

ОБТЕКАНИЕ ТОНКИХ ТЕЛ В ТРЕХМЕРНОМ ПОТОКЕ

М. Д. Хаскинд

(Одесса)

Методами теории потенциала устанавливается сингулярное интегро-дифференциальное уравнение для плоской изогнутой несущей линии в трехмерном потоке безграничной и невесомой жидкости, которое при использовании методов линейной теории воли обобщается на случай движения тонких тел в тяжелой жидкости. Плоскость, в которой лежит рассматриваемая изогнутая несущая линия, перпендикулярна к скорости потока. Другой случай плоской изогнутой несущей линии, лежащей в одной плоскости со скоростью потока, рассматривался А. А. Дородницыным [5].

Применение методов теории потенциала позволяет получить уравнение для изогнутой несущей линии, при этом выясняются те допущения, с которыми связан вывод этого уравнения. Даются решения этого уравнения для изогнутой несущей линии в форме полукольца при малых и больших числах Фруда, а также устанавливается приближенное решение с учетом числа Фруда для полностью погруженной в тяжелую жидкость вертикальной прямолинейной несущей линии.

Применение этих методов позволило Кюсснеру [1,2] установить обобщенное интегро-дифференциальное уравнение Праудтля для прямолинейной несущей линии в случае нестационарного потока.

§ 1. Рассмотрим установившееся движение со скоростью v тонкого изогнутого крыла в безграничной и невесомой жидкости. Пусть крыло изогнуто по размаху так, как указано на фиг. 1, где n — положительное направление нормали, ось x совпадает с направлением скорости v и система координат неизменно связана с крылом. Пусть далее жидкость является идеальной и несжимаемой, тогда для определения потенциала скоростей $\varphi(x, y, z)$ имеем условие обтекания

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n \text{ на } S \quad (1.1)$$

где v_n — нормальная составляющая скорости точек тонкого крыла, которая в линеаризированной теории имеет вид (α — угол атаки):

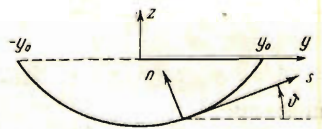
$$v_n = -v\alpha \quad (1.2)$$

Наряду с условием (1.1) имеем дополнительные условия, вытекающие из рассмотрения линеаризированного выражения для давления в жидкости:

$$p - p_0 = \rho v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.3)$$

Здесь p_0 — давление в невозмущенной жидкости, а ρ — ее плотность.

В силу непрерывности давления вне поверхности S считаем, что горизонтальная составляющая скорости $\partial \varphi / \partial x$ всюду непрерывна вне



Фиг. 1

поверхности S , и так как на далеких расстояниях впереди крыла жидкость покоится, то примем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi = 0 \quad (1.4)$$

При переходе через поверхность S функция $\partial\varphi/\partial x$ претерпевает скачок. Введем обозначение

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_- - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_+ = \gamma \quad (1.5)$$

Очевидно, что функцию $\partial\varphi/\partial x$ можно представить при помощи распределения диполей на поверхности S :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \gamma(Q) \frac{\partial}{\partial n_q} \left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (1.6)$$

где r — расстояние между точкой $P(x, y, z)$ и точкой $Q(\xi, \eta, \zeta)$ поверхности S , т. е.

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

и дифференцирование в (1.6) производится по нормали в точке Q :

$$\frac{\partial}{\partial n_q} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{(y - \eta) \cos(n, \eta) + (z - \zeta) \cos(n, \zeta)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} \quad (1.7)$$

Интегрируя (1.6) и принимая во внимание (1.4) и (1.7), будем иметь

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \gamma(Q) \int_{-\infty}^x \frac{(y - \eta) \cos(n, \eta) + (z - \zeta) \cos(n, \zeta)}{[(t - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} dt dS. \quad (1.8)$$

При помощи подстановки

$$t - \xi = v \sqrt{(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

и последующего интегрирования выражение (1.8) принимает более простой вид:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \gamma(Q) \frac{\partial \ln r_0}{\partial n_q} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\right) dS \quad (1.9)$$

$$r_0 = \sqrt{(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \quad u = \frac{x - \xi}{\sqrt{(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \quad (1.10)$$

Вычислим теперь нормальную составляющую скорости жидкости в точках $P(x, y, z)$ поверхности S . Имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_p} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_p} \left[\iint_S \gamma(Q) \frac{\partial \ln r_0}{\partial n_q} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\right) dS \right] \quad (1.11)$$

Так как функция $\ln r_0$ является гармонической, то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln r_0}{\partial n_q} &= -\frac{\partial\theta}{\partial l}, & \frac{\partial \ln r_0}{\partial l} &= \frac{\partial\theta}{\partial n_q} \\ \frac{\partial \ln r_0}{\partial n_p} &= -\frac{\partial\theta}{\partial s}, & \frac{\partial \ln r_0}{\partial s} &= \frac{\partial\theta}{\partial n_p} \end{aligned} \quad \left(\theta = \arctg \frac{z - \zeta}{y - \eta}\right) \quad (1.12)$$

где s и l — дуговые координаты точек (y, z) и (η, ζ) .

Пользуясь этими соотношениями и интегрируя в (1.11) по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial n_p} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_p} \left[\int_{-x_0(l)}^{x_0(l)} \gamma(Q) \theta \left(1 - \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\right) d\xi \right]_{l=0}^{l=L} - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_p} \left[\iint_S \theta \frac{\partial}{\partial l} \left(\gamma(Q) \left(1 - \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\right) \right) dl d\xi \right] \end{aligned}$$

Здесь $2x_0$ — хорда крыла, а L — его размах, отсчитываемый по дуге.

Пусть изогнутое крыло имеет большое удлинение, тогда для большинства точек крыла u представляет собой малую величину, которой можно пренебречь.

Учитывая еще соотношения (1.12), можем предыдущее выражение упростить и представить в следующем виде:

$$v_n(s) = \left[\frac{1}{4\pi} \Gamma(l) \frac{\partial \ln r_0}{\partial s} \right]_{l=0}^{l=L} - \frac{1}{4\pi} \int_0^L \frac{\partial \ln r_0}{\partial s} \frac{d\Gamma}{dl} dl \quad (1.13)$$

где $\Gamma(l)$ представляет собой величину циркуляции вокруг крыла:

$$\Gamma(l) = \int_{-x_0(l)}^{x_0(l)} \gamma(Q) dz \quad (1.14)$$

Первое слагаемое в (1.13) отождествляем с соответствующим значением для $v_n^\circ(s)$ в случае плоской задачи:

$$v_n^\circ(s) = - \frac{\Gamma(s)}{2\pi x_0(s)}$$

Второе же слагаемое в (1.13) дает поправку на конечность размаха. Следовательно, имеем

$$v_n(s) = - \frac{\Gamma(s)}{2\pi x_0(s)} - \frac{1}{4\pi} \int_0^L \frac{\partial \ln r_0}{\partial s} \frac{d\Gamma}{dl} dl \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) можно представить в более удобном виде. Для этого введем в рассмотрение угол $\vartheta(s)$, образуемый между направлением касательной в точке s и осью y (фиг. 1), тогда получаем следующее окончательное интегральное уравнение для произвольно изогнутой несущей линии:

$$v_n(s) = - \frac{\Gamma(s)}{2\pi x_0(s)} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \int_0^L \frac{e^{i\vartheta(s)}}{(\eta - y) + i(\zeta - z)} \frac{d\Gamma}{dl} dl \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (1.16)$$

Для широкого класса форм крыла решение этого типа сингулярных интегральных уравнений осуществляется эффективными методами [3].

§ 2. Выясним теперь характер несущих свойств тонких тел, находящихся в трехмерном потоке тяжелой жидкости. В этом случае потенциал скоростей $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет дополнительному граничному условию

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \left(\mu = \frac{g}{v^2} \right) \quad (2.1)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Из условия (2.1) следует, что несущие свойства тонких тел обусловлены величиной числа Фруда $F = v / \sqrt{gc}$ (c — характерный линейный размер). В предельных случаях граничное условие (2.1) имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } F = 0 \quad (2.2)$$

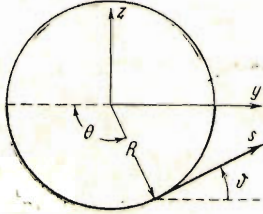
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } F = \infty \quad (2.3)$$

Условия (2.2) и (2.3) позволяют продолжить функцию $\varphi(x, y, z)$ в верхнее полупространство соответственно четным и нечетным образом.

Поэтому для изогнутой несущей линии интегральное уравнение (1.16) в предельных случаях имеет вид:

$$v_n(s) = -\frac{\Gamma(s)}{2\pi x_0(s)} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \int_0^{L+L^\circ} \frac{e^{i\theta(s)}}{\eta - y + i(\zeta - z)} \frac{d\Gamma}{dl} dl \quad (2.4)$$

где L° — зеркальное отражение изогнутой несущей линии в верхнем полупространстве, причем



Фиг. 2

$$v_n(s_1) = v_n(s_2), \quad \Gamma(s_1) = \Gamma(s_2) \quad \text{при } F = 0 \quad (2.5)$$

$$v_n(s_1) = -v_n(s_2), \quad \Gamma(s_1) = -\Gamma(s_2) \quad \text{при } F = \infty \quad (2.6)$$

Здесь s_1 и s_2 — симметричные относительно плоскости $z = 0$ точки линии $L + L^\circ$.

Для того чтобы иметь некоторое представление о значениях $\Gamma(s)$ в этих предельных случаях, рассмотрим простейшее крыло в форме полукольца постоянной ширины $2x_0$, радиуса R и с центром, совпадающим с началом координат (фиг. 2). Пользуясь полярными координатами (фиг. 2), можем представить уравнение (2.4) в следующей форме:

$$\frac{4R}{x_0} \Gamma(\theta) + \int_0^{2\pi} \operatorname{tg}(\xi - \theta) \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi = 8\pi R v \alpha(\theta) \quad (2.7)$$

при этом $\Gamma(\theta)$ и $\alpha(\theta)$ удовлетворяют условиям

$$\Gamma(2\pi - \theta) = \Gamma(\theta), \quad \alpha(2\pi - \theta) = \alpha(\theta) \quad \text{при } F = 0 \quad (2.8)$$

$$\Gamma(2\pi - \theta) = -\Gamma(\theta), \quad \alpha(2\pi - \theta) = -\alpha(\theta) \quad \text{при } F = \infty \quad (2.9)$$

Ради простоты положим, что $\alpha(\pi - \theta) = \alpha(\theta)$. Тогда, очевидно, и $\Gamma(\theta)$ удовлетворяет такому же условию. Удовлетворяя еще условию (2.8), представим функцию $\Gamma(\theta)$ следующим тригонометрическим разложением:

$$\Gamma(\theta) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} \cos 2k\theta \quad (2.10)$$

тогда после подстановки в (2.7) имеем

$$\frac{4R}{x_0} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} \left[\frac{4R}{x_0} \cos 2k\theta - 2k \int_0^{\pi} \frac{\cos(k-1)u - \cos(k+1)u}{\cos u + \cos 2\theta} du \right] = 8\pi R v \alpha(\theta)$$

Пользуясь значением интеграла

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos ku}{\cos u - \cos \theta_0} du = \pi \frac{\sin k\theta_0}{\sin \theta_0} \quad (\theta_0 = \pi - 2\theta) \quad (2.11)$$

находим

$$\frac{4R}{x_0} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4R}{x_0} - 4\pi k (-1)^k \right) b_{2k} \cos 2k\theta = 8\pi R v \alpha(\theta) \quad (2.12)$$

Раскладывая далее $\alpha(\theta)$ в аналогичный тригонометрический ряд

$$\alpha(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} \cos 2k\theta \quad (2.13)$$

и сравнивая с (2.12), получаем выражения для коэффициентов b_{2k} :

$$b_0 = 2\pi x_0 v \alpha_0, \quad b_{2k} = \frac{2\pi R v \alpha_{2k}}{R/x_0 - \pi k (-1)^k} \quad (2.14)$$

Подъемная сила, действующая на крыло, определяется формулой

$$Z = \rho v R \int_0^\pi \Gamma(\theta) \sin \theta d\theta \quad (2.15)$$

и, следовательно, учитывая (2.10) и (2.14), находим выражение для Z :

$$Z = 4\pi \rho x_0 R v^2 \alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi \rho R^2 v^2 \alpha_{2k}}{[R/x_0 - (-1)^k \pi k] (4k^2 - 1)} \quad \text{при } F = 0 \quad (2.16)$$

В частности, для постоянного угла атаки $\alpha = \alpha_0$ из (2.16) получаем

$$Z = 4\pi \rho x_0 R v^2 \alpha_0 \quad (2.17)$$

совпадающее с расчетом по плоским сечениям.

Рассмотрим теперь второй предельный случай $F = \infty$. Из (2.9) следует, что разложение для $\Gamma(\theta)$ имеет вид¹:

$$\Gamma(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta \quad (2.18)$$

Соответствующая подстановка в (2.7) с использованием (2.9) дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4R}{x_0} + (-1)^k 4\pi k \right) a_{2k} \sin 2k\theta + \frac{4R}{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \sin (2k+1)\theta = 8\pi R v \alpha(\theta) \quad (2.19)$$

В соответствии с условием (2.9) представим функцию $\alpha(\theta)$ так:

$$\alpha(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin n\theta, \quad \alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \alpha(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (2.20)$$

Тогда из (2.19) и (2.20) находим

$$a_{2k} = \frac{2\pi R v \alpha_{2k}}{R/x_0 + (-1)^k \pi k}, \quad a_{2k+1} = 2\pi x_0 v \alpha_{2k+1} \quad (2.21)$$

В частности, при $\alpha = \text{const}$ из (2.20) и (2.21) имеем

$$\alpha_{2k} = 0, \quad \alpha_{2k+1} = \frac{4\alpha}{\pi(2k+1)}, \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k+1} = \frac{8x_0 v \alpha}{2k+1} \quad (2.22)$$

По формуле (2.15) находим следующее выражение для подъемной силы:

$$Z = \frac{\pi}{2} \rho v R a_1$$

а в случае $\alpha = \text{const}$ имеем

$$Z = 4\rho \pi x_0 R \alpha v^2$$

Таким образом, при $\alpha = \text{const}$ значения подъемной силы при $F = 0$ и $F = \infty$, действующей на крыло в форме полукольца, совпадают между собой и с расчетным значением по плоским сечениям, и лишь при α , меняющемся с изменением θ , эти значения различаются между собой.

¹ Здесь не пользуемся ограничением $\alpha(\pi - \theta) = \alpha(\theta)$.

Следует вместе с тем заметить, что для других форм изогнутых крыльев, вообще говоря, не будет иметь место указанное совпадение при $\alpha = \text{const}$.

Для получения обобщенного интегрального уравнения при любых F введем, как и раньше, функцию

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_- - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_+ = \gamma(Q) \quad (2.23)$$

и представим $\partial\varphi/\partial x$ в форме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \gamma(Q) \frac{\partial}{\partial n_q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) dS + \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} \quad (2.24)$$

где $\varphi_0(x, y, z)$ — гармоническая функция в нижнем полупространстве, а

$$r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial n_q} = \frac{\partial}{\partial\eta} \cos(n, \eta) + \frac{\partial}{\partial\zeta} \cos(n, \zeta) \quad (2.25)$$

На основании условия (2.1) имеем соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right) = -\frac{\mu}{2\pi} \iint_S \gamma(Q) \frac{\partial^2}{\partial n_q \partial z} \left(\frac{1}{r'}\right) dS \quad (2.26)$$

которое справедливо во всем нижнем полупространстве.

В дальнейшем воспользуемся интегральным представлением

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\infty} e^{k[z+\zeta+i(x-\xi)\cos\theta+i(y-\eta)\sin\theta]} dk d\theta \quad (z+\zeta < 0) \quad (2.27)$$

Тогда из (2.26) находим

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_S \gamma(Q) \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\infty} \frac{k k_0}{k - k_1} \frac{\partial}{\partial n_q} e^{k\omega} dk d\theta dS \quad (2.28)$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= z + \zeta + i(x - \xi) \cos \theta + i(y - \eta) \sin \theta \\ k_0 &= \mu \sec^2 \theta, \quad k_1 = k_0 - i\beta_0 \sec \theta \end{aligned} \quad (2.29)$$

причем β_0 представляет собой приведенный (разделенный на v) коэффициент фиктивных диссипативных сил, который при получении окончательного решения следует устремить к нулю.

Из соотношений (2.24), (2.27) и (2.28) имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \gamma(Q) \left[\frac{\partial}{\partial n_q} \left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\infty} \frac{k + k_0}{k - k_1} \frac{\partial e^{k\omega}}{\partial n_q} dk d\theta \right] dS \quad (2.30)$$

Отсюда, интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{4\pi} \iint_S \gamma(Q) \frac{\partial \ln r_0}{\partial n_q} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) dS + \frac{1}{2\pi^2} \text{Re} \left\{ \iint_S \gamma(Q) \times \right. \\ &\times \left. \int_0^{+\pi} \int_0^{\infty} \frac{k + k_0}{i \cos \theta (k - k_1)} \frac{\partial}{\partial (kn_q)} [e^{k(z+\zeta+i(x-\xi)\cos\theta)} \cos(k(y-\eta)\sin\theta)] dk d\theta dS \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

где r_0 и u определяются соотношениями (1.10).

Пользуясь выражением (2.31), вычислим нормальную составляющую скорости. Имеем

$$v_n = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \gamma(Q) \frac{\partial}{\partial n_q} \left[\frac{\partial \ln r_0}{\partial n_q} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) \right] dS + v_{ng} \quad (2.32)$$

где

$$v_{ng} = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \gamma(Q) \int_0^{1/2\pi} \int_0^\infty \frac{k(k+k_0)}{i \cos \theta (k-k_1)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2}{\partial (kn_p) \partial (kn_q)} [e^{k(z+\zeta+i(x-\xi) \cos \theta)} \cos(k(y-\eta) \sin \theta)] dk d\theta dS \right\} \quad (2.33)$$

Рассмотрим произвольно изогнутую несущую линию. В этом случае в точках поверхности крыла пренебрегаем изменениями $x-\xi$ по сравнению с изменениями $z+\zeta$ и $y-\eta$ и тогда, устремляя в (2.33) β_0 к нулю, найдем

$$v_{ng} = -\frac{1}{\pi} \iint_S \gamma(Q) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k_0^2}{\cos \theta} \frac{\partial^2}{\partial (k_0 n_p) \partial (k_0 n_q)} [e^{k_0(z+\zeta)} \cos(k_0(y-\eta) \sin \theta)] d\theta dS \quad (2.34)$$

Осуществляя в (2.32) аналогичные приближения, получим

$$v_n(s) = v_n^0(s) + \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \int_0^l \frac{e^{i\theta(s)}}{(\eta-y) + i(\zeta-z)} \frac{d\Gamma}{dl} dl + v_{ng} \quad (2.35)$$

где $v_n^0(s)$ — значение нормальной скорости соответствующей плоской задачи, которое определяем в виде

$$v_n^0(s) = -\frac{\Gamma(s)}{2\pi x_0(s) f} \quad (2.36)$$

причем функция f зависит от числа Фруда $F = v/\sqrt{2gx_0}$, от относительного погружения несущего элемента $h/2x_0$ и от угла наклона $\theta(s)$. Если несущий элемент достаточно глубоко погружен, то $f=1$. Для слабо изогнутой несущей линии можно пренебречь зависимостью f от $\theta(s)$ и отождествить значения $f(F, h/2x_0)$ с соответствующими значениями, вытекающими из решения плоской задачи [4].

В качестве примера рассмотрим полностью погруженную вертикальную прямолинейную несущую линию длины $2l$. В этом случае из (2.34)

$$v_{ng} = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{d\Gamma}{d\zeta} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{k_0 \sin^2 \theta}{\cos \theta} e^{-2k_0 h(1-\lambda)} d\theta d\zeta \quad (2.37)$$

$$\lambda = \frac{z+\zeta}{2h}, \quad \Gamma(z) = \int_{-x_0(z)}^{x_0(z)} \gamma(x, z) dx \quad (2.38)$$

Здесь h — глубина погружения середины несущей линии. Полагая $1/\cos \theta = \operatorname{ch} u$ и пользуясь представлением функций Бесселя

$$K_n(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} v} \operatorname{ch} nv dv \quad (2.39)$$

окончательно находим

$$v_{ng} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{d\Gamma}{d\zeta} e^{-\mu h(1-\lambda)} \{K_1[\mu h(1-\lambda)] - K_0[\mu h(1-\lambda)]\} d\zeta \quad (2.40)$$

В связи с полным погружением несущей линии полагаем в (2.36) $f=1$ и тогда уравнение (2.35) принимает вид:

$$v_n(z) = -\frac{\Gamma(z)}{2\pi x_0(z)} + \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{d\Gamma}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta-z} + v_{ng}(z) \quad (2.41)$$

Пусть $h \gg l$, т. е. $|\lambda| \ll 1$, тогда из (2.40) в качестве первого приближения находим

$$v_{ng} = -\frac{\mu^2}{8\pi\lambda_0} e^{-\lambda_0} K_1(\lambda_0) \int_{-l}^{+l} \Gamma(\zeta) d\zeta \quad (\lambda_0 = \mu h) \quad (2.42)$$

Рассмотрим, в частности, плоское крыло ($\alpha = \text{const}$) эллиптической формы в плане с малой полуосью, равной a . Полагая

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta, \quad z = -l \cos \theta, \quad x_0(z) = a \sin \theta \quad (2.43)$$

и подставляя (2.42) и (2.43) в (2.41), получаем, что при $\alpha = \text{const}$

$$A_1 = \frac{4lv\alpha}{1 + \kappa + N}, \quad \kappa = \frac{2l}{\pi a}, \quad A_n = 0 \quad (n > 1), \quad N = \frac{(\mu l)^2}{4\lambda_0} e^{-\lambda_0} K_1(\lambda_0) \quad (2.44)$$

Здесь 2κ — удлинение крыла. Таким образом, при $h \gg l$, для распределения циркуляции плоского эллиптического крыла в качестве первого приближения имеем

$$\Gamma(z) = \frac{4lv\alpha}{1 + \kappa + N} \sqrt{1 - \frac{z^2}{l^2}} \quad (2.45)$$

В случае же движения эллиптического крыла в безграничной жидкости распределение циркуляции определяется в виде

$$\Gamma^*(z) = \frac{4lv\alpha}{1 + \kappa} \sqrt{1 - \frac{z^2}{l^2}} \quad (2.46)$$

Следовательно, для отношения безразмерных коэффициентов C_y боковой силы, действующей на крыло, находим

$$\frac{C_y}{C_y^*} = \frac{1 + \kappa}{1 + \kappa + N} \quad (2.47)$$

Формула (2.47) дает приближенное выражение зависимости этого отношения от числа Фруда $F = v/\sqrt{2gl}$, относительного погружения $\tau = h/l$ и удлинения крыла 2κ при $h > l$. В предельных случаях имеем

$$\frac{C_y}{C_y^*} = 1 \quad \text{при } F = 0, \quad \frac{C_y}{C_y^*} = \frac{1 + \kappa}{1 + \kappa + l^2/4h^2} < 1 \quad \text{при } F = \infty \quad (2.48)$$

Поступила 6 X 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. K ü s s n e r Н. G. Allgemeine Tragflächentheorie Luftfahrt-Forschung, Münch., Bd. XVII, S. 370—378, № 11-12, Dez. 10, 1940.
2. Н е к р а с о в А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. Изд. АН СССР, 1947.
3. В е к у а И. Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Праудтля. ПММ, т. IX, вып. 2, 1945.
4. К е л д ы ш М. В. и Л а в р е н т ь е в М. А. О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости. Труды конференции по теории волнового сопротивления. Изд. ЦАГИ, 1937.
5. Д о р о д н и ц ы н А. А. Обобщение теории несущей линии на случай крыла с изогнутой осью и осью, не перпендикулярной потоку. ПММ, т. VIII, вып. 1, 1944.