum_{i=0}^{\infty} r_{2\nu+1}^{(2i+1)} \operatorname{Fek}_{2i+1}(\xi, -q) \operatorname{ce}_{2i+1}(\eta, -q) \tag{4.5}$$

где

$$q = \frac{a^2\lambda^2}{4}, \qquad r_{2\nu}^{(2i)} = \frac{(-1)^i A_{2\nu}^{(2i)}}{\operatorname{Fek}_{2i}(0, -q)}, \qquad r_{2\nu+1}^{(2i+1)} = \frac{(-1)^i A_{2\nu+1}^{(2i+1)}}{\operatorname{Fek}_{2i+1}(0, -q)} \tag{4.6}$$

Так как $\operatorname{Fek}_m(\infty, -q) = 0$, то функция $\Phi(\lambda, \xi, \eta)$ удовлетворяет также условию $\Phi(\lambda, \infty, \eta) = 0$. Используя формулу (2.4), получим

$$\varphi(\lambda, a\cos\eta) = \frac{E}{2(1-\nu^2)|\sin\eta|} \left\{ 2s_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i A_0^{(2i)} \operatorname{Fek}_{2i}'(0, -q)}{\operatorname{Fek}_{2i}(0, -q)} \operatorname{ce}_{2i}(\eta, -q) + \right.$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu s_{2\nu} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i A_{2\nu}^{2i} \operatorname{Fek}_{2i}'(0, -q)}{\operatorname{Fek}_{2i}(0, -q)} \operatorname{ce}_{2i}(\eta, -q) +$$

$$\left. + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s_{2\nu+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i A_{2\nu+1}^{(2i+1)} \operatorname{Fek}_{2i+1}'(0, -q)}{\operatorname{Fek}_{2i+1}(0, -q)} \operatorname{ce}_{2i+1}(\eta, -q) \right\} \tag{4.7}$$

Можно показать, что ряды в (4.5) и (4.7) сходятся равномерно.

§ 5. Рассмотрим частный случай, когда осадка основания под штампом определяется по закону

$$w(x, y) = d\cos\lambda y \qquad (|x| < a) \tag{5.1}$$

где $d$ — постоянная. Из формул (4.2) следует, что $s_0 = d$, $s_k = 0\ (k \geqslant 1)$. Поэтому из (4.7) получим

$$\varphi(\lambda, x) = -\frac{Ed}{(1-\nu^2)\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i A_0^{(2i)} \operatorname{Fek}_{2i}'(0, -q)}{\operatorname{Fek}_{2i}(0, -q)} \operatorname{ce}_{2i}\left(\arccos\frac{x}{a}, -q\right) \tag{5.2}$$

Формулу (5.2) можно преобразовать к виду, более удобному для вычислений. Воспользовавшись формулами (3.5) и (3.8), сможем написать

$$\varphi(\lambda, x) = -\frac{Ed}{(1-\nu^2)\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{2\nu} \cos 2\nu \arccos\frac{x}{a} \tag{5.3}$$

где

$$\delta_{2\nu} = (-1)^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_0^{(2i)} A_{2\nu}^{(2i)} \operatorname{Fek}_{2i}'(0, -q)}{\operatorname{Fek}_{2i}(0, -q)} \tag{5.4}$$

Для вычисления коэффициентов $\delta_{2i}$ по формуле (5.4) можно воспользоваться таблицами [7]. Введем обозначение

$$\int_{-a}^{a} \varphi(\lambda, x)\, dx = P(\lambda) \tag{5.5}$$

Если $\lambda \to 0$, то в предположении, что $\lambda$ удовлетворяет условию (5.5), получим

$$\varphi(0, x) = \frac{P(0)}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \tag{5.6}$$

что совпадает с известным решением плоской задачи.

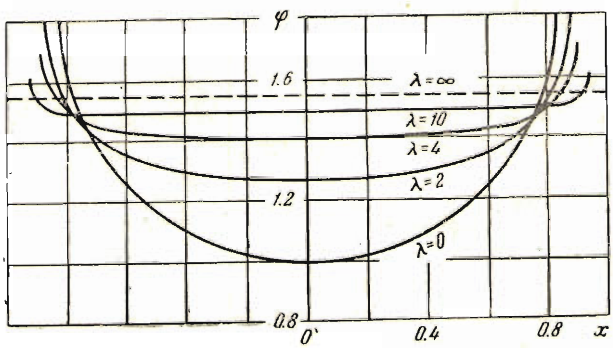
Если, например, $a = 1$, $\lambda = 2$, то

$$\varphi(2, x) = \frac{P(2)}{\pi \sqrt{1 - x^2}} (1 - 0.284 \cos 2 \arccos x - 0.006 \cos 4 \arccos x + \ldots)$$

При $a = 1$, $\lambda = 4$ получим

$$\varphi(4, x) = \frac{P(4)}{\pi \sqrt{1 - x^2}} (1 - 0.436 \cos 2 \arccos x - 0.033 \cos 4 \arccos x - \\ - 0.003 \cos 6 \arccos x + \ldots) \tag{5.7}$$

На фиг. 1 приведены графики функций $\varphi(0, x)$, $\varphi(2, x)$, $\varphi(4, x)$ и $\varphi(10, x)$ при $a = 1$, $P(\lambda) = \pi = \mathrm{const}$.




Фиг. 1

**§ 6.** Из чертежа видно, что с увеличением $\lambda$ распределение давления по ширине приближается к равномерному.

Формулу (1.4) можно переписать так:

$$f(\lambda, x) = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E} \left\{ \int_{-a}^{x-\varepsilon} \varphi(\lambda, \xi) K_0(\lambda |x - \xi|) p\xi + \int_{x+\varepsilon}^{a} \varphi(\lambda, \xi) K_0(\lambda |x - \xi|) d\xi + \right.$$
$$\left. + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} [\varphi(\lambda, \xi) - \varphi(\lambda, x)] K_0(\lambda |x - \xi|) d\xi + \varphi(\lambda, x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_0(\lambda |x - \xi|) d\xi \right\} \tag{6.1}$$

Отсюда

$$\varphi(\lambda, x) = \frac{1}{R} \left( \frac{\pi E \lambda}{2(1 - \nu^2)} f(\lambda, x) - \lambda S - Q \right) \tag{6.2}$$

где обозначено

$$S = \int_{-a}^{x-\varepsilon} \varphi(\lambda, \xi) K_0(\lambda |x - \xi|) d\xi + \int_{x+\varepsilon}^{a} \varphi(\lambda, \xi) K_0(\lambda |x - \xi|) d\xi$$

$$Q = \int_{-\varepsilon\lambda}^{\varepsilon\lambda} \left[ \varphi\left(\lambda, x - \frac{t}{\lambda}\right) - \varphi(\lambda, x) \right] K_0(t)\, dt, \qquad R = \int_{-\varepsilon\lambda}^{\varepsilon\lambda} K_0(t)\, dt$$

Учитывая, что

$$K_0(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} \qquad \text{при } t \to +\infty$$

и предполагая функцию $\varphi(\lambda, x)$ непрерывной, из формулы (6.2) получим

$$\varphi(\lambda, x) \sim \frac{E\lambda f(\lambda, x)}{2(1-\nu^2)} \qquad \text{при } \lambda \to +\infty \tag{6.3}$$

Если $f(\lambda, x) = d = \text{const}$, то в предположении, что выполняется условие (5.5), получим

$$\lim \varphi(\lambda, x) = \frac{P(\infty)}{2a} = \text{const} \qquad \text{при } \lambda \to +\infty \tag{6.4}$$

**§ 7.** Рассмотрим общий случай, когда поверхность основания определяется уравнением $z = w(x, y)$.

О функции $w(x, y)$ будем предполагать, что она может быть представлена в виде интеграла Фурье

$$w(x, y) = \int_0^\infty [f^c(\lambda, x)\cos\lambda y + f^s(\lambda, x)\sin\lambda y]\, d\lambda \tag{7.1}$$

где

$$\mathrm{f}^c(\lambda, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t)\cos\lambda t dt, \qquad \mathrm{f}^s(\lambda, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t)\sin\lambda t dt \tag{7.2}$$

О функциях $\mathrm{f}^c(\lambda, x)$ и $\mathrm{f}^s(\lambda, x)$ будем предполагать, что они могут быть разложены на промежутке $-a < x < a$ в равномерно сходящиеся ряды по полиномам Чебышева и что интегралы

$$\int_0^\infty \lambda\, |\mathrm{f}^c(\lambda, x)|\, d\lambda, \qquad \int_0^\infty \lambda\, |\mathrm{f}^s(\lambda, x)|\, d\lambda \tag{7.3}$$

в том же промежутке сходятся равномерно.

Ввиду линейности интегрального уравнения (1.1), осадке под штампом, определяемой формулой (7.1), будет соответствовать давление

$$p(x, y) = \int_0^\infty [\varphi^c(\lambda, x)\cos\lambda y + \varphi^s(\lambda, x)\sin\lambda y]\, d\lambda \tag{7.4}$$

где $\varphi^c(\lambda, x)$, $\varphi^s(\lambda, x)$ — функции, которые получаются из функций $\mathrm{f}^c(\lambda, x)$, $\mathrm{f}^s(\lambda, x)$ соответственно согласно формуле (5.3).

В силу асимтотической формулы (6.3) из условий (7.3) следует сходимость интеграла (7.4) во всех точках промежутка $(-a, a)$, где функции $\varphi^c(\lambda, x)$ и $\varphi^s(\lambda, x)$ непрерывны. Необходимость последнего замечания следует из того, что формула (6.3) справедлива лишь в точках, где функция $\varphi(\lambda, x)$ непрерывна.

Поступила 8 IV 1955

## ЛИТЕРАТУРА


1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., 1953.
2. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., 1949.
3. Леонов М. Я. Решение одного интегрального уравнения теории ньютонового потенциала. Украинский математический журнал, 1951.
4. Лурье А. И. Некоторые контактные задачи теории упругости, ПММ, т. V, вып. 3, 1941.
5. Моссаковский В. И. Общее решение задачи об определении давления под подошвой круглого штампа в виде ряда Фурье, Украинский математический журнал, 1951.
6. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М., 1953.
7. Tables relating to Mathieu functions, Columbia Universiti Press, New York, 1951.