

О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНКИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ГАЗЕ

А. А. Мовчан

(Москва)

Исследуются колебания консольной пластинки бесконечной ширины, движущейся в газе с большой сверхзвуковой скоростью в направлении от заземленного к свободному краю. Давление газа учитывается приближенной формулой.

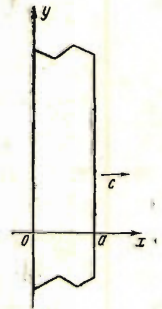
В условиях плоской задачи выясняется связь между характеристиками собственных колебаний и скоростью движения пластинки, позволяющая делать некоторые выводы об устойчивости движения. Получена формула критической скорости.

Постановка рассмотренной ниже задачи принадлежит А. А. Ильюшину; за помощь и существенные замечания приношу ему глубокую благодарность.

1. Основные уравнения. Действующие силы и геометрические связи на границе изучаемой пластинки позволяют ей двигаться в своей плоскости прямолинейно с постоянной скоростью c в некоторой газовой среде. В плоскости этого невозмущенного движения введем прямоугольную систему координат x, y , движущуюся вместе с пластинкой прямолинейно со скоростью c вдоль оси x (фиг. 1). Пластика, заземленная по краю $x = 0$ и свободная по краю $x = a$, занимает полосу бесконечной по оси y ширины между этими краями.

Малый прогиб $w(x, y, t)$ точек пластинки удовлетворяет уравнению

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \right)$$



Фиг. 1

и соответствующим граничным условиям^[1]. Поперечная нагрузка q , действующая на движущуюся пластинку, складывается из сил инерции

$$q_1 = -2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

и сил аэродинамического воздействия¹

$$q_2 = 2B \left(c \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad \left(B = \frac{\rho_0 c^2}{c_0} \right)$$

Здесь $2h$ — толщина пластинки, ρ — плотность материала пластинки, D — жесткость пластинки, E — модуль Юнга материала пластинки, ν — коэффициент Пуассона материала пластинки, c — скорость невозмущенного движения пластинки, B — неотрицательное число, характеризую-

¹ Эту формулу сил аэродинамического воздействия на тонкую пластинку, движущуюся в газе с большой сверхзвуковой скоростью, сообщил мне А. А. Ильюшин.

щие свойства газа, в котором движется пластинка, p_0 — давление газа на бесконечности, κ — показатель политропы газа, c_0 — скорость звука в газе на бесконечности.

Будем считать все величины, входящие в задачу, не зависящими от координаты y (плоская задача). Тогда, вводя величину x/a и сохраняя для нее попрежнему обозначение x , исходную задачу можно записать уравнениями

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{2Ba^3c}{D} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{a^4}{D} \left(2B \frac{\partial w}{\partial t} + 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = 1$$

Рассмотрим решения исходной задачи, представимые в виде

$$w(x, t) = X(x) e^{\omega t}, \quad X(x) = |X(x)| e^{i\varphi(x)} \quad (1.2)$$

где $X(x)$ — комплексная функция вещественной величины x , а $\omega = p + iq$ — какое-нибудь комплексное число, которое будем называть комплексной частотой.

Комплексное решение (1.2) распадается на вещественные решения

$$w(x, t) = |X(x)| e^{pt} \cos[\varphi(x) + qt]$$

$$w(x, t) = |X(x)| e^{pt} \sin[\varphi(x) + qt] \quad (1.3)$$

Движения пластинки, соответствующие вещественным решениям (1.3), назовем собственными движениями пластинки.

В зависимости от p амплитуда собственных движений $|X(x)| e^{pt}$ с течением времени может убывать, оставаться неизменной или возрастать. Если вещественная частота q не равна нулю, собственные движения имеют характер колебаний. Эти колебания при $\varphi = \text{const}$ похожи на стоячие волны, а при $\varphi \neq \text{const}$ — на бегущие волны, скорость распространения которых $-q/(d\varphi/dx)$ при $d\varphi/dx \neq \text{const}$ различна в разных точках пластинки.

Подставляя (1.2) в (1.1) и вводя обозначения

$$A = \frac{2Ba^3c}{D} = \frac{2a^3 p_0 \kappa c}{D c_0} \quad (1.4)$$

$$\lambda = -\frac{a^4}{D} (2B\omega + 2h\rho\omega^2) \quad (1.5)$$

находим, что функция (1.2) является решением исходной задачи тогда и только тогда, когда $X(x)$ является собственной функцией краевой задачи

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - A \frac{dX}{dx} = \lambda X \quad (1.6)$$

$$X = \frac{dX}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d^3 X}{dx^3} = 0 \quad \text{при } x = 1$$

а комплексная частота ω определяется по собственному значению λ из соотношения (1.5):

$$\omega = -\frac{B}{2h\rho} \pm \frac{1}{2h\rho} \sqrt{B^2 - \frac{2h\rho D \lambda}{a^4}} \quad (1.7)$$

Параметр A в уравнении (1.6) будем называть приведенной скоростью движения пластинки или просто скоростью A .

Основная краевая задача (1.6) при $A \neq 0$ не является самосопряженной, поэтому ее собственные значения λ , вообще говоря, могут располагаться на комплексной плоскости не только на вещественной оси.

Для вещественных собственных значений λ собственные функции $X(x)$ основной краевой задачи можно выбрать вещественными. При этом в формулах (1.3) $\varphi(x) = \text{const}$, и собственные движения, если они имеют колебательный характер, похожи на стоячие волны.

Для комплексных собственных значений λ собственные функции $X(x)$ непременно комплексны, так что в формулах (1.3) $\varphi(x) \neq \text{const}$, а собственные движения похожи на бегущие волны.

При любом λ одно из значений (1.7) комплексной частоты ω имеет отрицательную вещественную часть. Второе значение (1.7) имеет отрицательную вещественную часть, если λ расположено на комплексной плоскости внутри параболы второй степени

$$\text{Re } \lambda = \frac{h\epsilon D}{2a^4 B^2} (\text{Im } \lambda)^2 \tag{1.8}$$

(фиг. 2), нулевую вещественную часть, если λ расположено на самой параболе (1.8), и положительную вещественную часть, если λ расположено вне параболы (1.8).

Число собственных значений λ основной краевой задачи, расположенных за пределами параболы (1.8), назовем степенью неустойчивости невозмущенного движения, а параболу (1.8) — параболой устойчивости.

Собственное значение λ основной краевой задачи связано с соответствующей собственной функцией соотношением

$$\lambda = \left(\int_0^1 dx \frac{d^2 X}{dx^2} \frac{d^2 \bar{X}}{dx^2} - A \int_0^1 dx \frac{dX}{dx} \bar{X} \right) : \left(\int_0^1 dx X \bar{X} \right)$$

получаемым умножением первого уравнения (1.6) на \bar{X} и интегрированием по частям с использованием граничных условий. Из этого соотношения видно, что при $A = 0$ все собственные значения λ основной краевой задачи вещественны и положительны.

2. Изменение собственных значений основной краевой задачи с изменением скорости движения. При фиксированных A , λ любое решение уравнения (1.6) является линейной комбинацией

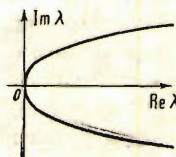
$$X = \sum_{i=1}^4 C_i X_i(A, \lambda; x) \tag{2.1}$$

четырех его линейно независимых решений $X_i(A, \lambda; x)$. Будем разыскивать их в виде $X = e^{-zx}$, где $z = z(A, \lambda)$ суть корни характеристического уравнения

$$-z^4 + Az - \lambda = 0 \tag{2.2}$$

составляя выражение (2.1) и подчиняя его граничным условиям (1.6), легко показать, что корни z_1, z_2, z_3, z_4 удовлетворяют уравнению

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\Delta}{8} = 0 \tag{2.3}$$



Фиг. 2

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1^2 e^{-z_1} & z_2^2 e^{-z_2} & z_3^2 e^{-z_3} & z_4^2 e^{-z_4} \\ z_1^3 e^{-z_1} & z_2^3 e^{-z_2} & z_3^3 e^{-z_3} & z_4^3 e^{-z_4} \end{vmatrix}$$

$$\delta = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4)$$

тогда, и только тогда, когда в уравнении (2.2) вместо λ подставлено собственное значение основной краевой задачи, имеющееся при данном A . Знаменатель в (2.3) поставлен для того, чтобы указанное свойство функции F сохранялось в случае кратных корней уравнения (2.2).

Если в (2.3) подставить явные выражения корней $z_i = z_i(A, \lambda)$ через A и λ , получится уравнение

$$F(A, \lambda) = 0 \quad (2.4)$$

связывающее между собой скорость A и собственные значения λ основной краевой задачи. Уравнение (2.4) весьма громоздко. Чтобы упростить исследования, перейдем в уравнении (2.4) от параметров A, λ к другим параметрам. Сначала основными параметрами считаем какие-нибудь два корня z_1, z_2 уравнения (2.2). Через z_1, z_2 корни z_3, z_4 и параметры A, λ имеют выражение

$$z_{3,4} = -\frac{1}{2}(z_1 + z_2) \pm \sqrt{z_1 z_2 - \frac{3}{4}(z_1 + z_2)^2}$$

$$\lambda = -z_1 z_2 (z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2), \quad A = -(z_1 + z_2)(z_1^2 + z_2^2)$$

Затем от параметров z_1, z_2 преобразованием

$$z_1 = \alpha + i\beta, \quad z_2 = \alpha - i\beta \quad (2.5)$$

переходим к параметрам α, β

$$z_{3,4} = -\alpha \pm \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2} \quad (2.6)$$

$$\lambda = (\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 - 3\alpha^2) \quad (2.7)$$

$$A = 4\alpha(\beta^2 - \alpha^2) \quad (2.8)$$

Наконец, подставляя в (2.3) выражения (2.5) и (2.6), находим уравнение (2.4) выраженное через параметры α, β :

$$F(\alpha, \beta) = \frac{\cos \beta \left[((\beta^2 - \alpha^2)^2 + 12\alpha^4) \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2} + 2\alpha(\beta^4 - \alpha^4) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2}} \right] + \frac{1}{2}(\beta^2 + \alpha^2)^2 e^{-2\alpha}}{2[(\beta^2 - 3\alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}(\beta^2 - 3\alpha^2)^2 \alpha - (\beta^2 - 3\alpha^2) \frac{\sin \beta}{\beta} \left[\alpha^2(\beta^2 + \alpha^2) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2}} + 2\alpha(\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2} \right]}{2[(\beta^2 - 3\alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]} = 0 \quad (2.9)$$

Система уравнений (2.8), (2.9), в которой скорость A считается известной величиной, а параметры α, β — неизвестными, обладает тем свойством, что каждому ее решению (α, β) по формуле (2.7) соответствует собственное значение λ основной краевой задачи; каждому собственному значению λ основной краевой задачи, имеющемуся при данном A , соответствует по крайней мере одно решение (α, β) системы (2.8), (2.9).

Систему (2.8), (2.9) назовем характеристической системой. Рассмотрим некоторые ее свойства.

Пусть при данном A пара чисел (α, β) есть решение характеристической системы. Тогда при том же A ее решениями будут также

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \alpha \\ \beta' &= -\beta \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \alpha'' &= \frac{1}{2}(i\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2}) \\ \beta'' &= \frac{1}{2}(2\alpha + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2} + i\beta) \end{aligned} \right\} \text{ и т. д.} \quad (2.10)$$

Подобные решения, получающиеся из первоначального (α, β) изменением нумерации корней z_i в формулах (2.5), (2.6), дают то же собственное значение, что и решение (α, β) . Значит, чтобы исследовать все собственные значения, нет необходимости рассматривать все решения характеристической системы, а достаточно рассмотреть лишь часть из них, так называемые существенные решения.

Существенные решения легко найти при $A = 0$. Из уравнения (2.8) при $A = 0$ получается либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = \pm \beta$. Для этих случаев уравнение (2.9) принимает вид соответственно:

$$F(0, \beta) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch} \beta \cos \beta) = 0, \quad F(\pm \beta, \beta) = \frac{1}{4}(2 + \operatorname{ch} 2\beta + \cos 2\beta) = 0 \quad (2.11)$$

Рассмотрение вещественных положительных корней β первого уравнения (2.11) приводит к нахождению всех существенных решений характеристической системы при $A = 0$:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1.8751), & \quad (\alpha_2 = 0, \beta_2 = 4.6941), & \quad (\alpha_3 = 0, \beta_3 = 7.8548) & \quad (2.12) \\ (\alpha_4 = 0, \beta_4 = 10.9955), & \quad (\alpha_m = 0, \beta_m \approx (m - \frac{1}{2})\pi) & \quad (m = 5, 6, 7, \dots) \end{aligned}$$

Остальные корни первого уравнения (2.11), а также корни второго уравнения (2.11) рассматривать не следует, потому что они приводят к решениям (α, β) , которые связаны с найденными решениями (2.12) как раз формулами (2.10).

Пусть $(\alpha = 0, \beta = \beta_m)$ есть одна из точек (2.12). В точке $(0, \beta_m)$ выполняются соотношения

$$F(0, \beta_m) = 0, \quad \frac{\partial F(0, \beta_m)}{\partial \beta} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \beta_m \cos \beta_m - \operatorname{ch} \beta_m \sin \beta_m) \neq 0$$

По теореме о неявной функции [2] (стр. 354) в некоторой окрестности точки $(0, \beta_m)$ существует единственная аналитическая функция $\beta = \beta_m(\alpha)$, обращающая уравнение (2.9) в тождество. Функция $F(\alpha, \beta)$ для вещественных α, β вещественна, поэтому функция $\beta = \beta_m(\alpha)$ для вещественных α принимает вещественные значения.

Рассмотрим уравнение

$$f(A, \alpha, \beta_m(\alpha)) \equiv A - 4\alpha [\beta_m^2(\alpha) - \alpha^2] = 0 \quad (2.13)$$

являющееся результатом подстановки $\beta = \beta_m(\alpha)$ в правую часть уравнения (2.8). В точке $(A = 0, \alpha = 0)$ выполняются соотношения $f = 0, \partial f / \partial \alpha = -4\beta_m^2 \neq 0$.

По теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки $(A = 0, \alpha = 0)$ существует единственная аналитическая функция $\alpha = \alpha_m(A)$, обращающая уравнение (2.13) в тождество и принимающая для вещественных A вещественные значения. Подстановка $\alpha = \alpha_m(A)$ в выражение $\beta = \beta_m(\alpha)$ приводит к аналитической функции $\beta = \beta_m(A)$.

Таким образом, для достаточно малых $|A|$ существует единственная пара аналитических функций

$$\alpha = \alpha_m(A), \quad \beta = \beta_m(A) \quad (2.14)$$

которая обращает в тождество оба уравнения характеристической системы, причем $\alpha_m(0) = 0, \beta_m(0) = \beta_m$. Пара функций (2.14) при меняющемся A определяет в пространстве величин α, β единственную аналитическую кривую, проходящую при $A = 0$ через точку $(0, \beta_m)$. Вещественным достаточно малым A соответствуют вещественные точки (α, β) кривой (2.14).

Через каждую точку (2.12) проходит своя единственная аналитическая кривая (2.14), вещественная для достаточно малых вещественных A , состоящая сплошь из решений характеристической системы. Кривые (2.14) назовем ветвями характеристической системы.

Если при $A = 0$, кроме точек (2.12), рассмотреть какие-нибудь другие точки (α, β) — решения характеристической системы, то можно обнаружить, что через каждую такую точку проходит единственная ветвь характеристической системы, однако изучение этих ветвей не дает никаких новых собственных значений.

Рассмотрим какую-либо ветвь (2.14). Пусть при изменении A в промежутке $0 < A \leq A'$ рассматриваемая ветвь существует и не пересекается ни с какими другими ветвями характеристической системы. Так как $A' > 0$, то $\alpha \neq 0$ в окрестности

точки $(\alpha_m' = \alpha_m(A'), \beta_m' = \beta_m(A'))$ [см. (2.8)]. В окрестности этой точки из уравнения (2.8) найдем

$$\beta = \sqrt{\frac{A}{4\alpha} + \alpha^2} \quad (2.15)$$

Подставив (2.15) в уравнение (2.9), получим уравнение $F(A, \alpha) = 0$, левая часть которого в окрестности точки (A', α_m') есть аналитическая функция своих аргументов. В самой точке (A', α_m') выполняются соотношения $F(A', \alpha_m') = 0$, $F(A', \alpha) \neq 0$, $F_\alpha(A, \alpha_m') \neq 0$. Выполнение этих соотношений и аналитичность $F(A, \alpha)$ являются достаточными условиями для применения леммы Вейерштрасса [3] (стр. 137). По этой лемме в окрестности точки (A', α_m') существует представление

$$F(A, \alpha) = [(\alpha - \alpha_m')^r + (\alpha - \alpha_m')^{r-1} f_1(A) + \dots + f_r(A)] \Phi(A, \alpha) \quad (2.16)$$

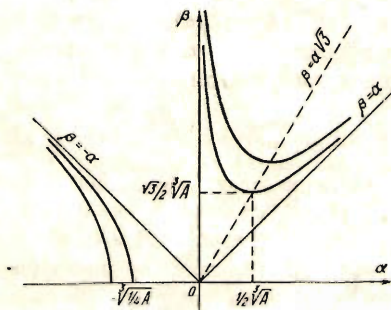
где r — целое неотрицательное число, $f_i(A)$ — аналитические функции, обращающиеся при $A = A'$ в нуль, а $\Phi(A, \alpha)$ — аналитическая функция своих аргументов, не обращающаяся в нуль в окрестности точки (A', α_m') . Из представления (2.16) вытекает, что в окрестности точки (A', α_m') уравнение $F(A, \alpha) = 0$ эквивалентно уравнению

$$(\alpha - \alpha_m')^r + (\alpha - \alpha_m')^{r-1} f_1(A) + \dots + f_r(A) = 0 \quad (2.17)$$

При вещественном $A \leq A'$ в окрестности точки (A', α_m') существует единственная ветвь (2.14), откуда следует равенство $r = 1$. Теперь из (2.17), (2.15) находим $\alpha = \alpha_m' - f_1(A) = \alpha_m(A)$, $\beta = \beta_m(A)$. Полученные функции определяют в окрестности точки (α_m', β_m') единственную аналитическую кривую не только для значений

$A \leq A'$, но и для значений $A > A'$. Смысл предыдущих рассуждений состоит в том, что рассматриваемая ветвь, во-первых, не может прекратить свое существование при $A > A'$, если она существует при $A \leq A'$, и, во-вторых, не может «разветвиться», т. е. не может быть такого положения, чтобы при $A \leq A'$ в окрестности точки (α_m', β_m') существовала одна ветвь, а при $A > A'$ — две или больше ветвей.

Пусть $A'' > 0$ есть то значение величины A , при котором r различных ветвей характеристической системы имеют общую точку (α_m'', β_m'') . Проводя для окрестности точки (α_m'', β_m'') рассуждения, которые были выполнены для



Фиг. 3

окрестности точки (α_m', β_m') , обнаружим при помощи леммы Вейерштрасса, что ветви, существовавшие раздельно до пересечения (при $A < A''$), продолжают существовать раздельно в том же количестве r и после пересечения (при $A > A''$).

Доказанные свойства «неуничтожимости» ветвей характеристической системы легко переносятся на ветви $\lambda = \lambda_m(A)$ уравнения (2.4), получающиеся из ветвей (2.14) пересчетом по формуле (2.7).

Теперь введем на плоскости прямоугольные декартовы координаты α , β и, пользуясь вещественностью существенных ветвей (2.14) при малых вещественных A , приступим к выяснению вопроса об их расположении на плоскости α , β .

Исследования достаточно проводить в верхней половине плоскости α , β ввиду четности уравнений характеристической системы по β .

Линия $l_1(A)$, определяемая уравнением (2.8) при $A = 0$, состоит из трех прямых $\alpha = 0$, $\alpha = \beta$, $\alpha = -\beta$, а при $A \neq 0$ — из двух отдельных кусков, каждый из которых можно строить по точкам при помощи соотношения (2.15). На фиг. 3 показано расположение кривых $l_1(A)$ для трех возрастающих значений A .

С увеличением $A > 0$ кривые $l_1(A)$ перемещаются в первом квадранте вверх, а во втором квадранте влево.

Каково бы ни было $A > 0$, кривые $l_1(A)$ первого квадранта имеют асимптотами прямые $\alpha = 0$, $\alpha = \beta$, а кривые второго квадранта — прямую $\alpha = -\beta$.

Для дальнейшего полезно знать, как меняется величина $\lambda = (\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 - 3\alpha^2)$ вдоль кривой $l_1(A)$. Из (2.7), (2.8) получаем, что вдоль кривой $l_1(A)$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = -\frac{2}{\alpha} [(\beta^2 - 3\alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]$$

Значит, при движении по кривой $l_1(A)$ в первом квадранте справа налево (в сторону меньших α) величина λ возрастает.

При $A > 0$ точки пересечения кривой $l_1(A)$ с кривыми l_2 , определяемыми уравнением (2.9), будем нумеровать так, чтобы большему номеру m соответствовало меньшее $\alpha_m(A)$. Тогда вещественные собственные значения $\lambda_m(A)$ будут возрастать с ростом номера m .

Кривые $l_1(A)$ и $l_1(-A)$ симметричны относительно прямой $\alpha = 0$.

Для удобства исследования кривых l_2 уравнения (2.9) рассмотрим области Q_n , ограниченные отрезками прямых

$$\alpha = \beta, \quad \alpha = -\beta, \quad \beta = 2n\pi \quad (n=1, 2, \dots)$$

Область Q_1 — треугольная, [области Q_2, Q_3, \dots — трапецевидные (фиг. 4).

Непосредственно легко проверить, что на границе областей Q_n будет $F(\alpha, \beta) > 0$.

В каждой из областей Q_n при $A = 0$ в точках (2.12) берут начало две существенные ветви характеристической системы.

При любом значении скорости A в каждой из областей Q_n с достаточно большим номером n кривая $l_1(A)$ пересекает кривые l_2 точно в двух вещественных точках. При помощи (2.8), (2.9) выясняем, что эти точки с ростом номера n асимптотически приближаются к соответствующим точкам (2.12) существенных ветвей при $A = 0$, т. е.

$$\alpha_m(A) \rightarrow 0, \quad \beta_m(A) \rightarrow (m - \frac{1}{2})\pi \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

Отсюда при помощи формулы (2.7) выводим, что собственные значения $\lambda_m(A)$ для достаточно больших m вещественны; с ростом номера m они асимптотически приближаются к собственным значениям $\lambda_m(0)$ при $A = 0$.

Обозначим символом $Q_n(F < 0)$ ту часть области Q_n , где $F(\alpha, \beta) < 0$. Легко показать, что областям $Q_n(F < 0)$ принадлежат отрезки $\alpha = 0, \beta_{2n-1} < \beta < \beta_{2n}$ ($n=1, 2, \dots$), где β_m даются равенствами (2.12) (отрезки $\beta_1\beta_2, \beta_3\beta_4, \dots$ оси β на фиг. 4), отрезки $0 \leq \alpha \leq \beta/\sqrt{3}, \beta = (2n-1)\pi$ ($n=1, 2, \dots$), (отрезки $\gamma_1\gamma_1', \gamma_2\gamma_2', \dots$ на фиг. 4), а также отрезки $\beta = \alpha\sqrt{3}, \beta'_{2n-1} < \beta < \beta'_{2n}$ ($n=1, 2, \dots$), где β'_m даются равенствами

$$\beta'_1 = 1.6020, \quad \beta'_2 = 4.7123, \quad \beta'_3 = 7.8540, \quad \beta'_4 = 10.9956, \quad \beta'_m \approx (m - \frac{1}{2})\pi \quad (m=5, 6, \dots) \quad (2.18)$$

Последнее, например, следует из того, что вдоль прямой $\beta = \alpha\sqrt{3}$ левая часть уравнения (2.9)

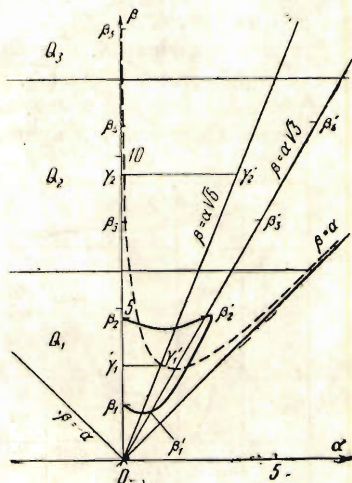
$$F(\beta/\sqrt{3}, \beta) = \frac{2}{3} e^{\beta/\sqrt{3}} (\cos \beta + \frac{1}{2} e^{-\beta\sqrt{3}})$$

обращается в нуль при значениях (2.18), будучи отрицательной в интервалах

$$\beta'_{2n-1} < \beta < \beta'_{2n}$$

Рассмотрим кривую $l_1(A)$, проходящую через точку γ_1' области $Q_1(F < 0)$ с координатами $(\pi/\sqrt{3}, \pi)$ (пунктирная кривая на фиг. 4). Соответствующее значение A равно $10\pi^3/3\sqrt{3}$.

При этом значении A , а также при любом значении A из промежутка $0 \leq A \leq 10\pi^3/3\sqrt{3}$ кривая $l_1(A)$ в каждой из областей Q_n пересекает отрезок $\gamma_n\gamma_n'$ области $Q_n(F < 0)$. Отсюда и из свойств неунуожимости следует, что при любом

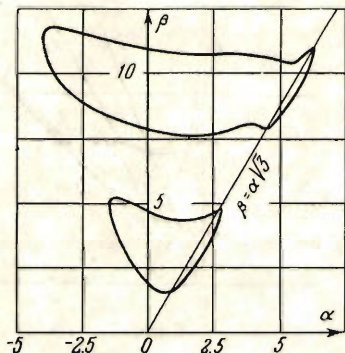


Фиг. 4

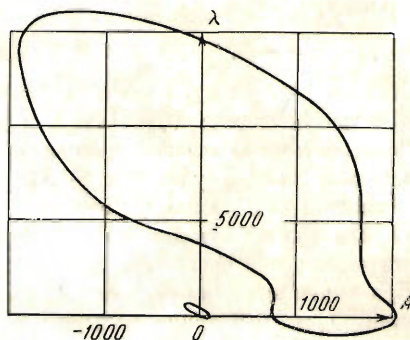
значении A из рассматриваемого промежутка кривая $l_1(A)$ в каждой из областей Q_n имеет в точности два различных вещественных пересечения с линиями l_2 . В областях Q_2, Q_3, \dots эти пересечения расположены левее прямой $\beta = \alpha\sqrt{3}$, и потому собственные значения $\lambda_m(A)$ при $m > 2$ все положительны.

В области Q_1 кривая $l_1(A)$ при значении $A = 10\pi^2/3\sqrt{6}$ пересекает отрезок $\beta_1'\beta_2'$ области $Q_1 (F < 0)$. Отсюда выводим, что любые точки отрезков $\beta_1\beta_2, \gamma_1\gamma_1', \beta_1'\beta_2'$, для которых $F(\alpha, \beta) < 0$, можно соединить между собой непрерывной кривой, не выходя за пределы области $Q_1 (F < 0)$. Значит, примыкающая к отрезкам $\beta_1\beta_2, \gamma_1\gamma_1', \beta_1'\beta_2'$ часть области $Q_1 (F < 0)$ в первом квадранте имеет качественно такой вид, как показано на фиг. 4.

Для тех значений A , при которых кривая $l_1(A)$ пересекает внутренние точки отрезка $\beta_1'\beta_2'$ прямой $\beta = \alpha\sqrt{3}$, собственные значения $\lambda_2(A), \lambda_3(A), \dots$ различны, вещественны и положительны, а первое собственное значение $\lambda_1(A)$ отрицательно (первая точка пересечения кривых $l_1(A)$ и l_2 расположена правее прямой $\beta = \alpha\sqrt{3}$).



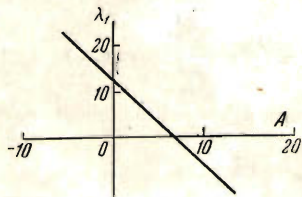
Фиг. 5



Фиг. 6

Через точки β_1', β_2' проходят кривые $l_1(A)$ со значениями $A = 6.33$ и $A = 161$. При любом A из промежутка $0 \leq A < 6.33$ все собственные значения основной краевой задачи различны, вещественны и положительны. При $A = 6.33$ все собственные значения различны, вещественны и, кроме λ_1 , положительны, а первое собственное значение равно нулю. При любом A из промежутка $6.33 < A < 161$ все собственные значения различны, вещественны и, кроме λ_1 , положительны, а первое собственное значение отрицательно.

Пусть A^* есть верхняя грань тех значений A , при которых кривая $l_1(A)$ имеет общие вещественные точки с областью $Q_1 (F < 0)$. В окрестности значения A^* при $A < A^*$ кривая $l_1(A)$ в области Q_1 имеет два различных вещественных пересечения с кривой l_2 , а при $A > A^*$ — ни одного вещественного пересечения. Вследствие неунуничтожимости в окрестности A^* при $A > A^*$ кривая $l_1(A)$ имеет два различных комплексных пересечения (точки первой и второй существенных ветвей характеристической системы становятся комплексными). Собственные значения $\lambda_1(A)$ и $\lambda_2(A)$ становятся комплексными сопряженными числами.



Фиг. 7

Результаты численных расчетов полностью подтверждают предыдущие выводы. При помощи представлений $\alpha = \alpha + C_1 F(\alpha, \beta)$ или $\beta = \beta + C_2 F(\alpha, \beta)$, где C_1, C_2 — отличные от нуля постоянные, методом последовательных приближений были найдены отдельные точки (α, β) кривых l_2 , расположенные в областях Q_1, Q_2 . Кривые l_2 , построенные по точкам, изображены на фиг. 5. Для тех же точек (α, β) , по которым построены кривые фиг. 5, при помощи формул (2.7), (2.8) найдены соответствующие точки (A, λ) и по ним построены кривые фиг. 6, дающие представление об изменении первых четырех собственных значений основной краевой

задачи с изменением скорости A . На фиг. 7 в более крупном масштабе показана часть фиг. 6 вблизи начала координат. В дополнение к фиг. 6, 7 приводим данные о поведении первых четырех собственных значений при различных значениях скорости A :

$0 \leq A < 6.33,$	$\lambda_1 > 0;$	$745 \leq A < 746,$	$\lambda_1 > 0$	(2.19)
$A = 6.33,$	$\lambda_1 = 0;$	$A = 746,$	$\lambda_1 = 0$	
$6.33 < A \leq 162,$	$\lambda_1 < 0;$	$746 < A \leq 2047,$	$\lambda_1 < 0$	
$162 < A < 745,$	вещественных λ_1 не обнаружено;	$2047 < A < * ,$	вещественных λ_1 не обнаружено	
$0 \leq A < 161,$	$\lambda_2 > 0;$	$777 < A < 1672,$	вещественных λ_2 не обнаружено	
$A = 161,$	$\lambda_2 = 0;$	$1672 \leq A < 2046.7,$	$\lambda_2 > 0$	
$161 < A \leq 162,$	$\lambda_2 < 0;$	$A = 2046.7,$	$\lambda_2 = 0$	
$162 < A < 745,$	вещественных λ_2 не обнаружено;	$2046.7 < A \leq 2047,$	$\lambda_2 < 0$	
$745 \leq A \leq 777,$	$\lambda_2 > 0;$	$2047 < A < * ,$	вещественных λ_2 не обнаружено	
$0 \leq A \leq 777,$	$\lambda_3 > 0;$	$1672 \leq A \leq 1688,$	$\lambda_3 > 0$	
$777 < A < 1672,$	вещественных λ_3 не обнаружено;	$1688 < A < * ,$	вещественных λ_3 не обнаружено	
$0 \leq A \leq 1688,$	$\lambda_4 > 0;$	$1688 < A < * ,$	вещественных λ_4 не обнаружено	

Звездочками * отмечены значения, которые нами не определялись.

Кратные собственные значения замечены в следующих случаях:

$A = 162,$	$\lambda_1 = \lambda_2 = -26;$	$A = 1672,$	$\lambda_2 = \lambda_3 = 3392$
$A = 745,$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 41;$	$A = 1688,$	$\lambda_3 = \lambda_4 = 5413$
$A = 777,$	$\lambda_2 = \lambda_3 = 902;$	$A = 2047,$	$\lambda_1 = \lambda_2 = -43$

3. Характер собственных движений для различных скоростей движения пластинки. Критическая скорость. При нулевом значении скорости A все собственные значения $\lambda_m(0)$ основной краевой задачи различны, вещественны и положительны, располагаясь на комплексной плоскости внутри параболы устойчивости, причем

$$\lambda_m(0) \rightarrow (m - \frac{1}{2})^4 \pi^4 \text{ при } m \rightarrow \infty$$

Комплексные частоты, за исключением, быть может, нескольких первых, даются формулами

$$\omega_m = p_m \pm iq_m, \quad p_m = -\frac{B}{2h\rho}, \quad q_m = \frac{1}{2h\rho} \sqrt{\frac{2h\rho D\lambda_m}{a^4} - B^2}$$

Все собственные движения имеют убывающую с течением времени амплитуду; если они имеют колебательный характер, то похожи на стоячие волны.

Какова бы ни была скорость $A \neq 0$, все собственные движения, соответствующие $\lambda_m(A)$ с достаточно большими номерами m , имеют такой же характер, какой они имели при $A = 0$. Это утверждение, вытекающее из асимптотического стремления $\lambda_m(A)$ к $\lambda_m(0)$ при $m \rightarrow \infty$, означает, другими словами, что высокочастотные колебания пластинки тем меньше искажаются встречным потоком газа, чем больше их частота.

Для любого значения скорости A из промежутка $0 \leq A < 6.33$ степень неустойчивости невозмущенного движения равна нулю. Все собственные движения имеют затухающую с течением времени амплитуду.

Для любого значения скорости A из промежутка $6.33 < A < 161$ степень неустойчивости невозмущенного движения равна единице. Одно из собственных движений, соответствующих первому собственному значению, имеет возрастающую с течением времени амплитуду; движение имеет характер неперидического отклонения от невозмущенного состояния и называется дивергентным движением или просто дивергенцией. Остальные собственные движения имеют затухающую с течением времени амплитуду. Промежуток $6.33 < A < 161$ принадлежит области неустойчивости невозмущенного движения.

Значение скорости $A = 6.33$, при переходе через которое степень неустойчивости невозмущенного движения меняется с нуля на единицу, назовем критическим. При $A = 6.33$ все собственные значения $\lambda_m(6.33)$ различны, вещественны и, кроме первого, положительны, а первое собственное значение равно нулю. Одно из собственных движений, соответствующих этому нулевому λ , есть движение пластинки с постоянным, не зависящим от времени прогибом $w(x)$. Остальные собственные движения имеют затухающую с течением времени амплитуду.

Для любого значения скорости A из промежутка $161 < A < 162$ все собственные значения $\lambda_m(A)$ основной краевой задачи различны, вещественны и, кроме $\lambda_1(A)$ и $\lambda_2(A)$, положительны, а первые два собственных значения отрицательны; степень неустойчивости невозмущенного движения равна двум. Два независимых собственных движения имеют характер неперидических отклонений от невозмущенного состояния, т. е. характер дивергенции. Остальные собственные движения имеют затухающую с течением времени амплитуду. Промежуток $161 < A < 162$ принадлежит области неустойчивости невозмущенного движения.

Значение скорости $A = 161$, при переходе через которое степень неустойчивости невозмущенного движения возрастает с единицы до двух, назовем также критическим. При $A = 161$ все собственные значения $\lambda_m(161)$ основной краевой задачи различны, вещественны и, кроме $\lambda_1(161)$ и $\lambda_2(161)$, положительны; первое собственное значение отрицательно, а второе равно нулю. Значение $A = 161$ принадлежит области неустойчивости невозмущенного движения.

Для любого значения A из промежутка $162 \leq A \leq 745$ собственные значения $\lambda_3(A)$, $\lambda_4(A)$, ... различны, вещественны, положительны и расположены на комплексной плоскости внутри параболы устойчивости; степень неустойчивости определяется поведением $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$.

При $A = 162$ два первых собственных значения основной краевой задачи совпадают, $\lambda_1(162) = \lambda_2(162) = -26$. В окрестности $A = 162$ при $A > 162$ собственные значения $\lambda_1(A)$ и $\lambda_2(A)$ являются комплексными сопряженными числами, расположенными на комплексной плоскости за пределами параболы устойчивости. В этой окрестности, принадлежащей области неустойчивости невозмущенного движения, степень неустойчивости попрежнему, как и в промежутке $161 < A < 162$, равна двум, однако

собственные движения с возрастающей амплитудой, соответствующие собственным значениям $\lambda_1(A)$ и $\lambda_2(A)$, имеют иной характер, обнаруживая теперь сходство с волнами, бегущими по флагу в ветреную погоду. Такие волнообразные движения с возрастающей амплитудой называют флаттерными движениями или просто флаттером.

Итак, при переходе скорости A через значение $A = 162$ дивергенция пластинки сменяется флаттером.

При $A = 745$ два первых собственных значения основной краевой задачи опять совпадают, $\lambda_1(745) = \lambda_2(745) = 41$. В окрестности $A = 745$ при $A < 745$ собственные значения $\lambda_1(A)$ и $\lambda_2(A)$ являются комплексными сопряженными числами, расположенными на комплексной плоскости внутри параболы устойчивости. В этой окрестности степень неустойчивости невозмущенного движения равна нулю.

При некотором критическом значении A из интервала $162 < A < 745$ степень неустойчивости невозмущенного движения меняется с двух до нуля; флаттерные собственные движения сменяются движениями с затухающей амплитудой.

Степень неустойчивости невозмущенного движения остается равной нулю также в промежутке $745 < A < 746$, так как для любого значения A из этого промежутка все собственные значения основной краевой задачи различны, вещественны и положительны, располагаясь на комплексной плоскости внутри параболы устойчивости.

Исследование особенностей собственных движений для других областей (2.19) изменения скорости A не представляет затруднений, и мы его опускаем.

В рассматриваемой задаче существует бесконечно много критических значений приведенной скорости A , при переходе через которые меняется степень неустойчивости невозмущенного движения. Например, каждой точке (2.18) прямой $\beta = \alpha \sqrt{3}$ соответствует согласно (2.8) свое критическое значение приведенной скорости $A_m = 8 \beta_m^{1/3} / 3 \sqrt{3}$ ($m = 1, 2, \dots$), причем любой из интервалов $A_{2m-1} < A < A_{2m}$, $m = 1, 2, \dots$, заведомо принадлежит области неустойчивости невозмущенного движения.

Наибольший интерес представляет первое, наименьшее критическое значение приведенной скорости $A_1 = 6.33$. Предполагая, что приведенная скорость A связана со скоростью c невозмущенного движения пластинки формулой (1.4), найдем наименьшую критическую скорость:

$$c_k = 0.264 \frac{c_0}{p_0 \kappa} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{2h}{a} \right)^3 \quad (3.1)$$

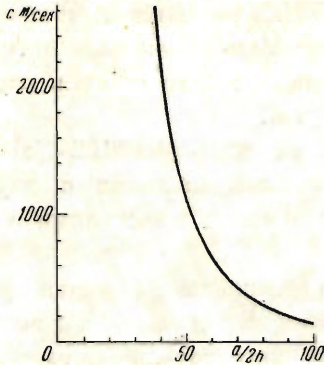
В качестве примера рассмотрим стальную пластинку с упругими постоянными $E = 2.1 \cdot 10^{10}$ кг/м², $\nu = 0.3$, движущуюся в газе, состояние которого характеризуется постоянными $\kappa = 1.4$, $p_0 = 10^3 \cdot 10^2$ кг/м², $c_0 = 340$ м/сек (воздух на уровне моря при температуре 15°). Расчет по формуле (3.1) дает

$$c_k = 143 \cdot 10^6 \left(\frac{2h}{a} \right)^3 \text{ м/сек} \quad (3.2)$$

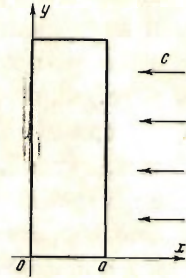
Для различных значений величины $a/2h$ по формуле (3.2) были подсчитаны значения c_k . Результаты представлены на фиг. 8.

На фиг. 5, 6 наряду с кривыми в первом квадранте изображены кривые во втором квадранте, соответствующие отрицательным значениям величины A , т. е. невозмущенному движению пластинки в направлении, противоположном тому, которое было принято вначале. Для такого невозмущенного движения пластинки в обратном направлении в промежутке $0 \leq -A < 135$ не удалось обнаружить никакого критического значения скорости. Для $A = -135$ первые два собственных значения основной краевой задачи совпадают $\lambda_1(-135) = \lambda_2(-135) = 649$. При дальнейшем увеличении модуля скорости A собственные значения $\lambda_1(A)$ и $\lambda_2(A)$ становятся комплексными сопряженными числами. Возможно, что при некоторой скорости $-A > 135$ они выходят за пределы параболы устойчивости, и тогда наступает флаттер.

При вычислении критической скорости c_k мы считали, что приведенная скорость A связана с характеристиками пластинки, газа и скоростью



Фиг. 8



Фиг. 9

невозмущенного движения c формулой (1.4). Полученные результаты можно применить для случаев более общей зависимости приведенной скорости A от ее аргументов, принимая, например, для A выражение

$$A = \frac{2a^3 p_0 \times c}{D c_0} \frac{c / c_0}{\sqrt{(c / c_0)^2 - 1}} \quad (3.3)$$

Нами рассмотрена пластинка бесконечного размаха. Результаты, повидимому, можно отнести также к прямоугольным пластинкам, у которых размер по оси y в несколько раз больше размера по оси x . Такие консоли легко продуть в искусственно создаваемом потоке, направляя его от свободного к заземленному краю пластинки (фиг. 9). Установив постоянную сверхзвуковую скорость c и увеличивая постепенно размер a обтекаемой части пластинки вплоть до ее поломки, можно применить затем (1.4), (3.3) или какое-либо другое выражение для A , чтобы сравнить теоретические результаты с экспериментальными.

Поступила 31 XII 1955

Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.
2. Маркушевич А. П. Теория аналитических функций. Гостехиздат, 1950.
3. Фукс Б. А. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. Гостехиздат, 1948.