Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ОБОЛОЧКИ, ОЧЕРЧЕННОЙ ПО ОДНОПОЛОСТНОМУ ГИПЕРБОЛОИДУ

Н. А. Алумяэ
(Таллин)

Рассматривается упругая тонкостенная оболочка вращения, очерченная по поверхности однополостного гиперболоида, симметричная относительно стрикционной (горловой) линии и замкнутая плоскими днищами, жесткими в своей плоскости, но гибкими при изгибе из своей плоскости. Если срединная поверхность оболочки задана уравнением (1.1), то уравнения контурных кривых будут $\alpha = \alpha_*$, $\alpha = -\alpha_*$. Оболочка предполагается находящейся под равномерно распределенным внешним давлением.

Показывается, что величина критического давления в существенной мере зависит от того, будет ли (1) α_* корнем уравнения $\cos s\alpha = 0$ (или $\sin s\alpha = 0$) при малом целочисленном значении s $(s \geqslant 2)$ или же (2) α_* отличается мало или (3) немало от корня уравнения $\cos s\alpha = 0$ (или $\sin s\alpha = 0$) при малых целых значениях s. Для каждой упомянутой выше задачи приводится свой метод определения критического давления. Предложенные расчетные алгорифмы сравнительно просты, однако их обоснование неэлементарно. Объясняется это отчасти тем, что при выводе этих методов приходится пользоваться аппаратом безмоментной теории [1], как наиболее подходящим для анализа первой и второй задач.

В примерах, относящихся к интервалу $40° \leqslant \alpha_* \leqslant 45°$, выясняется роль параметра γ, фигурирующего в уравнении (1.1). Результаты вычисления показывают, что при практически встречающихся толщинах и значениях $\gamma \leqslant 0.5$ отпадает необходимость в применении расчетного алгорифма третьей задачи.

1. Начальное напряженное состояние оболочки. Следуя А. Л. Гольденвейзеру [1], зададим радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta)$ однополостного гиперболоида в виде

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma c}{\cos\alpha}(\mathbf{u}_x \cos\beta + \mathbf{u}_y \sin\beta) + \mathbf{u}_z c \operatorname{tg}\alpha \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ — орты декартовой системы координат. Из (1.1) вытекают следующие выражения для параметров Ляме A, B и главных кривизн k_α, k_β:

$$A = \frac{c}{\cos^2\alpha}(1 + \gamma^2 \sin^2\alpha)^{1/2}, \qquad B = \frac{\gamma c}{\cos\alpha}$$
$$k_\alpha = -\frac{\gamma\cos^3\alpha}{c(1+\gamma^2\sin\alpha^2)^{3/2}}, \qquad k_\beta = \frac{\cos\alpha}{\gamma c(1+\gamma^2\sin^2\alpha)^{1/2}} \tag{1.2}$$

причем

$$k_\alpha A^2 = -k_\beta B^2 \tag{1.3}$$

Основное напряженное состояние в общем начальном напряженном состоянии некороткой оболочки, нагруженной равномерно распределенным внешним давлением p, является, очевидно, безмоментным и осесимметричным. Тангенциальные усилия основного напряженного состояния $T_\alpha(\alpha)$, $T_\beta(\alpha)$ удовлетворяют, следовательно, условиям[1]

$$(BT_\alpha)' - B'T_\beta = 0, \qquad k_\alpha T_\alpha + k_\beta T_\beta = -p \tag{1.4}$$

Предположим, что рассматриваемая оболочка имеет плоские, замыкающие ее днища. В этом случае

$$T_\alpha = -\frac{p\gamma c}{2}\frac{(1+\gamma^2\sin^2\alpha)^{1/2}}{\cos\alpha}, \qquad T_\beta = 2T_\alpha - \frac{p\gamma c}{2}\frac{\gamma^2\cos\alpha}{(1+\gamma^2\sin^2\alpha)^{1/2}} \tag{1.5}$$

Будем пренебрегать влиянием краевого эффекта начального напряженного состояния на критическое значение безмоментного состояния (1.5). Это допустимо, если потеря устойчивости охватывает всю оболочку и не сосредоточивается в краевой зоне. В дальнейшем примем, что геометрия начального состояния дается уравнением (1.1), а статика — выражениями (1.5), и покажем, следуя основным требованиям по применению полуобратного метода, что при этом предположении потеря устойчивости безмоментного состояния (1.5) не происходит локально в краевой зоне.

Пусть уравнения контурных линий будут $\alpha = \pm\alpha_*$. По предположению краевые закрепления не допускают перемещения контурных точек срединной поверхности по параллели и не стесняют перемещения по направлению продольной оси оболочки z. Если α_* при некотором достаточно малом целочисленном значении s удовлетворяет одному из условий

$$\cos s\alpha_* = 0 \quad \text{или} \quad \sin s\alpha_* = 0 \tag{1.6}$$

то оболочка относится к классу с нежесткими краевыми закреплениями [2] и ее напряженное состояние (1.5) является мгновенно-равновесным, т. е. малые возмущения во внешней нагрузке вызывают, вообще говоря, значительные изгибающие моменты в оболочке. Ниже покажем, что количественная оценка приведенного качественного положения заключается в относительно малом критическом значении мгновенно-равновесного безмоментного состояния.

2. Основные соотношения для определения критической нагрузки. Введем следующие обозначения для физических составляющих симметрических тензоров, описывающих состояние оболочки после потери устойчивости начального напряженного состояния: $T_\alpha + S_\alpha$, $T_\beta + S_\beta$, S — тангенциальные усилия, G_α, G_β, H — моменты, ε_α, ε_β, ω и $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_\beta$, τ — компоненты первого и второго тензоров деформации, появляющейся в процессе потери устойчивости. Предположим, что в этом процессе при неизменяемом внешнем давлении оболочка переходит в новое состояние, бесконечно близкое к начальному.

---

[1] Здесь и в дальнейшем приняты обозначения

$$(\ldots)' = \frac{\partial}{\partial\alpha}(\ldots), \qquad (\ldots)^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial\beta}(\ldots)$$

При этом S_α, S_β, S, моменты и составляющие тензоров деформации, будут бесконечно малыми величинами первого порядка, которые должны удовлетворять трем условиям равновесия:

$$(BS_\alpha)' + AS^\cdot - B'S_\beta - k_\alpha [(BG_\alpha)' + AH^\cdot - B'G_\beta] + \frac{1}{2}(k_\beta - k_\alpha) AH^\cdot = $$
$$= T_\beta [(B\varepsilon_\beta)' - A\omega^\cdot - B'\varepsilon_\alpha] + \frac{1}{2}(T_\alpha - T_\beta)\omega^\cdot \tag{2.1}$$

$$AS_\beta^\cdot + (BS)' + B'S - k_\beta [AG_\beta^\cdot + (BH)' + B'H] + \frac{1}{2} B [(k_\alpha - k_\beta) H]' =$$
$$= T_\alpha [A\varepsilon_\alpha^\cdot - (B\omega)' - B'\omega] + \frac{1}{2} [(T_\beta - T_\alpha)\omega]' \tag{2.2}$$

$$k_\alpha S_\alpha + k_\beta S_\beta + \frac{1}{AB}\left[\frac{1}{A}(BG_\alpha)' + H^\cdot - \frac{B'}{A} G_\beta\right]' + \frac{1}{B^2} G_\beta^{\cdot\cdot} + \frac{1}{AB^3}(B^2 H^\cdot)' =$$
$$= -T_\alpha \varkappa_\alpha - T_\beta \varkappa_\beta - p(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) \tag{2.3}$$

и трем условиям совместности деформации:

$$(B\varkappa_\beta)' - A\tau^\cdot - B'\varkappa_\alpha - k_\alpha [(B\varepsilon_\beta)' - A\omega^\cdot - B'\varepsilon_\alpha] - \frac{1}{2}(k_\beta - k_\alpha) A\omega^\cdot = 0 \tag{2.4}$$

$$A\varkappa_\alpha^\cdot - (B\tau)' - B'\tau - k_\beta [A\varepsilon_\alpha^\cdot - (B\omega)' - B'\omega] - \frac{1}{2} B [(k_\alpha - k_\beta)\omega]' = 0 \tag{2.5}$$

$$k_\alpha \varkappa_\beta + k_\beta \varkappa_\alpha + \frac{1}{AB}\left[\frac{1}{A}(B\varepsilon_\beta)' - \omega^\cdot - \frac{B'}{A}\varepsilon_\alpha\right]' + \frac{1}{B^2}\varepsilon_\alpha^{\cdot\cdot} - \frac{1}{AB^3}(B^2\omega^\cdot)' = 0 \tag{2.6}$$

На решение системы (2.1)—(2.6) налагаются при $\alpha = \pm\alpha_*$ краевые условия

$$v = 0, \qquad \gamma u \sin\alpha - w = 0 \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} 2cAS_\alpha + \sin 2\alpha [(BG_\alpha)' + 2AH^\cdot - B'G_\beta + BT_\alpha (w' + k_\alpha A u)] = 0 \\ G_\alpha = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Условия (2.7) исключают тангенциальные и радиальные смещения контурных точек срединной поверхности, условиями (2.8) допускаются свободные смещения этих точек в направлении оси оболочки и поворот нормали к срединной поверхности.

Отметим, что условия (2.7) могут быть заменены следующими:

$$\begin{gathered} 2cA\varkappa_\beta + \sin 2\alpha [(B\varepsilon_\beta)' - 2A\omega^\cdot - B'\varepsilon_\alpha] = 0 \\ \varepsilon_\beta = 0 \end{gathered} \tag{2.9}$$

которые более удобны, чем (2.7), в случае, когда задача не будет решена в перемещениях.

Примем простейшие соотношения упругости:

$$G_\alpha = -D(\varkappa_\alpha + \nu\varkappa_\beta), \quad G_\beta = -D(\varkappa_\beta + \nu\varkappa_\alpha), \quad H = -D(1-\nu)\tau \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{Et}(S_\alpha - \nu S_\beta), \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{Et}(S_\beta - \nu S_\alpha), \quad \omega = \frac{1+\nu}{Et} S \tag{2.11}$$

$$\left(D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = Etc^2\lambda^2, \ \lambda^2 = \frac{t^2}{12(1-\nu^2)c^2} \right)$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечного расширения, t — толщина оболочки.

Приведем еще некоторые соотношения, которые понадобятся в дальнейшем. Положим

$$
\begin{aligned}
&\varkappa_\alpha = \varkappa_{\alpha,s}(\alpha)\cos s\beta, && \tau = \tau_s(\alpha)\sin s\beta, && \varkappa_\beta = \varkappa_{\beta,s}(\alpha)\cos s\beta\\
&\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha,s}(\alpha)\cos s\beta, && \omega = \omega_s(\alpha)\sin s\beta, && \varepsilon_\beta = \varepsilon_{\beta,s}(\alpha)\cos s\beta\\
&S_\alpha = S_{\alpha,s}(\alpha)\cos s\beta, && S = S_s(\alpha)\sin s\beta, && S_\beta = S_{\beta,s}(\alpha)\cos s\beta\\
&G_\alpha = G_{\alpha,s}(\alpha)\cos s\beta, && H = H_s(\alpha)\sin s\beta, && G_\beta = G_{\beta,s}(\alpha)\cos s\beta
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

и выпишем условия равновесия (2.1)—(2.3) и совместности деформации (2.4)—(2.6) в форме

$$(BS_\alpha)' + sAS - B'S_\beta = X_G Etc, \qquad -sAS_\beta + \frac{1}{B}(B^2S)' = Y_G Etc \tag{2.13}$$

$$k_\alpha S_\alpha + k_\beta S_\beta = Z_G \frac{Et}{c} \tag{2.14}$$

$$(B\varkappa_\beta)' - sA\tau - B'\varkappa_\alpha = X_\varepsilon, \qquad -sA\varkappa_\alpha - \frac{1}{B}(B^2\tau)' = Y_\varepsilon \tag{2.15}$$

$$k_\alpha\varkappa_\beta + k_\beta\varkappa_\alpha = \frac{1}{c^2} Z_\varepsilon \tag{2.16}$$

Здесь и в дальнейшем у функций $S_{\alpha,s}, \ldots \varkappa_{\alpha,s}, \ldots$ и т. д. опущены индексы s.

Из соотношений (2.14), (2.16) и (1.3) вытекает возможность представления S_α, S_β и $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_\beta$ в виде

$$S_\alpha = Et\left[\frac{Ac^2}{B^3}\varphi(\alpha) + \frac{1}{2k_\alpha c}Z_G\right], \qquad S_\beta = Et\left[\frac{c^2}{AB}\varphi(\alpha) + \frac{1}{2k_\beta c}Z_G\right] \tag{2.17}$$

$$\varkappa_\beta = \frac{Ac}{B^3}\psi(\alpha) + \frac{1}{2k_\alpha c^2}Z_\varepsilon, \qquad \varkappa_\alpha = \frac{c}{AB}\psi(\alpha) + \frac{1}{2k_\beta c^2}Z_\varepsilon \tag{2.18}$$

Исключая из условий равновесия (2.13) сдвигающее усилие S, а из условий совместности деформации (2.15) кручение τ, приходим (при постоянной толщине t) к соотношениям (2.19)

$$\varphi'' + s^2\varphi = \frac{1}{c^3}\left\{\left[\frac{B^2c^2}{A}X_G + \frac{B^2B'}{2k_\beta A}Z_G - \frac{B^2}{2A}\left(\frac{B}{k_\alpha}Z_G\right)'\right]' - \frac{ABs^2}{2k_\beta}Z_G - sc^2BY_G\right\}$$

$$\psi'' + s^2\psi = \frac{1}{c^3}\left\{\left[\frac{B^2c^2}{A}X_\varepsilon + \frac{B^2B'}{2k_\beta A}Z_\varepsilon - \frac{B^2}{2A}\left(\frac{B}{k_\alpha}Z_\varepsilon\right)'\right]' - \frac{ABs^2}{2k_\beta}Z_\varepsilon - sc^2BY_\varepsilon\right\} \tag{2.20}$$

По предположению оболочка теряет устойчивость в целом, а не в краевой зоне. Предположим еще, что возникающее при потере устойчивости напряженное состояние имеет всюду достаточно малый показатель изменяемости, за исключением, может быть, только краевой зоны, где проявляется простой краевой эффект. Основное напряженное состояние будем определять при помощи соотношений (2.19), (2.20). Для того, чтобы найти краевые условия к интегралам системы (2.19), (2.20), исключим обычным способом из (2.8), (2.9) два условия при помощи интегралов простого краевого эффекта. Эту процедуру здесь опустим (хотя и она не элементарна, так как происходящая при этом потеря точности заставляет обратиться к уточненной теории простого краевого эффекта) и приведем только окончательный результат: если величина $s^2\lambda$ мала по сравнению с единицей, то основное напряженное состояние должно удовлетворять краевым условиям

$$A^2B^2k_\beta S_\alpha + B'\,[(BG_\alpha)' + 2sAH - B'G_\beta + BT_\alpha(w' + k_\alpha Au)] - s^2A^2G_\alpha = 0 \quad (2.21)$$

$$A^2B^2k_\beta\varkappa_\beta + B'\,[(B\varepsilon_\beta)' - 2sA\omega - B'\varepsilon_\alpha] - s^2A^2\varepsilon_\beta = 0 \quad (2.22)$$

3. Определение критического давления оболочки с нежесткими краевыми закреплениями. Предположим, что α_* при некотором целочисленном значении s удовлетворяет одному из условий (1.6). В этом случае критическое давление p оболочки может быть определено без принципиальных затруднений.

Исходим, опираясь на известный анализ Цолли, из предположения, что форма потери устойчивости совпадает с формой бесконечно малого изгибания срединной поверхности. В рассматриваемом случае это предположение допустимо, так как выполнено одно из условий (1.6). Теперь можно в уравнениях (2.4)—(2.6) положить $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \omega = 0$, а в уравнениях (2.15), (2.16) ,(2.18), (2.20) — $X_\varepsilon = Y_\varepsilon = Z_\varepsilon = 0$. Отсюда следует, что

$$\psi = D_1\cos s\alpha + D_2\sin s\alpha \quad (3.1)$$

$$\varkappa_\beta = \frac{Ac}{B^3}\psi, \qquad \varkappa_\alpha = \frac{c}{AB}\psi, \qquad \tau = \frac{c}{B^2 s}\psi' \quad (3.2)$$

причем

$$\begin{matrix} D_1 \neq 0, & D_2 = 0, & \text{если} & \cos s\alpha_* = 0 \\ D_1 = 0, & D_2 \neq 0, & \text{если} & \sin s\alpha_* = 0 \end{matrix} \quad (3.3)$$

Краевое условие (2.22), очевидно, удовлетворяется.

Так как $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_\beta$, τ известны (хотя лишь с точностью до постоянного D_1 или D_2, но эта неопределенность свойственна задачам теории устойчивости), то известны и изгибающие и крутящий моменты G_α, G_β, H в уравнениях (2.1)—(2.3), а следовательно, и правые части уравнений (2.13), (2.14) X_G, Y_G, Z_G с точностью до параметра p, входящего в выражения T_α, T_β. Из уравнения (2.19) можно определить значения функции φ на контурах $\alpha = \pm\alpha_*$: если обозначить через $\Phi(\alpha)$ правую часть уравнения (2.19), то

$$\varphi(\alpha_*) = F_1\cos s\alpha_* + F_2\sin s\alpha_* + \frac{1}{s}\int_0^{\alpha_*}\Phi(\alpha)\sin s(\alpha_* - \alpha)\,d\alpha \quad (3.4)$$

причем при симметрической относительно $\alpha = 0$ деформации ($D_2 = 0$) нужно положить $F_2 = 0$, при кососимметрической ($D_1 = 0$) — $F_1 = 0$. Параметр p (критическое давление) определяется из краевого условия (2.21).

Постояннная интегрирования F ($F = F_1$, F_2) остается неопределенной. Она и не нужна при решении задачи в первом приближении.

Данный алгорифм для определения критического давления базируется на том, что в условиях совместности деформации (2.4)—(2.6) можно пренебречь относительными удлинениями и сдвигом ε_α, ε_β, ω. Если определить при известных S_α, S_β, S величины ε_α, ε_β, ω по соотношениям (2.11), то можно установить погрешность алгорифма. Для этого, очевидно, нужно найти при помощи системы (2.4)—(2.6) поправки к исходным значениям $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_\beta$, τ, которые даны формулами (3.1). Отношение поправок к исходным данным и определяет погрешность метода.

Преположим здесь и в дальнейшем, что $\lambda \sim \lambda^\circ$. Тогда из (2.1)—(2.3) вытекает,что критические напряжения начального состояния (1.5) недлинной оболочки будут порядка $E\lambda^2 s^2$; учитывая характер деформации при изгибании (при больших значениях s показатель изменяемости напряженного состояния будет is, $i = \sqrt{-1}$), можно полагать, что ε_α, ε_β, ω будут порядка $\lambda^2 s^3$ по сравнению с величинами $c\varkappa_\alpha$, $c\varkappa_\beta$, $c\tau$, а погрешность метода — порядка $\lambda^2 s^6$.

Пример. Пусть $\alpha_* = \pi/4$. В этом случае краевые закрепления допускают бесконечно малое изгибание срединной поверхности, которое при $s = 2$ будет симметрическое относительно $\alpha = 0$.

Обозначим через $\Phi_2(\alpha)$ правую часть соотношения (2.19) при $s = 2$. Интегрированием этого уравнения можем определить в дальнейшем нужные краевые значения функции φ:

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \Phi_2(\alpha)\cos 2\alpha d\alpha$$

Фигурирующая в краевом условии (2.21) величина $w' + k_\alpha A u$ дается формулой

$$(w' + k_\alpha A u)_{\alpha_* = \pm\frac{\pi}{4}} = \pm A\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_0^{\pi/4} A\varkappa_\alpha d\alpha \tag{3.5}$$

Вычисление, выполненное при $\gamma = 0.5$, $\nu = {}^1/_3$, дало следующее значение для критического давления:

$$q = \frac{pc}{Et} = 23.7\lambda^2 \tag{3.6}$$

Отметим, что при больших значениях s и малых значениях γ получим формулу

$$q\int_0^{\alpha_*} \frac{1+\gamma^2\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha} d\alpha = \frac{1+\gamma^2}{\gamma^3}\lambda^2(s^2-1)\int_0^{\alpha_*}\frac{d\alpha}{\cos\alpha\,(1+\gamma^2\sin^2\alpha)^{1/2}} \tag{3.7}$$

погрешность которой будет порядка γ^2/s^2.

4. Определение критической нагрузки в случае, когда α_* мало отличается от $\frac{1}{4}\pi$. Изложенный в предыдущем разделе метод применим, если при целочисленном значении s удовлетворяется равенство $\cos s\alpha_* = 0$ или $\sin s\alpha_* = 0$ и при этом выполняется сильное неравенство $\lambda^2 s^6 \ll \lambda^0$. Последнее условие при заданном λ определяет конечные интервалы на числовой прямой $(0, \alpha_*)$, где метод неприменим. Сюда, например, относится окрестность точки $\alpha_* = {}^1/_4\pi$. Легко убедиться, что длина этого интервала будет порядка $\lambda^{1/3}$. По результатам предыдущего раздела величина $q = pc/Et$ в точке $\alpha_* = {}^1/_4\pi$ будет порядка λ^2, если же α_* отличается на величину $\delta \sim \lambda^{1/3}$ от ${}^1/_4\pi$, то q будет уже порядка $\lambda^{4/3}$. Однако достаточных оснований это утверждать нет, так как в предыдущем разделе рассматривался только специальный вид деформации. Чтобы дать не только более надежный ответ, но и разработать расчетные методы в случае, когда α_* отличается от корней уравнений $\cos s\alpha_* = 0$, $\sin s\alpha = 0$ при малых значениях s, необходимо и достаточно исследовать, как изменяется $q = pc/Et$ с увеличением δ $(\delta = {}^1/_4\pi - \alpha_*)$.

Исходим из предположения, что при малых значениях δ основное напряженное состояние сохраняет изгибный характер. В соответствии с этим примем в выражениях (2.18) $Z_\varepsilon = 0$, а в выражениях X_G, Y_G, Z_G и в краевом условии (2.22) положим $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \omega = 0$.

Решение задачи ищем в виде

$$\psi = \psi_1(\alpha)\cos s\alpha + \psi_2(\alpha)\sin s\alpha \tag{4.1}$$

где, так как оболочка симметрична относительно $\alpha = 0$,

$$\psi_1(\alpha) = \psi_1(-\alpha), \qquad \psi_2(\alpha) = -\psi_2(-\alpha)$$

при симметрической форме потери устойчивости, а

$$\psi_1(\alpha) = -\psi_1(-\alpha), \qquad \psi_2(\alpha) = \psi_2(-\alpha)$$

при кососимметрической. Напомним, что при симметрическом изгибании $\psi_1 = \mathrm{const}$, $\psi_2 \equiv 0$, а при кососимметрическом $\psi_1 \equiv 0$, $\psi_2 = \mathrm{const}$. Поэтому исходное предположение об изгибном характере деформации оболочки при малых значениях δ выполняется только тогда, когда при симметрической форме потери устойчивости будет ψ_1 — почти постоянная функция, а ψ_2 мала по сравнению с ψ_1 всюду в интервале $(-\alpha_*, \alpha_*)$; при кососимметрической форме должно быть ψ_2 — почти постоянная функция, а ψ_1 мала по сравнению с ψ_2. Этим условиям при малых значениях δ можно удовлетворить, если положим $s = 2, 6, 10, \ldots$ при симметрической форме потери устойчивости и $s = 4, 8, 12, \ldots$ при кососимметрической форме.

Действительно, тогда из упрощенного краевого условия $\varkappa_\beta = 0$ при предположении $Z_\varepsilon = 0$ вытекает: $\psi_2 \sim s\delta\psi_1$ при симметрической форме потери устойчивости и $\psi_1 \sim s\delta\psi_2$ при кососимметрической форме; указанные выше условия удовлетворяются, когда $s\delta \ll 1$.

Дальнейшие рассуждения приводим только относительно симметрической формы потери устойчивости, так как они в кососимметрическом случае вполне аналогичны.

Представим в виде (4.1) все величины, входящие в расчетные соотношения; например,

$$\begin{gathered}\varkappa_\beta = \varkappa_{\beta 1}(\alpha)\cos s\alpha + \varkappa_{\beta 2}(\alpha)\sin s\alpha \\ X_G = X_{G1}(\alpha)\cos s\alpha + X_{G2}(\alpha)\sin s\alpha, \ldots\end{gathered} \tag{4.2}$$

Положим $\psi_1 \sim \lambda^\circ$, тогда согласно сказанному выше $\psi_2 \sim s\delta$. Исходное предположение приводит к следующим результатам.

Из (2.18) при $Z_\varepsilon = 0$ получим

$$c\varkappa_{\alpha 1} \sim c\varkappa_{\beta 1} \sim \lambda^\circ, \qquad c\varkappa_{\alpha 2} \sim c\varkappa_{\beta 2} \sim s\delta \tag{4.3}$$

Кручение τ можно определить через ψ_1, ψ_2 из уравнений (2.15), положив $X_\varepsilon = Y_\varepsilon = 0$. Введем еще допущение

$$\psi_1' \leqslant s\psi_2 \tag{4.4}$$

Тогда

$$c\tau_1 \sim s\delta, \qquad c\tau_2 \sim \lambda^\circ \tag{4.5}$$

Далее приходится рассмотреть два случая в зависимости от того, будет ли $\delta s^2 \leqslant \lambda^\circ$ или $\delta s^2 \geqslant \lambda^\circ$.

1°. *Случай* $\delta s^2 \leqslant \lambda^\circ$. Пренебрегая в выражениях X_G, Y_G, Z_G членами, содержащими ε_α, ε_β, ω, получим

$$X_{G1} \sim Y_{G2} \sim \lambda^2, \qquad X_{G2} \sim Y_{G1} \sim \lambda^2 s, \qquad Z_{G1} \sim \lambda^2 s^2, \qquad Z_{G2} \sim \lambda^2 s \tag{4.6}$$

Для того чтобы параметр внешней нагрузки не выпал из дифференциальных уравнений равновесия, должно быть

$$q \sim \lambda^2 s^2 \tag{4.7}$$

Обозначим через $\Phi(\alpha)$ правую часть уравнения (2.19). Нетрудно убедиться, что

$$\Phi_1 \sim \lambda^2 s^4, \qquad \Phi_2 \sim \lambda^2 s^3 \tag{4.8}$$

Решение уравнения (2.19) можно представить в виде

$$\varphi = [F_1 + \varphi_1^*(\alpha)] \cos s\alpha + \varphi_2(\alpha) \sin s\alpha \tag{4.9}$$

где F_1 — произвольная постоянная интегрирования (второе решение однородного уравнения — нечетное), а

$$\varphi_1^* \sim \lambda^2 s^2, \qquad \varphi_2 \sim \lambda^2 s^3 \tag{4.10}$$

Не определенная пока постоянная F не может быть меньше, чем порядка $\lambda^2 s^2$, так как иначе, вообще говоря, нельзя удовлетворить краевому условию (2.21). Положим поэтому $F_1 \sim \lambda^2 s^r$, где $r \geqslant 2$, тогда

$$\varphi_1 \sim \lambda^2 s^r, \qquad \varphi_2 \sim \lambda^2 s^3 \tag{4.11}$$

Из соотношений (2.17) теперь следует

$$S_{\alpha 1} \sim S_{\beta 1} \sim Et\lambda^2 s^r, \qquad S_{\alpha 2} \sim S_{\beta 2} \sim Et\lambda^2 s^3 \tag{4.12}$$

а из уравнения (2.13)

$$S_1 \sim Et\lambda^2 s^3, \qquad S_2 \sim Et\lambda^2 s^r \tag{4.13}$$

поэтому по физическим соотношениям (2.11) получим

$$\varepsilon_{\alpha 1} \sim \varepsilon_{\beta 1} \sim \omega_2 \sim \lambda^2 s^r, \qquad \varepsilon_{\alpha 2} \sim \varepsilon_{\beta 2} \sim \omega_1 \sim \lambda^2 s^3 \tag{4.14}$$

Далее опять-таки нужно различать два случая: (*a*) $r \geqslant 4$, (*b*) $r < 4$. Начнем с первого случая. Тогда по уравнениям (2.4)—(2.6)

$$X_{\varepsilon 1} \sim Y_{\varepsilon 2} \sim \lambda^2 s^r, \qquad X_{\varepsilon 2} \sim Y_{\varepsilon 1} \sim \lambda^2 s^{r+1}, \qquad Z_{\varepsilon 1} \sim \lambda^2 s^{r+2}, \qquad Z_{\varepsilon 2} \sim \lambda^2 s^{r+1} \tag{4.15}$$

Обозначая через $\Psi(\alpha)$ правую часть соотношения (2.20), будем иметь

$$\Psi_1 \sim \lambda^2 s^{r+4}, \qquad \Psi_2 \sim \lambda^2 s^{r+3} \tag{4.16}$$

Представим решение уравнения (2.20) в виде

$$\psi = [D_1 + \psi_1^*(\alpha)] \cos s\alpha + \psi_2^*(\alpha) \sin s\alpha \tag{4.17}$$

Здесь

$$\psi_1^* \sim \lambda^2 s^{r+2}, \qquad \psi_2^* \sim \lambda^2 s^{r+3} \tag{4.18}$$

Решение (4.17) не должно привести к противоречию с исходным предположением $\psi_1 \sim \lambda^\circ$, $\psi_2 \sim s\delta$. Из этого условия следует

$$D_1 \sim \lambda^\circ, \qquad \lambda^2 s^{r+2} \leqslant \lambda^\circ, \qquad \lambda^2 s^{r+3} \sim s\delta \tag{4.19}$$

а из краевого условия (2.21)

$$\lambda^2 s^{r+1} \delta \sim \lambda^2 s^3 \tag{4.20}$$

Сопоставляя (4.19) и (4.20), имеем

$$s^2 \sim \delta\lambda^{-1} \tag{4.21}$$

причем $s^r \sim \lambda^{-1}$. Приведенные соотношения относятся к случаю, когда $r \geqslant 4$, т. е. $s^r \geqslant s^4$, $\lambda^2 s^{r+2} \leqslant \lambda^\circ$ и $\delta s^2 \leqslant \lambda^\circ$. Эти условия, как нетрудно проверить, удовлетворяются при $\delta \leqslant \lambda^{0.5}$.

Необходимо отметить, что минимальное значение $s = 2$ будет порядка λ°. Поэтому при значениях $\delta \leqslant \lambda$ будет $s = 2$. Проведение анализа в этом случае не представляет затруднения. Естественно предполагать, что $F_1 > \lambda^2$. Тогда можно в соотношениях (4.11)—(4.18) положить $\lambda^2 s^r = F_1$ и $s \sim \lambda^\circ$. Вместо (4.19) получим

$$D_1 \sim \lambda^\circ, \qquad F_1 \leqslant \lambda^\circ, \qquad F_1 \sim \delta \tag{4.22}$$

Если допустить определенную погрешность, то можно при помощи краевого условия (2.21) установить область значений δ, где ни нахождение постояннной F_1, ни функция ψ_2 практического интереса не представляют. При погрешности порядка $\lambda^{0.5}$ эта область дается неравенством $\delta < \lambda^{1.25}$.

Случай (b) $r < 4$ здесь рассматривать не будем, так как это приводит к противоречию с предположением $\delta s^2 \leqslant \lambda^\circ$ при выводе соотношений (4.6)—(4.14).

2°. *Случай* $\delta s^2 \gtrsim \lambda^\circ$. Ограничимся представлением результатов анализа, который аналогичен только что изложенному. Имеем

$$X_{G1} \sim Y_{G2} \sim \lambda^2\delta s^2, \qquad X_{G2} \sim Y_{G1} \sim \lambda^2 s, \qquad Z_{G1} \sim \lambda^2 s^2, \qquad Z_{G2} \sim \lambda^2\delta s^3 \tag{4.23}$$

$$\Phi_1 \sim \lambda^2 s^4, \qquad \Phi_2 \sim \lambda^2\delta s^5 \tag{4.24}$$

$$\varphi_1^* \sim \lambda^2\delta s^4, \qquad \varphi_2 \sim \lambda^2 s^3 \tag{4.25}$$

Положим $F_1 \sim \lambda^2 s^r$ $(s^r \gtrsim \delta s^4)$. Тогда

$$\varphi_1 \sim \lambda^2 s^r, \qquad \varphi_2 \sim \lambda^2 s^3 \tag{4.26}$$

$$S_{\alpha 1} \sim S_{\beta 1} \sim S_2 \sim Et\lambda^2 s^r, \qquad S_{\alpha 2} \sim S_{\beta 2} \sim S_1 \sim Et\lambda^2 s^3 \tag{4.27}$$

$$\varepsilon_{\alpha 1} \sim \varepsilon_{\beta 1} \sim \omega_2 \sim \lambda^2 s^r, \qquad \varepsilon_{\alpha 2} \sim \varepsilon_{\beta 2} \sim \omega_1 \sim \lambda^2 s^3 \tag{4.28}$$

Далее нужно рассматривать только случай $r < 4$, так как предположение $r > 4$ приводит к противоречию. При $r < 4$ получим

$$X_{\varepsilon 1} \sim Y_{\varepsilon 2} \sim \lambda^2 s^4, \qquad X_{\varepsilon 2} \sim Y_{\varepsilon 1} \sim \lambda^2 s^{r+1}, \qquad Z_{\varepsilon 1} \sim \lambda^2 s^{r+2}, \qquad Z_{\varepsilon 2} \sim \lambda^2 s^5 \tag{4.29}$$

$$\Psi_1 \sim \lambda^2 s^{r+4}, \qquad \Psi_2 \sim \lambda^2 s^7 \tag{4.30}$$

$$\psi_1^* \sim \lambda^2 s^6, \qquad \psi_2 \sim \lambda^2 s^{r+3} \tag{4.31}$$

Откуда следуют условия

$$\lambda^2 s^6 \leqslant \lambda^\circ, \qquad \lambda^2 s^{r+3} \sim s\delta \tag{4.32}$$

Используя краевое условие (2.21), получим

$$s^2 \sim \delta\lambda^{-1}, \qquad s^r \sim \lambda^{-1} \tag{4.33}$$

Нетрудно убедиться, что рассмотренный случай относится к интервалу $\lambda^{1/2} \leqslant \delta \leqslant \lambda^{1/3}$, так как только в этом интервале удовлетворяются условия

$$\delta s^2 \gtrsim \lambda^\circ, \qquad s^r \gtrsim \delta s^4, \qquad r < 4, \qquad \lambda^2 s^6 \leqslant \lambda^\circ$$

Остается проверить в соответствии с основным положением полуобратного метода, не противоречат ли полученным результатам соотношения (4.3)—(4.6), при выводе которых были использованы некоторые предположения. Очевидно, для того чтобы приведенные качественные результаты были достоверными, должно быть

$$Z_{\varepsilon 1} \leqslant \lambda^{\circ}, \qquad Z_{\varepsilon 2} \leqslant s\delta, \qquad X_{\varepsilon 1} \leqslant s\tau_1, \qquad X_{\varepsilon 2} \leqslant s\tau_2 \tag{4.34}$$

а в уравнениях равновесия (2.1)—(2.3) члены, содержащие ε_α, ε_β, ω, должны быть соизмеримы или меньше, чем члены, которые ε_α, ε_β, ω в явном виде не содержат. Легко убедиться, что в интервале $0 \leqslant \delta \leqslant \lambda^{1/3}$ эти условия выполнены.

5. Метод расчета при $\delta \leqslant \lambda^{0.5}$. Если $\lambda \leqslant \delta \leqslant \lambda^{0.5}$, то в выражении (4.9) будет $F_1 \sim \lambda$, $\varphi_1^* \sim \lambda\delta$, а в выражении (4.17) — $\psi_1^* \sim \delta$. Если же $\lambda^{1.5} < \delta \leqslant \lambda$, то $F_1 \sim \delta$, $\varphi_1^* \sim \lambda^2$, $\psi_1^* \sim \delta$. Отсюда следует, что в интервале $\lambda^{1.5} \leqslant \delta \leqslant \lambda^{0.5}$ можно с погрешностью порядка $\lambda^{0.5}$ представить решение в виде[1]

$$\psi = D_1 \cos s\alpha + \psi_2(\alpha) \sin s\alpha, \quad \varphi = F_1 \cos \alpha + \varphi_2(\alpha) \sin s\alpha \tag{5.1}$$

В выражениях (2.18), если их выписать для $\varkappa_{\alpha 2}$, $\varkappa_{\beta 2}$, будут $\psi_2 \sim s\delta$, $Z_{\varepsilon 2} \sim \lambda s$ при $\delta > \lambda$ и $\psi_2 \sim \delta$, $Z_{\varepsilon 2} \sim \delta$ при $\delta < \lambda$; поэтому $Z_{\varepsilon 2} \leqslant \psi_2$. В выражение Φ_1 входят главные члены от ψ_2 с множителем $\lambda^2 s^3$, так что члены в Φ_1, содержащие пока неизвестную функцию ψ_2, будут порядка $\lambda^2 s^4 \delta$ при $\delta > \lambda$ и порядка $\lambda^2 \delta$ при $\delta < \lambda$. Вместе с тем главные члены в выражении Φ_1 зависят от $\psi_1 (= D_1)$ и будут порядка $\lambda^2 s^4$ при $\delta > \lambda$ и порядка λ^2 при $\delta < \lambda$.

Отмечая еще, что $Z_{\varepsilon 1} \sim \delta$, $\psi_1 \sim \lambda^{\circ}$, а в выражениях X_G, Y_G, Z_G будут члены, зависящие в явном виде от ε_α, ε_β, ω, лишь порядка $\delta \leqslant \lambda^{0.5}$ по сравнению с главными членами (зависящими от $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_\beta$, τ), приходим к выводу, что функцию φ_2 можно определить через функцию $\psi_1 = D_1$ следующим образом: 1) в выражениях (2.18) положим $\psi = D_1 \cos s\alpha$, $Z_\varepsilon = 0$; 2) кручение τ определим формулой $\tau = c\psi' / sB^2$; 3) в выражениях X_G, Y_G, Z_G отбросим члены, содержащие ε_α, ε_β, ω; 4) по известным X_G, Y_G, Z_G (в выражение Z_G входит параметр нагрузки q) вычислим правую часть соотношения (2.19), откуда и определяется функция φ_2.

Аналогичные рассуждения показывают, что функцию ψ_2 можно определить через функцию $\varphi_1 = F_1$ из соотношения (2.20), причем также с погрешностью δ. Для этого: 1) в выражениях (2.17) положим $\varphi = F_1 \cos s\alpha$, $Z_G = 0$; 2) сдвигающее усилие определим формулой $S = -Etc^2\varphi' / sB^2$; 3) по известным X_ε, Y_ε, Z_ε вычислим правую часть соотношения (2.20); из последнего соотношения определим ψ_2.

Критическое давление определяется из краевых условий (2.21), (2.22). Существенно отметить, что при составление краевых условий необходима большая точность, а именно, здесь нужно S_α и $\varkappa_\beta$ определить формулами (2.17), (2.18), но все же Z_G и Z_ε можно вычислить так, как указано выше (для вычисления Z_G положим в (2.18) $\psi = D_1 \cos s\alpha$, $Z_\varepsilon = 0$, кручение τ определим формулой $\tau = c\psi' / sB^2$, в выражении Z_G отбросим член $p(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)$; для вычисления Z_ε положим в (2.17) $\varphi = F_1 \cos s\alpha$, $Z_G = 0$,

---

[1] В дальнейшем рассматривается только симметричная форма потери устойчивости.

сдвигающее усилие определим формулой $S = -Etc^2\varphi' / sB^2$). Краевые условия можно представить в упрощенной форме:

$$A^2B^2k_\beta S_\alpha + B'[BG_\alpha' + 2sAH + BT_\alpha(w' + k_\alpha Au)] = 0 \tag{5.2}$$

$$A^2B^2k_\beta \varkappa_\beta + B'[B\varepsilon_\beta' - 2sA\omega] = 0 \tag{5.3}$$

причем при развертывании возможны дальнейшие упрощения. В частности, если допускать погрешность порядка γ^2 / s^2, то для определения критического давления при симметрической форме потери устойчивости получим формулу

$$\frac{4\gamma^3 \operatorname{ctg}^2 s\alpha_*}{(1+\gamma^2)^3 s^2 (s^2-1)} + \left\{\frac{1+\gamma^2}{\gamma^3}\lambda^2(s^2-1)\int_0^{\alpha_*}\frac{d\alpha}{\cos\alpha(1+\gamma^2\sin^2\alpha)^{1/2}} - \right.$$
$$\left. - q\int_0^{\alpha_*}\frac{1+\gamma^2\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}\,d\alpha\right\}\int_0^{\alpha_*}\frac{d\alpha}{\cos\alpha(1+\gamma^2\sin^2\alpha)^{1/2}} = 0 \tag{5.4}$$

при кососимметрической же форме нужно в (5.4) заменить $\operatorname{ctg}^2 s\alpha_*$ на $\operatorname{tg}^2 s\alpha_*$. Следует учесть, что формула (5.4) применима только для значений $\delta \ll 1$, т. е. когда при заданном α_* уравнение $\cos s(\alpha_* + \delta) = 0$ (или $\sin s(\alpha_* + \delta) = 0$) удовлетворяется при малом δ, $\delta \ll 1$.

По формуле (5.4) было определено критическое давление оболочки, у которой $\lambda^2 = 10^{-7}$, $\gamma = 0.5$ для значений α_* в интервале от 40 до 44°. Приводим результаты вычислений:

$\alpha_* =$	45°	44°	43°	42°	41°	40°
$q/\lambda^2 =$	23.7	140	300	462	437	371
$s =$	2	4	4	6	7	7

Максимальное значение q получается при $\alpha_* = 41{,}2°$, при $q = 520\,\lambda^2$

В заключение отметим, что определение критического давления при $\delta \lessdot \lambda^{1.5}$ проводится по схеме, изложенной в разделе 3.

6. Метод расчета при значениях $\lambda^{1/2} \lessdot \delta \lessdot \lambda^{1/3}$. В рассматриваемом интервале будет $\delta s^2 \sim \delta^2\lambda^{-1} \gg \lambda^\circ$, так что здесь применимы соотношения, приведенные в разделе 4, п. 2°.

Отметим прежде всего, что краевые условия (2.21), (2.22) выведены в предположении, что $s^2\lambda \ll 1$. По результатам раздела 4 $s^2 \sim \delta\lambda^{-1}$, поэтому погрешность краевых условий будет порядка δ. Отсюда следует, что если не уточнять краевых условий, то удерживать в других расчетных соотношениях члены порядка δ по сравнению с главными членами нет смысла.

Отметим лишь, что при уточнении краевых условий при $\delta \gtrdot \lambda^{1/2}$ целесообразнее применение хорошо известных уравнений местной потери устойчивости [3], погрешность которых уменьшается с увеличением s, в то же время погрешность последующих соотношений с увеличением s увеличивается.

Если допускать погрешность порядка δ, то на основании данных раздела 4 возможны следующие упрощения: 1) в формулах (2.17), (2.18) можно положить $Z_G = 0, Z_\varepsilon = 0$; 2) кручение τ и сдвигающее усилие S можно определить формулами $\tau = c\psi' / sB^2$, $S = -Etc^2\varphi/sB^2$; 3) в правых частях соотношений (2.19), (2.20) можно отбросить члены, содержащие

X_G, Y_G, $X_\varepsilon, Y_\varepsilon$; 4) в выражении Z_G — член $p(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)$; 5) краевые условия можно представить в виде

$$S_\alpha = 0, \qquad \varkappa_\beta = 0 \tag{6.1}$$

В результате этих упрощений в правую часть соотношения (2.19) войдет только функция ψ, а в правую часть (2.20) — функция φ.

Решение задачи ищем в виде асимптотических разложений

$$\psi = \left(\psi_{10} + \frac{1}{s}\psi_{11} + \ldots\right)\cos s\alpha + \left(\psi_{20} + \frac{1}{s}\psi_{21} + \ldots\right)\sin s\alpha \tag{6.2}$$

и для φ в отличие от предыдущего обозначения

$$\varphi = \left(\varphi_{20} + \frac{1}{s}\varphi_{21} + \ldots\right)\cos s\alpha + \left(\varphi_{10} + \frac{1}{s}\varphi_{11} + \ldots\right)\sin s\alpha \tag{6.3}$$

причем, учитывая погрешность соотношений, при $\delta \sim \lambda^{1/2}$ можно вычислять члены ψ_{10}, ψ_{11}, ψ_{20}, ψ_{21}, $\varphi_{10}, \ldots$, но при $\delta \sim \lambda^{1/3}$ — только ψ_{10}, ψ_{20}, φ_{10}, φ_{20}.

Ограничиваясь в дальнейшем решением задачи в первом приближении, положим

$$\psi = \psi_1(\alpha)\cos s\alpha + \psi_2(\alpha)\sin s\alpha, \qquad \varphi = \varphi_2(\alpha)\cos s\alpha + \varphi_1(\alpha)\sin s\alpha \tag{6.4}$$

и будем удерживать в соотношениях (2.19), (2.20) только члены с множителем s в наибольшей степени. Поступая так, приходим к уравнениям

$$\pm 2s\varphi' = \left\{\frac{(1+\gamma^2)^2\lambda^2 s^4}{\gamma^3\cos\alpha(1+\gamma^2\sin^2\alpha)^{1/2}} - (1+\gamma^2)\,q s^2\,\frac{1+\gamma^2\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}\right\}\psi \tag{6.5}$$

$$\mp 2s\psi' = -\frac{(1+\gamma^2)^2 s^4}{\gamma^3\cos\alpha\,(1+\gamma^2\sin^2\alpha)^{1/2}}\,\varphi \tag{6.6}$$

Здесь индексы опущены; верхние знаки относятся к функциям ψ_1, φ_1, нижние — к функциям φ_2, ψ_2. Исключая из (6.5), (6.6) функцию φ, получим одинаковые для ψ_1 и ψ_2 уравнения:

$$-\{\psi'\cos\alpha\,(1+\gamma^2\sin^2\alpha)^{1/2}\}' + \left\{\frac{(1+\gamma^2)^4\lambda^2 s^6}{4\gamma^6\cos\alpha\,(1+\gamma^2\sin^2\alpha)^{1/2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{(1+\gamma^2)^3}{4\gamma^3}\,q s^4\,\frac{1+\gamma^2\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}\right\}\psi = 0 \tag{6.7}$$

Краевые условия можно представить в виде

$$\psi_1\cos s\alpha + \psi_2\sin s\alpha = 0, \qquad -\psi_1'\sin s\alpha + \psi_2'\cos s\alpha = 0 \tag{6.8}$$

Так как по условиям (6.8)

$$\psi_1\psi_1' + \psi_2\psi_2' = 0 \qquad \text{при } \alpha = \pm\alpha_* \tag{6.9}$$

то определение наименьшего значения q, допускающего нетривиальное решение уравнения (6.7) при краевых условиях (6.8), формально равносильно вариационной задаче

$$q = \min\frac{L(\psi_1, \psi_2)}{N(\psi_1, \psi_2)} \tag{6.10}$$

где

$$L(\psi_1, \psi_2) = \int\limits_{-\alpha_*}^{\alpha_*} \left\{ \frac{4\gamma^3}{(1+\gamma^2)^3 s^4} \cos\alpha \, (1+\gamma^2 \sin^2\alpha)^{1/2} \sum_{j=1}^{2} (\psi_j')^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(1+\gamma^2)\lambda^2 s^2}{\gamma^3 \cos\alpha \, (1+\gamma^2\sin^2\alpha)^{1/2}} \sum_{j=1}^{2} (\psi_j)^2 \right\} d\alpha$$

$$N(\psi_1, \psi_2) = \int\limits_{-\alpha_*}^{\alpha_*} \frac{1+\gamma^2\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha} \Sigma (\psi_j)^2 \, d\alpha \qquad (6.11)$$

Здесь функции ψ_1, ψ_2 должны удовлетворять краевым условиям

$$\frac{\psi_2'}{\psi_2} = -\frac{\psi_1'}{\psi_1} \operatorname{tg}^2 s\alpha \qquad (6.12)$$

и иметь непрерывные производные по крайней мере до первого порядка. Краевые условия (6.9) являются в отношении вариационной задачи (6.10) естественными краевыми условиями.

Формула (6.10) показывает, что при заданном α_* величина s зависит как от λ, так и от γ. С уменьшением λ и параметра $\gamma^{-2}(1+\gamma^2)^{4/3}$ число волн увеличивается и вместе с тем уменьшается погрешность формулы (6.10).

При помощи (6.10) было определено критическое давление для значений $40° \leqslant \alpha_* \leqslant 42°$, $\lambda^2 = 10^{-7}$, $\gamma = 0.5$. Функции ψ_1 и ψ_2 аппроксимировались в виде

$$\psi_1 = a_0 + a_2\alpha^2, \qquad \psi_2 = b_1\alpha \qquad (6.13)$$

для симметрической формы потери устойчивости и

$$\psi_1 = a_1\alpha, \qquad \psi_2 = b_0 + b_2\alpha^2 \qquad (6.14)$$

для кососимметрической формы. Отношения a_2 / a_0, b_1 / a_0 и a_1 / b_0, b_2 / b_0 были определены из краевых условий (6.8). Приводим результаты вычислений:

$\alpha_* =$	40°	41°	42°
$q / \lambda^2 =$	377	436	441
$s =$	7	7	6

В рассмотренном интервале α_* критическое давление будет наибольшим при $\alpha_* = 41{,}7°$; здесь при $\lambda^2 = 10^{-7}$

$$q = 494\,\lambda^2 \qquad (s = 6 \text{ или } 7) \qquad (6.15)$$

Несмотря на малое значение λ, число s получалось небольшим (это результат сравнительно малого значения γ), поэтому (6.15) может служить лишь грубой оценкой для критического давления ($q = pc / Et$). Тем не менее совпадение с результатами расчета, представленными в предыдущем разделе, довольно хорошее.

Сравнение формул (3.6) для $\alpha_* = 45°$ и (6.15) для $\alpha_* = 41.7°$ показывает, что небольшое изменение в размерах оболочки может в значительной степени увеличивать критическое давление оболочки. Очевидно, при более тонких оболочках такое увеличение жесткости проявляется более отчетливо; наоборот, при больших относительных толщинах оно будет мало.

Поступила 11 XI 1955

Институт строительства и строительных материалов Академии наук Эстонский ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Безмоментная теория оболочек, очерченных по поверхностям второго порядка. ПММ, т. XI, вып. 2, 1947.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гос. изд-во техн.-теорет. литературы. М., 1953.
3. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории оболочек. ПММ, т. VIII, вып. 2, 1944.