Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА, ЗАЖАТОГО В АБСОЛЮТНО ЖЕСТКУЮ ПОЛУБЕСКОНЕЧНУЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЙМУ

Б. И. Коган
(Харьков)

Рассматриваемая в данной работе задача представляет собой частный случай осесимметрической смешанной задачи теории упругости для бесконечного цилиндра, у которого одна часть боковой поверхности $r = R$, $z > 0$ свободна от напряжений, а на другой части $r = R$, $z < 0$ заданы постоянные радиальные перемещения (фиг. 1).

В такой постановке решение сводится к нахождению функции напряжений $\chi(r, z)$, удовлетворяющей бигармоническому уравнению в цилиндрической системе координат

(2−ν)

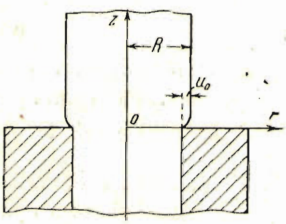
$$\nabla^4 \chi = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям на боковой поверхности

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}\right) = 0 \qquad \text{при } r = R, \quad 0 < z < \infty \tag{2}$$

$$\tau_{zr} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1 - \nu)\nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right] = 0 \qquad \text{при } r = R, \quad -\infty < z < \infty \tag{3}$$

$$u = -\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2 \chi}{\partial z\, \partial r} = u_0 \qquad \text{при } r = R, \quad -\infty < z \leqslant 0 \tag{4}$$



Фиг. 1

Приведенный ниже метод решения в существенных чертах основан на результатах, полученных в работах [1,2].

Возьмем вспомогательное решение уравнения (1) в виде $\chi_0(r, z) = e^{mz}\varphi(r)$, где m — некоторое комплексное число.

Подставляя χ_0 в уравнение (1), найдем, что $\varphi(r)$ должна удовлетворять уравнению

$$\varphi^{\rm IV}(r) + \frac{2}{r}\varphi'''(r) + \left(m^2 - \frac{1}{r^2}\right)\varphi''(r) + \frac{1}{r}\left(m^2 + \frac{1}{r^2}\right)\varphi'(r) + m^4\varphi(r) = 0 \tag{5}$$

решение которого

$$\varphi(r) = AJ_0(mr) + BmrJ_1(mr) + CY_0(mr) + DmrY_1(mr) \tag{6}$$

Из условия ограниченности решения при $r = 0$ следует, что

$$C = D = 0 \tag{7}$$

Удовлетворяя условию (3), на основании (6) и (7) имеем

$$AJ_1(mR) - B\left[2(1-\nu)J_1(mR) + mRJ_0(mR)\right] = 0. \tag{8}$$

После этого вспомогательное решение получим в виде

$$\chi_0(r, z, m) = \frac{Be^{mz}}{J_1(mR)}\{[2(1-\nu)J_1(mr) + mRJ_0(mR)]J_0(mr) + \\ + mrJ_1(mR)J_1(mr)\} \qquad (9)$$

Рассматривая B как функцию параметра m, образуем интеграл

$$\chi(r, z) = \int_{-i\infty}^{0-, +i\infty} \chi_0(r, z, m)\, dm \qquad (10)$$

Допустим, что удалось подобрать функцию $B = B(m)$ таким образом, что интеграл (10) вместе со своими производными по r и z до четвертого порядка включительно сходится абсолютно и равномерно, когда $r < R$; $|z| < \infty$.

При выполнении этих требований интеграл (10) будет решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям

$$\sigma_r = \frac{1}{R}\int_{-i\infty}^{0-, +i\infty} k(\eta)\, e^{\lambda\eta} d\eta, \qquad \tau_{rz} = 0, \qquad \text{при } r = R,\ |z| < \infty \qquad (11)$$

$$U = 2\frac{1-\nu^2}{E}\int_{-i\infty}^{-0, +i\infty} k(\eta)\frac{J_1^2(\eta)\, e^{\lambda\eta}}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)}\, d\eta \quad \text{при } r = R,\ |z| < \infty \qquad (12)$$

где

$$mR = \eta,\ z = \lambda R,\ r = R\rho,\ B(\eta) = k(\eta)\frac{R^3 J_1^2(\eta)}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)}$$

Выражения для функции напряжений, компонентов тензора напряжений и перемещений примут такой вид:

$$\chi(\rho, \lambda) = R^2\int_{-i\infty}^{0-, +i\infty} k(\eta) \times \\ \times \frac{J_0(\rho\eta)[2(1-\nu)J_1(\eta) + \eta J_0(\eta)] + \eta\rho J_1(\rho\eta)J_1(\eta)}{\eta^2\{[\eta^2 - 2(1-\nu)]J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)\}} e^{\lambda\eta}\, d\eta \qquad (13)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{\rho R}\int_{-i\infty}^{0-, +i\infty} k(\eta) \times \\ \frac{\eta\rho J_1(\eta)J_0(\rho\eta) + [\eta^2\rho^2 - 2(1-\nu)]J_1(\rho\eta)J_1(\eta) + \eta J_0(\eta)[\rho\eta J_0(\rho\eta) - J_1(\rho\eta)]}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)} e^{\lambda\eta}\, d\eta \qquad (14)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\rho R}\int_{-i\infty}^{0-, +i\infty} k(\eta) \times \\ \times \frac{[2(1-\nu)J_1(\eta) + \eta J_0(\eta)]J_1(\rho\eta) - \rho\eta(1-2\nu)J_1(\eta)J_0(\rho\eta)}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)} e^{\lambda\eta}\, d\eta \qquad (15)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{R}\int_{-i\infty}^{0-, +i\infty} k(\eta) \times \\ \times \frac{2J_0(\rho\eta)J_1(\eta) - \rho\eta J_1(\rho\eta)J_1(\eta) - \eta J_0(\eta)J_0(\rho\eta)}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)} \eta\, e^{\lambda\eta}\, d\eta \qquad (16)$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{R} \int\limits_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty} k(\eta)\, \frac{J_1(\rho\eta)\,J_0(\eta) - \rho J_1(\eta)\,J_0(\rho\eta)}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]\,J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)}\,\eta^2 e^{\lambda\eta} d\eta \tag{17}$$

$$U = \frac{1+\nu}{E} \int\limits_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty} k(\eta) \times$$

$$\times \frac{J_1(\rho\eta)\,[2(1-\nu)\,J_1(\eta) + \eta J_0(\eta)] - \rho\eta J_0(\rho\eta)\,J_1(\eta)}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]\,J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)}\,e^{\lambda\eta} d\eta \tag{18}$$

$$w = \frac{1+\nu}{E} \int\limits_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty} k(\eta) \times$$

$$\times \frac{2(1-\nu)\,J_1(\eta)\,J_0(\rho\eta) - \rho\eta J_1(\rho\eta)\,J_1(\eta) - \eta J_0(\rho\eta)\,J_0(\eta)}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]\,J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)}\,e^{\lambda\eta} d\eta \tag{19}$$

Функцию $k(\eta)$ определяем таким образом, чтобы условия (11) и (12) обратились соответственно в граничные условия (2) и (4), т. е.

$$\sigma_r = \frac{1}{R} \int\limits_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty} k(\eta)\,e^{\lambda\eta} d\eta = 0 \quad \text{при } \rho = 1,\ \lambda > 0 \tag{20}$$

$$U = 2\,\frac{1-\nu^2}{E} \int\limits_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty} k(\eta)\, \frac{J_1^2(\eta)\,e^{\eta\lambda}}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]\,J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)}\,d\eta = u_0$$

$$\text{при } \rho = 1,\ \lambda \leqslant 0 \tag{21}$$

Граничное условие (20) будет выполнено, если $k(\eta)$ регулярна в области $\operatorname{Re}(\eta) \leqslant 0$, за исключением, быть может, начала координат, и удовлетворяет в этой области требованиям леммы Жордана.

Для того чтобы выполнялось граничное условие (21), функция

$$\psi(\eta) = k(\eta)\,\frac{J_1^2(\eta)}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]\,J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)}$$

должна быть регулярна в области $\operatorname{Re}(\eta) \geqslant 0$, за исключением начала координат, и удовлетворять в этой области требованиям леммы Жордана.

В начале координат $\psi(\eta)$ должна иметь простой полюс с вычетом

$$\operatorname{res}[\psi(\eta)]_{\eta=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits^{0+} \frac{J_1^2(\eta)\,k(\eta)}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]\,J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)}\,d\eta = -\frac{E u_0}{4\pi i\,(1-\nu^2)}$$

$$\operatorname{res}[k(\eta)]_{\eta=0} = -\frac{E u_0}{2\pi i\,(1-\nu)}$$

Чтобы построить функцию $k(\eta)$, удовлетворяющую перечисленным условиям, необходимо получить оценку для больших по модулю корней уравнений

$$[\eta^2 - b]\,J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta) = 0, \qquad J_1^2(\eta) = 0 \tag{22}$$

где $b = 2(1-\nu)$. Разлагая первое уравнение (22), имеем

$$\sqrt{1 - \frac{b}{\eta^2}}\,J_1(\eta) + iJ_0(\eta) = 0, \quad \sqrt{1 - \frac{b}{\eta^2}}\,J_1(\eta) - iJ_0(\eta) = 0 \tag{23}$$

Воспользуемся асимптотическим разложением $J_0(\eta)$ и $J_1(\eta)$:

$$J_0(\eta) = \left(\frac{2}{\pi\eta}\right)^{1/2}\left[\cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right)P(\eta; 0) - \sin\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right)Q(\eta; 0)\right]$$

$$J_1(\eta) = \left(\frac{2}{\pi\eta}\right)^{1/2}\left[\sin\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right)P(\eta; 1) + \cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right)Q(\eta; 1)\right]$$

$$P(\eta, p) = 1 - \frac{(4p^2 - 1^2)(4p^2 - 3^2)}{2!\,(8\eta)^2} + \ldots$$

$$Q(\eta, p) = \frac{4p^2 - 1}{1!\,8\eta} - \frac{(4p^2 - 1)(4p^2 - 3^2)(4p^2 - 5^2)}{3!\,(8\eta)^3} + \ldots$$

Обозначим еще

$$R(\eta) = \sqrt{1 - \frac{b}{\eta^2}} = 1 - \frac{b}{2\eta^2}$$

Подставляя все это в первое уравнение (23), получим

$$\operatorname{tg}\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{R(\eta)\,Q(\eta; 1) + iP(\eta; 0)}{iQ(\eta, 0) - R(\eta)\,P(\eta, 1)} = -\left(i + \frac{1}{2\eta}\right) + O(\eta^{-2})$$

Рассмотрим два уравнения:

$$\varphi_1(\eta) = \operatorname{tg}\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) + i + \frac{1}{2\eta} = 0 \tag{24}$$

$$\varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta) = \operatorname{tg}\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) + i + \frac{1}{2\eta} + Q(\eta^{-2}) = 0 \tag{25}$$

Пусть η_n — большой по модулю корень уравнения (24). Опишем вокруг этого корня окружность малого радиуса δ и оценим значение $\varphi_1(\eta)$ на круге радиуса δ:

$$\varphi_1(\eta_n + \delta e^{i\theta}) = \operatorname{tg}\left[\left(\eta_n - \frac{1}{4}\pi\right) + \delta e^{i\theta}\right] + i + \frac{1}{2(\eta_n + \delta e^{i\theta})} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\delta e^{i\theta}}{\eta_n}\,\frac{[i + (4\eta_n)^{-1}]}{1 + [i + (2\eta_n)^{-1}]\operatorname{tg}\delta e^{i\theta}} - \frac{\delta e^{i\theta}}{2\eta_n(\eta_n + \delta e^{i\theta})}$$

Отсюда следует, что $\varphi_1(\eta_n + \delta e^{i\theta})$ имеет порядок $\eta^{-1}\operatorname{tg}\delta e^{i\theta}$ или $\delta e^{i\theta}/\eta_n$. Таким образом, $\varphi_1(\eta_n + \delta e^{i\theta}) = O(\delta e^{i\theta}/\eta_n)$. Положим $\delta = (\lg|\eta_n|)/|\eta_n$, тогда

$$\varphi_1(\eta_n + \delta e^{i\theta}) = O\left(\frac{\lg|\eta_n|}{|\eta_n|^2}\right)$$

Функция $\varphi_2(\eta)$ имеет на окружности радиуса δ порядок η_n^{-2}. Поэтому на окружности радиуса δ $|\varphi_1(\eta)| > |\varphi_2(\eta)|$. Согласно теореме Руше уравнения (24) и (25) будут иметь внутри этого круга одинаковое число корней. Если η_n — корень уравнения (24), а a_n — соответствующий корень уравнения (25), то

$$a_n = \eta_n + \Delta_n, \qquad \Delta_n = O\left(\frac{\lg|\eta_n|}{|\eta_n|}\right)$$

Обозначим α_n и β_n вещественную и мнимую части корня η_n уравнения (24); оценивая корни этого уравнения, найдем, что

$$\alpha_n = n\pi + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{4\beta_n - 1}{4\alpha_n}, \qquad \beta_n = -\frac{1}{4}\lg\left[16\alpha_n^2 + (4\beta_n - 1)^2\right]$$

$$\alpha_n = n\pi + O\left(\frac{\lg n}{n}\right), \qquad \beta_n = O(\lg n)$$

так как

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{4\beta_4 - 1}{4\alpha_n} = O\left(\frac{\lg n}{n}\right)$$

Поэтому большие по модулю корни уравнения (25) могут быть представлены в таком виде:

$$\eta_n^{(1)} = n\pi + O(n^{-1}\lg n) - iO(\lg n), \qquad \eta_n^{(2)} = -n\pi + O(n^{-1}\lg n) - iO(\lg n)$$

Аналогично решается и второе уравнение (23). После чего получаем следующую оценку для больших корней первого уравнения (22):

$$a_n^{(1)} = n\pi + O(n^{-1}\lg n) - iO(\lg n), \qquad a_n^{(2)} = -n\pi + O(n^{-1}\lg n) - iO(\lg n)$$
$$a_n^{(3)} = n\pi + O(n^{-1}\lg n) + iO(\lg n), \qquad a_n^{(4)} = -n\pi + O(n^{-1}\lg n) + iO(\lg n)$$

Корни, лежащие в правой полуплоскости, будем обозначать через a_n и $\overline{a}_n$:

$$a_n = n\pi + O(n^{-1}\lg n) + iO(\lg n) \tag{26}$$

Большие корни второго уравнения (22), расположенные в правой полуплоскости, как известно, имеют такой вид:

$$b_n = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi + O(n^{-1}) \tag{27}$$

Образуем бесконечные произведения:

$$\Pi_1(\eta) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \eta / a_n}{1 - \eta / b_n}, \qquad \Pi_2(\eta) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \eta / \overline{a}_n}{1 - \eta / b_n} \tag{28}$$

$$\Pi(\eta) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \eta / a_n)(1 - \eta / \overline{a}_n)}{(1 - \eta / b_n)^2} \tag{29}$$

Характер сходимости первого бесконечного произведения (28)

$$\Pi_1(\eta) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\eta(b_n - a_n)}{a_n b_n (1 - \eta / b_n)}\right]$$

определяется характером сходимости ряда с общим членом

$$u_n = \eta \frac{b_n - a_n}{a_n b_n (1 - \eta / b_n)} =$$
$$= \frac{iQ(\lg n) - {}^1/_4\pi + O(n^{-1}\lg n) + O(n^{-1})}{[n\pi + O(n^{-1}\lg n) + iO(\lg n)]\,[(n + {}^1/_4)\pi + O(n^{-1})]\,[1 - \eta\{(n + {}^1/_4\pi) + O(n^{-1})\}^{-1}]}\,\eta$$

$$u_n = O(\eta n^{-2}\lg n) \qquad \text{при } \eta \neq b_n$$

который будет сходиться абсолютно и равномерно в каждой конечной области плоскости η, не содержащей точек $\eta = b_n$.

Таким образом, бесконечные произведения (28), а вместе с ними и бесконечное произведение (29) будут сходиться абсолютно и равномерно в каждой конечной области плоскости η, не содержащей точки $\eta = b_n$.

Следовательно, бесконечное произведение (29) является аналитической мероморфной функцией, имеющей двукратные полюсы в точках $\eta = b_n$ и простые нули в точках $\eta = a_n$ и $\eta = \overline{a}_n$,

Исследуем поведение произведения (29) на бесконечности. Воспользуемся для этой цели приемом, который был применен И. Г. Альпериным в работе [2].

Введем два абсолютно и равномерно сходящихся произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\eta}{c_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}, \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\eta}{d_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi} \qquad \left(c_n=n\pi+\tfrac{1}{4}\pi, \quad d_n=n\pi\right)$$

После чего представим (29) в таком виде:

$$\Pi(\eta)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\eta}{a_n}\right)\left(1-\frac{\eta}{\overline{a}_n}\right)}{\left(1-\frac{\eta}{b_n}\right)^2}\left[\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\eta}{c_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\eta}{c_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}}\right]^2\left[\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\eta}{d_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\eta}{d_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}}\right]^2=$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\eta}{a_n}\right)\left(1-\frac{\eta}{a_n}\right)}{\left(1-\frac{\eta}{b_n}\right)^2}\left[\frac{\left(1-\frac{\eta}{c_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}}{\left(1-\frac{\eta}{c_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}}\right]^2\left[\frac{\left(1-\frac{\eta}{d_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}}{\left(1-\frac{\eta}{d_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}}\right]^2=$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\eta}{a_n}\right)\left(1-\frac{\eta}{\overline{a}_n}\right)}{\left(1-\frac{\eta}{d_n}\right)^2}\frac{\left(1-\frac{\eta}{c_n}\right)^2}{\left(1-\frac{\eta}{b_n}\right)^2}\frac{\left[\left(1-\frac{\eta}{d_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}\right]^2}{\left[\left(1-\frac{\eta}{c_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}\right]^2}=$$

$$=\prod_{=1}^{n\infty}\frac{\left(1-\frac{\eta}{a_n}\right)\left(1-\frac{\eta}{\overline{a}_n}\right)}{\left(1-\frac{\eta}{d_n}\right)^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\eta}{c_n}\right)^2}{\left(1-\frac{\eta}{b_n}\right)^2}\frac{\left[\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\eta}{d_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\pi}\right]^2}{\left[\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\eta}{c_n}\right)\exp\frac{\eta}{n\eta}\right]^2}$$

Рассмотрим бесконечные произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\eta/a_n)(1-\eta/\overline{a}_n)}{(1-\eta/d_n)^2}, \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\eta/c_n)^2}{(1-\eta/b_n)^2} \tag{30}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\eta/a_n)(1-\eta/\overline{a}_n)}{(1-\eta/d_n)^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n-\eta)(\overline{a}_n-\eta)}{(d_n-\eta)^2}\,\frac{d_n^2}{a_n\overline{a}_n} \tag{31}$$

Бесконечное произведение с общим членом $d_n^2/a_n\overline{a}_n$ сходится абсолютно, так как ряд с общим членом

$$u_n=\left(\frac{d_n^2}{a_n\overline{a}_n}-1\right)=-\frac{2n\pi O(n^{-1}\lg n)+O(n^{-2}\lg^2 n)}{\pi^2n^2+2\pi nO(n^{-1}\lg n)+O(n^{-2}\lg^2 n)}=O\left(\frac{\lg n}{n^2}\right)$$

абсолютно сходящийся. Обозначим величину этого произведения через L.

Бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n-\eta)(\overline{a}_n-\eta)}{(d_n-\eta)^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(a_n-\eta)(\overline{a}_n-\eta)-(d_n-\eta)^2}{(d_n-\eta)^2}\right]=\Pi_3(\eta)$$

сходится абсолютно и равномерно в области $\delta<\arg\eta<2\pi-\delta$ (фиг. 2), где имеет место следующая оценка для u_n:

$$u_n=\frac{(a_n-\eta)(\overline{a}_n-\eta)-(d_n-\eta)^2}{(d_n-\eta)^2}=\frac{2n\pi O(n^{-1}\lg n)+O(n^{-2}\lg^2 n)+\eta O(n^{-1}\lg n)}{(n\pi-\eta)^2}$$

$$|n\pi-\eta|\geqslant|\eta|\sin\delta, \qquad |n\pi-\eta|\geqslant n\pi\sin\delta$$

$$|u_n|\leqslant\frac{2O(n^{-1}\lg n)}{n\pi\sin^2\delta}+\frac{O(n^{-2}\lg^2 n)}{n^2\pi^2\sin^2\delta}+\frac{O(n^{-1}\lg n)}{n\pi\sin^2\delta}=O\left(\frac{\lg n}{n^2}\right)$$

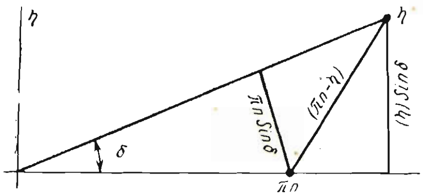
Так как это бесконечное произведение сходится равномерно относительно η в области $\delta < \arg\eta < 2\pi - \delta$, то при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ можно найти такое m, зависящее от ε, но не от η, что при любом η

$$\left| \prod_{n=1}^{m} \frac{(a_n - \eta)(\overline{a}_n - \eta)}{(d_n - \eta)^2} - \Pi_3(\eta) \right| < \varepsilon$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_3(\eta) = \lim_{n\to\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - \eta)(\overline{a}_n - \eta)}{(d_n - \eta)^2} = 1$$

Следовательно, и первое бесконечное произведение (30) будет стремиться к конечному пределу L, когда $\eta \to \infty$ в области $\delta < \arg\eta < 2\pi - \delta$.



Фиг. 2

Аналогично доказывается сходимость второго бесконечного произведения (30) и то, что его предел при $\eta \to \infty$ в области $\delta < \arg\eta < 2\pi - \delta$ равен

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{c_n^2}$$

Остается рассмотреть поведение набесконечности функции

$$F(\eta) = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\eta}{d_n}\right) \exp\frac{\eta}{n\pi} \right) \Big/ \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\eta}{c_n}\right) \exp\frac{\eta}{n\pi} \right)$$

Эта функция при помощи известного соотношения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\eta}{c + n}\right) \exp\frac{\eta}{n} = \frac{e^{\gamma\eta}\,\Gamma(1 + c)}{\Gamma(1 + c - \eta)}$$

может быть выражена через гамма-функцию:

$$F(\eta) = \frac{\Gamma(^5/_4 - \eta/\pi)}{\Gamma(^5/_4)\,\Gamma(1 - \eta/\pi)}$$

Отсюда

$$\lg F(\eta) = \lg\Gamma\left(\frac{5}{4} - \frac{\eta}{\pi}\right) - \lg\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) - \lg\Gamma\left(1 - \frac{\eta}{\pi}\right) \qquad (32)$$

Асимптотическое представление для $\lg\Gamma(a - \eta)$ в области ($\delta < \arg\eta < 2\pi - \eta$) и $a > 0$ имеет такой вид:

$$\lg\Gamma(a - \eta) = \left(a - \eta - \frac{1}{2}\right)\lg(-\eta) + \eta + \frac{1}{2}\lg 2\pi + O(1)$$

Подставляя это выражение в формулу (32), найдем асимптотическое представление

$$\lg F(\eta) = \lg\,[1 + O(1)]\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{\eta}{\pi}\right)^{1/4}$$

Отсюда

$$F^2(\eta) = [1 + O(1)]\,\frac{\Gamma^2(^5/_4)}{\sqrt{\pi}}\sqrt{-\eta}, \qquad \arg(-\eta) = 0 \qquad \text{при } \eta < 0$$

После чего получим асимптотическое представление для бесконечного произведения (29)

$$\Pi(\eta) = [1 + O(1)] \frac{ML}{\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right) \sqrt{-\eta} \tag{33}$$

Коэффициент при $\sqrt{-\eta}$ в предыдущей формуле может быть вычислен следующим образом:

$$\Pi(\eta)\,\Pi(-\eta) = \frac{(\eta^2 - b)\,J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)}{J_1^2(\eta)} \; \frac{1}{2(1+\nu)} \tag{34}$$

так как $-\eta = \bar{\eta}$ при $\eta = iy$:

$$\Pi(iy)\,\Pi(i\bar{y}) = \Pi(iy)\,\overline{\Pi(iy)} = -\frac{(y^2 + b)\,J_1^2(iy) + y^2 J_0^2(iy)}{J_1^2(iy)} \; \frac{1}{2(1+\nu)}$$

Воспользовавшись асимптотическим представлением для J_0 и J_1, найдем после соответствующих преобразований, что

$$-\frac{(y^2 + b)\,J_1^2(iy) + y^2 J_0(iy)}{J_1^2(iy)} = y + O(1) \tag{35}$$

На основании (33) получим, что

$$[1 + O(1)]\,\frac{M^2L^2}{\pi}\,\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right) y = \frac{y}{2(1+\nu)} + O(1) \quad \text{или} \quad \frac{ML}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\nu)}}$$

Таким образом,

$$\Pi(\eta) = [1 + O(1)] \sqrt{\frac{-\eta}{2(1+\nu)}} \qquad \text{при} \quad \eta \to \infty$$

После чего выражение для функции $k(\eta)$ может быть дано в такой форме:

$$k(\eta) = -\frac{u_0 E}{2\pi i(1-\nu)} \, \frac{1}{\eta} \, \Pi(\eta) \tag{36}$$

Легко установить, что построенная таким образом функция $k(\eta)$ удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям и функция

$$\chi(\rho, \lambda) = -\frac{R^2 u_0 E}{2\pi i(1-\nu)} \int\limits_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty} \frac{1}{\eta^3}\,\Pi(\eta) \; \times$$

$$\times \frac{J_0(\rho\eta)\,[2(1-\nu)\,J_1(\eta) + \eta J_0(\eta)] + \rho\eta J_1(\rho\eta)\,J_1(\eta)}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]\,J_1^2(\eta) + \eta^2 I_0^2(\eta)}\, e^{\lambda\eta} d\eta \tag{37}$$

будет решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (2), (3), (4) рассматриваемой задачи.

Преобразуем выражения (14), (19) для компонент тензора напряжений и перемещений.

Пользуясь выражением (36) для $k(\eta)$, найдем, что

$$\sigma_r = -\frac{u_0 E}{2\pi i \rho R(1-\nu)} \int\limits_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty} \frac{\Pi(\eta)}{\eta}\, \Psi_r(\eta)\, e^{\lambda\eta} d\eta \tag{38}$$

где

$$\Psi_r(\eta) =$$

$$= \frac{\rho\eta J_1(\eta)\,J_0(\rho\eta) + [\rho^2\eta^2 - 2(1-\nu)]\,J_1(\eta)\,J_1(\rho\eta) + \eta J_0(\eta)\,[\rho\eta J_0(\rho\eta) - J_1(\rho\eta)]}{[\eta^2 - 2(1-\nu)]\,J_1^2(\eta) + \eta^2 J_0^2(\eta)} \tag{39}$$

Подинтегральная функция, стоящая множителем при $e^{\lambda\eta}$ в выражении (38), имеет в точке $\eta = 0$ полюс первого порядка с вычетом, равным ρ. Если представить (38) так:

$$\sigma_r = -\frac{u_0E}{2\pi i\rho R(1-\nu)}\int_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty}\left\{\frac{\Pi(\eta)}{\eta}\Psi_r(\eta)-\frac{\rho}{\eta}\right\}e^{\lambda\eta}d\eta -$$

$$-\frac{u_0E}{2\pi iR(1-\nu)}\int_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty}\frac{e^{\lambda\eta}}{\eta}d\eta$$

то подинтегральная функция в первом слагаемом правой части будет регулярной в точке $\eta = 0$. Спрямляя путь интегрирования, получим

$$\sigma_r = -\frac{u_0E}{2\pi iR\rho(1-\nu)}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\left\{\frac{\Pi(\eta)}{\eta}\Psi_r(\eta)-\frac{\rho}{\eta}\right\}e^{\lambda\eta}d\eta -$$

$$-\frac{u_0E}{2\pi iR(1-\nu)}\int_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty}\frac{e^{\lambda\eta}}{\eta}d\eta = -\frac{u_0E}{\pi R\rho(1-\nu)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{Im}\,[\Pi(iy)\,e^{i\lambda y}]}{y}\Phi_r(y)\,dy +$$

$$+\frac{u_0E}{2R(1-\nu)}-\frac{u_0E}{2\pi iR(1-\nu)}\int_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty}\frac{e^{\lambda\eta}}{\eta}d\eta$$

$$\Phi_r(y) =$$

$$= \frac{\rho y I_1(y)\,I_0(\rho y) + [\rho^2y^2+2(1-\nu)]\,I_1(y)\,I_1(\rho y) - yI_0(y)\,[\rho yI_0(\rho y) - I_1(\rho y)]}{[y^2+2(1-\nu)]\,I_1^2(y) - y^2I_0^2(y)} \tag{40}$$

Таким образом, имеем

$$\sigma_r = \begin{cases} -\dfrac{u_0E}{\pi R\rho(1-\nu)}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{Im}\,[\Pi(iy)\,e^{i\lambda y}]}{y}\Phi_r(y)\,dy + \frac{u_0E}{2R(1-\nu)} & (\lambda \geqslant 0) \\ -\dfrac{u_0E}{\pi R\rho(1-\nu)}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{Im}\,[\Pi(iy)\,e^{i\lambda y}]}{y}\Phi_r(y)\,dy + \frac{3}{2}\frac{u_0E}{R(1-\nu)} & (\lambda < 0) \end{cases} \tag{41}$$

Рассмотрим поведение σ_r на бесконечности. Несобственный интеграл в выражении (38) сходится равномерно онтосительно λ. Поэтому при сколь угодно малом ε существует такое R_1, зависящее от ε, но не от λ, что

$$\sigma_r = -\frac{u_0E}{2\pi iR\rho(1-\nu)}\int_{iR_1}^{+iR_1}\left\{\frac{\Pi(\eta)}{\eta}\Psi_\eta(\eta)-\frac{\rho}{\eta}\right\}e^{\lambda\eta}\,d\eta - \frac{u_0E}{2\pi iR(1-\nu)}\int_{-iR_1}^{0-,\,+iR_1}\frac{e^{\lambda\eta}}{\eta}d\eta + \varepsilon$$

Первый интеграл согласно теореме Римана-Лебега стремится к нулю, когда $\lambda \to \pm\infty$. Таким образом,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sigma_r = 0, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty}\sigma_r = \frac{u_0E}{R(1-\nu)} \tag{42}$$

Аналогично могут быть получены выражения для остальных компонент. Опуская промежуточные выкладки, приводим окончательные результаты. Напряжения σ_θ определятся так:

$$\sigma_\theta = \begin{cases} -\dfrac{u_0E}{\pi R\rho(1-\nu)}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{Im}\,[\Pi(iy)\,e^{i\lambda y}]}{y}\Phi_\theta(y)\,dy + \frac{u_0E}{2R(1-\nu)} & (\lambda \geqslant 0) \\ -\dfrac{u_0E}{\pi R\rho(1-\nu)}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{Im}\,[\Pi(iy)\,e^{i\lambda y}]}{y}\Phi_\theta(y)\,dy + \frac{3}{2}\frac{u_0E}{R(1-\nu)} & (\lambda < 0) \end{cases} \tag{43}$$

где

$$\Phi_0(y) = \frac{[yI_0(y) - 2(1-\nu) I_1(y)] I_1(\rho y) - \rho y (1-2\nu) I_1(y) I_0(\rho y)}{[y^2 + 2(1-\nu)] I_1^2(y) - y^2 I_0^2(y)}$$

Напряжения σ_z определяются формулой

$$\sigma_z = -\frac{u_0 E}{\pi R(1-\nu)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,[\Pi(iy) e^{i\lambda y}]\,[2I_0(\rho y) I_1(y) - \rho y I_1(\rho y) I_1(y) + y I_0(y) I_0(\rho y)]}{[y^2 + 2(1-\nu)] I_1^2(y) - y^2 I_0^2(y)} dy \tag{44}$$

Для касательных напряжений τ_{rz} имеем

$$\tau_{rz} = \frac{u_0 E}{\pi R(1-\nu)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}\,[\Pi(iy) e^{i\lambda y}]\,[\rho I_1(y) I_0(\rho y) - I_1(\rho y) I_0(y)]}{[y^2 + 2(1-\nu)] I_1^2(y) - y^2 I_0^2(y)} dy \tag{45}$$

Пределы для напряжений будут

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sigma_\theta = 0, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} \sigma_\theta = \frac{u_0 E}{R(1-\nu)}, \qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty} \sigma_z = 0, \qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty} \tau_{rz} = 0 \tag{46}$$

Для перемещений u имеем

$$u = \begin{cases} -\dfrac{(1+\nu) u_0}{\pi(1-\nu)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,[\Pi(iy) e^{i\lambda y}]}{y} \Phi_u(y)\, dy + \frac{u_0 \rho}{2} & (\lambda \geqslant 0) \\ -\dfrac{(1+\nu) u_0}{\pi(1-\nu)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,[\Pi(iy) e^{i\lambda y}]}{y} \Phi_u(y)\, dy + \frac{3}{2} u_0 \rho & (\lambda < 0) \end{cases} \tag{47}$$

Здесь

$$\Phi_u(y) = \frac{I_1(\rho y)\,[2(1-\nu) I_1(y) - y I_0(y)] + \rho y I_0(\rho y) I_1(y)}{[y^2 + 2(1-\nu)] I_1^2(y) - y^2 I_0(y)}$$

При этом

$$\lim_{\lambda\to\infty} u = 0, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} u = u_0 \rho$$

Для перемещений w имеем

$$w = \begin{cases} -\dfrac{(1+\nu) u_0}{\pi(1-\nu)} \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \frac{\mathrm{Re}\,[\Pi(iy) e^{i\lambda y}]}{y} \Phi_w(y) - \frac{2A\nu}{y^2(1+\nu)} \cos\lambda y \right\} dy - \frac{\nu}{1-\nu} u_0 & (\lambda \geqslant 0) \\ -\dfrac{(1+\nu) u_0}{\pi(1-\nu)} \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \frac{\mathrm{Re}\,[\Pi(iy) e^{i\lambda y}]}{y} \Phi_w(y) - \frac{2A\nu}{y^2(1+\nu)} \cos\lambda y \right\} dy + \frac{\nu u_0}{1-\nu} + \frac{2\nu u_0 \lambda}{1-\nu} & (\lambda < 0) \end{cases} \tag{48}$$

Здесь

$$\Phi_w(y) = \frac{2(1-\nu) I_1(y) I_0(\rho y) - \rho y I_1(\rho y) I_1(y) - y I_0(\rho y) I_0(y)}{[y^2 + 2(1-\nu)] I_1^2(y) - y^2 I_0(y)}$$

$$A = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{a_i} + \frac{1}{\bar{a}_i} - \frac{2}{b_i}$$

Заметим, что напряженное состояние цилиндра стремится к равномерному растяжению или сжатию (в зависимости от знака u_0), когда $\lambda \to -\infty$.

Компоненты тензора напряжений непрерывны в области $-\infty < \lambda < +\infty$, $\rho \leqslant 1$, за исключением точки ($\lambda = 0$, $\rho = 1$), где σ_r и σ_θ становятся неограниченными. Определим характер стремления σ_r к бесконечности, когда $\lambda \to 0$ при $\rho = 1$; $\lambda < 0$.

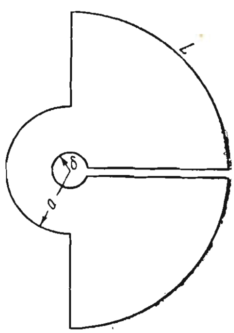
Рассмотрим выражение (11) для σ_r, в котором вместо $k(\eta)$ подставлено его значение в соответствии с формулой (36):

$$\sigma_r = -\frac{u_0 E}{2\pi i R(1-\nu)} \int_{-i\infty}^{0-,\,+i\infty} \frac{\Pi(\eta)}{\eta} e^{\lambda\eta}\, d\eta$$

положим $|\lambda|\eta = v$, $\lambda < 0$:

$$\sigma_r = -\frac{u_0 E}{2\pi i R(1-\nu)} \int_{i-\infty}^{0-,\,+i\infty} \Pi\left(\frac{v}{|\lambda|}\right)\frac{e^{-v}}{v}\, dv = -\frac{u_0 E}{2\pi i R(1-\nu)} \int_C \Pi\left(\frac{v}{|\lambda|}\right)\frac{e^{-v}}{v}\, dv$$

Контур интегрирования C состоит из мнимой оси с симметрично выключенным отрезком длины $2a$, который заменен дугой полуокружности радиуса a, расположенной в области $\operatorname{Re} v < 0$. Так как $|v| \geqslant a$ всюду на C, то при достаточно малом λ отношение $|v|/|\lambda|$ может быть сделано сколь угодно большим.



Фиг. 3

Воспользовавшись асимптотическим представлением $\Pi(\eta)$ (33), найдем выражение для σ_r, пригодное при малых $|\lambda|$, $\lambda < 0$:

$$\sigma_r \sim \frac{E u_0 \sqrt{2(1+\nu)}}{4\pi i R(1-\nu^2)\sqrt{|\lambda|}} \int_C \frac{e^{-v}}{\sqrt{-v}}\, dv \tag{49}$$

Рассмотрим интеграл, входящий в это выражение по контуру L, представленному на фиг. 3. Подинтегральная функция регулярна и однозначна внутри области, ограниченной контуром L.

На основании теоремы Коши и леммы Жордана

$$\int_C \frac{e^{-v}}{\sqrt{-v}}\, dv = -\int_D \frac{e^{-v}}{\sqrt{-v}}\, dv$$

Путь интегрирования D идет по верхнему берегу разрыва вдоль вещественной оси до точки δ, описывает окружность радиуса δ вокруг начала координат в положительном направлении и уходит на бесконечность по нижнему берегу разреза:

$$\int_D \frac{e^{-v}}{\sqrt{-v}}\, dv = -i\int_{-\infty}^{\delta} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx - i\delta \int_0^{2\pi} e^{-\delta\cos\varphi - i[\sin\varphi + {}^1/_2(\varphi-\pi)]}\, d\varphi + i\int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\arg - v = 0, \qquad \text{при} \ \ v < 0$$

При $\delta \to 0$ получим

$$\int_D \frac{e^{-v}}{\sqrt{-v}}\, dv = 2i\sqrt{\pi}$$

Окончательное выражение σ_r, прогодное для малых $|\lambda|$, $\lambda < 0$, примет такой вид:

$$\sigma_r \sim \frac{Eu_0 \sqrt{2\pi(1+\nu)}}{2R(1-\nu^2)\sqrt{|\lambda|}} \tag{50}$$

Таким же способом получим выражение для смещения, пригодное при малых λ и $\rho = 1$, описывающее характер излома боковой поверхности цилиндра у края обоймы.

Формула (21) для граничного значения u на основании (34) может быть записана следующим образом:

$$u = \frac{u_0}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{0-,+i\infty} \frac{e^{\lambda\eta}}{\eta\Pi(-\eta)}\,d\eta = \frac{u_0}{2\pi i}\left(\oint\limits^{+0}\frac{e^{\lambda\eta}}{\eta\Pi(-\eta)}\,d\eta + \int\limits_{-i\infty}^{0+,+i\infty}\frac{e^{\lambda\eta}}{\eta\Pi(-\eta)}\,d\eta\right) =$$

$$= u_0 - \frac{u_0}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{0-,+i\infty}\frac{e^{-\lambda\eta}}{\eta\Pi(\eta)}\,d\eta = u_0 - \frac{u_0}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{e^{v}}{v\Pi(v/\lambda)}\,dv$$

$$u \sim u_0 - \frac{u_0\sqrt{\lambda}}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{e^{-v}}{v\sqrt{-v}}\,dv = u_0 + \frac{u_0}{2\pi i}\sqrt{\lambda}\int\limits_{D}\frac{e^{-v}}{v\sqrt{-v}}\,dv$$

Интегрируя по частям, получим

$$u \sim u_0 - \frac{u_0}{2\pi i}\sqrt{\lambda}\int\limits_{D}\frac{e^{-v}}{\sqrt{-v}}\,dv \quad \text{или} \quad u \sim u_0 - \frac{3}{2}u_0\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \tag{51}$$

Поступила 16 IV 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилевский А. М. Про розподіл струму в циліндричному електроді. Записки Науково-дослід. Інституту математики та механіки ХДУ. 1936 р., т. XIII, с. р. IV, вип. 1.
2. Альперин И. Г. Напряжения в бесконечной полосе, равномерно сжатой на половине длины. Записки научно-исследовательского института математики и механики ХГУ и Харьковского математического общества, т. XX, 1950.