Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЕЙ ПОТОКОМ ДОЗВУКОВОЙ СКОРОСТИ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗОНОЙ, ОКАНЧИВАЮЩЕЙСЯ ПРЯМЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

Ф. И. Франкль

(Фрунзе)

В экспериментальной работе Буземана [1] было впервые показано, что при обтекании профилей с местными сверхзвуковыми зонами последние оканчиваются скачками уплотнения. Наличие сверхзвуковых зон без скачков уплотнения никогда не наблюдалось. Впоследствие А. А. Никольский и Г. И. Таганов [2] объяснили этот факт, показав, что такого рода течения при малейшем изменении обтекаемого контура становятся, вообще говоря, невозможными (см. в связи с этим также работу автора [3]).

Наконец, автору в недавней работе [4] удалось построить пример течения в канале, в котором имеется сверхзвуковая зона, оканчивающаяся вниз по течению прямым скачком уплотнения. При этом сверхзвуковая зона граничит только с одной стенкой канала, а скачок уплотнения тем самым оканчивается внутри течения [1].

На основании этого результата удается сформулировать краевую задачу, решение которой дает обтекание профиля потоком дозвуковой скорости в бесконечности, постоянной по величине и направлению, обтекание, обладающее указанными выше свойствами в окрестности обтекаемого контура; это относится как к случаю отсутствия, так и к случаю наличия циркуляции.

Доказательство существования и единственности решения этих задач, а также эффективное их решение должны быть предметом дальнейших исследований.

При постановке задачи мы будем пользоваться методом годографа; во избежание некоторых характерных трудностей, появляющихся, если допустить образования нулевых скоростей в точках разветвления потока на контуре (см. работы С. А. Христиановича и И. М. Юрьева [5, 6]), мы ограничимся случаем, когда эти точки разветвления являются точками возврата обтекаемого контура, так что скорость потока в этих точках остается отличной от нуля.

Для предварительной ориентировки напишем сперва решение задачи обтекания кругового цилиндра потоком несжимаемой жидкости методом годографа, причем будем рассматривать отдельно случаи отсутствия и наличия циркуляции.

Пусть z — комплексная координата, χ — комплексный потенциал и $w = d\chi / dz$ — комплексная скорость. Предположим, что на бесконечности w имеет действительное постоянное значение w_1. Радиус обтекаемого цилиндра обозначим через R, циркуляцию — через Γ.

В случае отсутствия циркуляции имеем

$$\chi = w_1\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \qquad w = w_1\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) \tag{1}$$

Отсюда после исключения z получим

$$\chi = Rw_1\sqrt{\frac{w_1}{w_1 - w}}\left(1 + \frac{w_1 - w}{w_1}\right) \tag{2}$$

---

[1] При этом оказалось существенным допустить наличие в сверхзвуковой зоне линию разрыва касательных скоростей, которая может быть ликвидирована учетом вязкости.

т. е. функция $\chi(w)$ имеет в точке w_1 степенную особенность порядка $(w-w_1)^{-1/2}$.

В случае наличия циркуляции имеем

$$\chi = w_1\left(z+\frac{R^2}{z}\right)+\frac{\Gamma^2}{2\pi i}\ln z, \qquad w = w_1\left(1-\frac{R^2}{z^2}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i z} \tag{3}$$

После исключения z получим

$$\chi = \frac{\Gamma w}{4\pi i\,(w-w_1)}+\frac{2w_1-w}{w-w_1}\sqrt{-\frac{\Gamma^2}{16\pi^2}-R^2 w_1(w-w_1)}+$$
$$+\frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\ln\left[\frac{\Gamma}{4\pi i}+\sqrt{-\frac{\Gamma^2}{16\pi^2}-R^2 w_1(w-w_1)}\right]-\ln(w-w_1)\right\} \tag{4}$$

Таким образом, функция $\chi(w)$ имеет в этом случае две особые точки. Одна из них находится при

$$w = w_2 = w_1 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 R^2 w_1} \tag{5}$$

Это — точка разветвления второго порядка, около которой функция $\chi(w)$ остается ограниченной.

Другая особая точка получается при $w=w_1$. В ее окрестности будет

$$\chi = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left[\frac{w_1}{w-w_1}-\ln(w-w_1)\right]+\ldots \tag{6}$$

Итак, в этой точке совмещены полюс и логарифмическая особенность. Коэффициенты при $(w-w_1)^{-1}$ и при $\ln(w-w_1)$ не являются независимыми, а должны быть соответственно $\Gamma w_1/2\pi i$ и $-\Gamma/2\pi i$. Как увидим ниже, эти соотношения существенны. Аналогичные соотношения имеют место также в случае сжимаемого газа при любой форме обтекаемого контура: в противном случае точка $w=w_1$ была бы точкой разветвления[1] функции $z(w)$.

Что касается точки разветвления w_2 функции $\chi(w)$, то она соответствует точке ускорения, равного нулю, и получается из условия

$$dw\,/\,dz = 0 \tag{7}$$

Будем в дальнейшем в случае $\Gamma \neq 0$ ограничиваться такими контурами, для которых в пределах потока существует точно одна точка нулевого ускорения, отличная от $z=\infty$; соответствующее значение w_2 будем считать заданным.

В случае $\Gamma = 0$ будем ограничиваться такими контурами, для которых единственной точкой нулевого ускорения является $z=\infty$, т. е. $w=w_1$. В этом случае наиболее простое решение получается для симметричного, симметрично обтекаемого профиля.

Перейдем к сжимаемому газу. Будем рассматривать сперва газ Трикоми-Фальковича[7], т. е. будем считать, что функция тока ψ удовлетворяет уравнению

$$\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=0 \tag{8}$$

где η — функция модуля скорости ($\eta \geqq 0$ при $|w| \leqq a^*$, a^* — критическая скорость), а θ — угол наклона скорости.

---

[1] См. в связи с этим работу С. А. Христиановича[5].

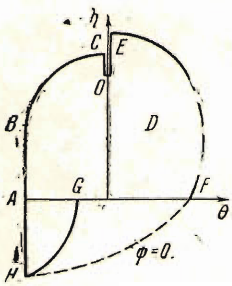
При этом предполагается существование потенциала скорости, что возможно, если пренебречь изменением удельной энтропии при прохождении линии тока через касательный разрыв и через скачок уплотнения.

Начнем с простейшего случая — симметричного обтекания симметричного профиля.

Для несжимаемой жидкости мы имели около точки

$$\chi(w) = \frac{c}{\sqrt{w - w_1}} + k\sqrt{w - w_1} \tag{9}$$

где c — действительная постоянная [см. уравнение (2)], т. е. если



Фиг. 1

$$w - w_1 = \rho e^{it} \tag{10}$$

то получим

$$\varphi + i\psi = c\rho^{-1/2}\left(\cos\tfrac{1}{2}t - i\sin\tfrac{1}{2}t\right) + O(\rho^{1/2})$$

$$\psi = -c\rho^{-1/2}\sin\frac{t}{2} + O(\rho^{1/2}) \tag{11}$$

Однако, если уравнения (8) переписать в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{3s}\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0 \qquad \left(s = \frac{2}{3}\eta^{3/2}\right) \tag{12}$$

и положить $\theta = \rho\sin t$, $s - s_1 = \rho\cos t$ вблизи точки годографа $s = s_1$, $\theta = 0$, то существуют решения уравнения (12) вида [7]

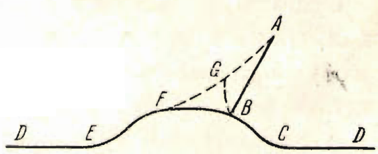
$$\psi = \rho^{-1/2}\sin\frac{1}{2}t + O(\rho^{1/2}) \tag{13}$$

Искомое решение должно при $s = s_1$, $\theta = 0$ иметь особенность вида (13). Остальные краевые условия задаются следующим образом.

Пусть непосредственно за скачком уплотнения на обтекаемом контуре имеем (фиг. 1)

$$\theta = \theta_A < 0, \qquad \eta = \eta_B > 0$$

$$\left(\eta_B < \sqrt[3]{\tfrac{9}{4}(\theta_F - \theta_A)^2}\right) \tag{14}$$



Фиг. 2

где θ_A, η_B заданы.

Тогда верхней половине течения соответствует область D плоскости $\theta\eta$, изображенная на фиг. 1, где AB соответствует задней (дозвуковой) стороне скачка уплотнения, AH — передней (сверхзвуковой) стороне скачка уплотнения, линия GH — характеристика уравнения (8), точка D соответствует скорости на бесконечности ($\theta = 0$, $\eta = \eta_1$), в этой точке должна иметь место особенность (13).

Точки C и E соответствуют передней и задней точкам возврата обтекаемого контура. Прямой отрезок FGA соответствует линии критических скоростей, а характеристика GH — линии возмущения, идущей в сверхвуковой зоне от точки H вверх по течению (фиг. 2).

На указанных частях границы области D должны иметь место следующие краевые условия:

$$\psi = 0 \qquad \text{на } BCDEF \tag{15}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{на } BAH \tag{16}$$

$$\psi(0, \eta) = \psi(0, -\eta) \qquad (0 < \eta < \eta_B) \tag{17}$$

$$\psi(\theta, 0) = f(\theta) \qquad \text{на } FG \tag{18}$$

где функция $f(\theta)$ задается.

Решение и вместе с этим обтекаемый полуконтур (E, F, $H = B$, C) определяются на основании краевых условий (13), (15) — (18) в области D. Условия (16), (17) вытекают из требования, чтобы скачок уплотнения HA был прямым (см. [14])[1]. Легко доказать, что при наличии особенности (13) в точке D полупрямые DE и CD лежат на одной прямой и тем самым получается обтекание конечного, симметричного профиля.

В самом деле, если в окрестности точки D плоскости θs ввести полярные координаты $\theta = \rho \sin t$, $s - s_1 = \rho \cos t$, то уравнения С. В. Фальковича [8] записываются в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = C\left(\tfrac{3}{2} s\right)^{1/3} \frac{\partial \psi}{\rho \partial t}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\rho \partial t} = -C\left(\tfrac{3}{2} s\right)^{1/3} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \qquad \left(C = \left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{1/(\varkappa-1)} (\varkappa+1)^{1/3}\right) \tag{19}$$

Теперь нужно доказать, что при интегрировании по окружности бесконечно малого радиуса ρ вокруг точки имеем

$$\oint (dy + i dy) = 0 \tag{20}$$

Обход точки D должен при этом быть двойным, чтобы получить полный обход профиля. Согласно известному соотношению С. А. Чаплыгина

$$\oint (dx + i dy) = \oint \frac{e^{i\theta}}{w}\left(d\varphi + i \frac{\sigma_0}{\sigma} d\psi\right)$$

(σ — плотность, σ_0 — плотность при нулевой скорости). Далее имеем на рассматриваемой окружности согласно (13)

$$d\psi = \tfrac{1}{2} \rho^{-1/2} \cos \tfrac{1}{2} t\, dt + O(\rho^{1/2}) dt$$

$$d\varphi = \tfrac{1}{2} C \left(\tfrac{3}{2} s_1\right)^{1/3} \rho^{-1/2} \sin \tfrac{1}{2} t\, dt + O(\rho^{1/2})\, dt$$

Но тогда

$$\oint (dx + i dy) = \frac{1}{w_1} \oint d\varphi + i \frac{\sigma_0}{\sigma_1 w_1} \oint d\psi + O(\rho^{1/2}) =$$

$$= \text{const} \int_0^{4\pi} \cos \tfrac{1}{2} t\, dt + i\, \text{const} \int_0^{4\pi} \sin \tfrac{1}{2} t\, dt + O(\rho^{1/2})$$

Отсюда вытекает равенство (20).

В то время как годографы дуг EF и BC нами заранее заданы, годограф дуги FH заранее не задан, а получается уже после решения задачи как геометрическое место точек квадранта $\theta > \theta_A$, $\eta < 0$, где $\psi = 0$ после продолжения решения в полуплоскость $\eta < 0$, что осуществляется однозначно в характеристическом треугольнике, опирающемся на отре-

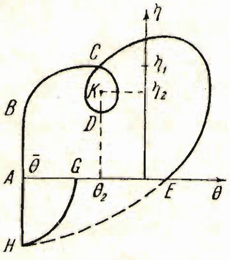
---

[1] Недавно Триллинг и Уокер [9] пытались дать решение подобной задачи, но они вовсе не учитывали условий на скачке уплотнения.

зок $\eta = 0$, $-(\theta_F - \theta_A) < \theta - \theta_A < \theta_F - \theta_A$. Существенно при этом, чтобы получилась связная дуга $\psi = 0$, связывающая точки F, H внутри названного характеристического треугольника. При каких условиях это выполнено — пока не выяснено; повидимому, здесь играет существенную роль выбор функции $f(\theta)$ [см. условие (1)].

На дуге FH плоскости (x, y) возникнут, вообще говоря, особенности того же типа, что в работе[4] автора, связанные с касательными разрывами в сверхзвуковой зоне.

Рассматриваемая краевая задача может быть приведена к линейному функциональному уравнению следующим образом. Задаемся сперва значениями $\tau(\theta) = \psi(\theta, 0)$ при $\theta_A < \theta < \theta_G$. Тогда решение может быть найдено в эллиптической области, в частности могут быть найдены значения $\psi(\theta_A, \eta)$ при $0 < \eta < \eta_B$, а также значения $\nu(\theta) = \psi_\eta(\theta, 0)$ при $\theta_A < \theta < \theta_G$. Но вследствие условия (17) мы знаем тогда также значения $\psi(\theta_A, \eta)$ при $-\eta_B < \eta < 0$. Но поскольку вследствие (17) мы имеем $\partial\psi / \partial\theta = 0$ на AH, мы можем решить задачу Коши и найти ψ также на характеристике AI, что вместе со значениями $\psi_\eta(\theta, 0)$ на AG дает возможность снова найти $\tau(\theta)$ $(\theta_A < \theta < \theta_G)$.



Фиг. 3

Таким образом, получается линейный оператор функции $\tau(\theta)$, который снова дает $\tau(\theta)$; существование и единственность решения этого функционального уравнения представляются вероятными.

Перейдем к случаю наличия циркуляции. В этом случае задача ставится (фиг. 3) в двулистной области $ABCDCEGHA$ над плоскостью (θ, η).

Здесь в заданной точке $\theta = \theta_2$, $\eta = \eta_2$ должна быть точка разветвления второго порядка K, а годограф обтекаемого контура описывает вокруг этой точки петлю CDC.

В точке разветвления значение $\psi(\theta_2, \eta_2)$ должно быть конечным.

Теперь заметим, что существуют фундаментальные решения уравнения (12) типа источника и типа диполя, вид которых соответственно будет

$$\psi_1 = \ln\rho + O(1), \qquad \psi_2 = \frac{\cos t}{\rho} + O(1) \tag{21}$$

По аналогии с уравнением (6) мы должны тогда в точке $(0, \eta)$ иметь особенность вида

$$\psi = \alpha\psi_2 + \beta\psi_1 = \alpha\frac{\cos t}{\rho} + \beta\ln\rho + O(1) \tag{22}$$

Коэффициенты при ψ_2 и ψ_1 определяются при этом требованием, чтобы было при обходе рассматриваемой особой точки

$$\oint d\varphi = \Gamma, \qquad \oint \frac{e^{i\theta}}{w}\left(d\varphi + i\frac{\sigma_0}{\sigma}d\psi\right) = 0 \tag{23}$$

Для вычисления коэффициентов α, β имеем

$$\oint \frac{e^{i\theta}}{w}\left(d\varphi_2 + i\frac{\sigma_0}{\sigma}d\psi_1\right) = \frac{1}{w_1}\oint\left(d\varphi_2 + i\frac{\sigma_0}{\sigma_1}d\psi_2\right) + \frac{i}{w_1}\oint\left(\theta\, d\varphi_2 + i\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\theta d\psi_2\right) +$$

$$+ \oint\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{w}\right)_{s=s_1}(s - s_1)\,d\varphi_2 + i\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma_0}{\sigma w}\right)_{s=s_1}(s - s_1)\,d\psi_2\right] + O(\rho)$$

В газе Трикоми-Фальковича имеем [7]

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma_0}{\sigma w}\right) = \left(\frac{3}{2}s\right)^{1/3}\frac{C}{w}, \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{C}\left(\frac{3}{2}s\right)^{-1/3}\frac{\sigma_0}{\sigma w}$$

Отсюда получим далее

$$\oint \frac{e^{i\theta}}{w}\left(d\varphi_2 + i\frac{\sigma_0}{\sigma}d\psi_2\right) = \text{const}\oint\frac{\cos t}{\rho}dt + i\,\text{const}\oint\frac{\sin t}{\rho}dt +$$
$$+ i\,\text{const}\oint \sin t\cos t\,dt + \frac{\sigma_0}{\sigma_1 w_1}\oint \sin^2 t\,dt + \frac{\sigma_0}{\sigma_1 w_1}\oint\cos^2 t\,dt +$$
$$+ i\,\text{const}\oint\sin t\cos t\,dt + O(\rho)$$

и окончательно

$$\oint\frac{e^{i\theta}}{w}\left(d\varphi_2 + i\frac{\sigma_0}{\sigma}d\psi_2\right) = 2\pi\frac{\sigma_0}{\sigma_1 w_1} \tag{24}$$

Далее

$$\oint\frac{e^{i\theta}}{w}\left(d\varphi_1 + i\frac{\sigma_0}{\sigma}d\psi_1\right) = \frac{1}{w_1}\oint d\varphi_1 + O(\rho) = -\frac{C}{w_1}\left(\frac{3}{2}s_1\right)^{1/3}\oint dt + O(\rho)$$

так что

$$\oint\frac{e^{i\theta}}{w}\left(d\varphi_1 + i\frac{\sigma_0}{\sigma}d\psi_1\right) = \frac{C}{w_1}\oint d\varphi_1 = -\frac{2\pi C}{w_1}\left(\frac{3}{2}s_1\right)^{1/3} \tag{25}$$

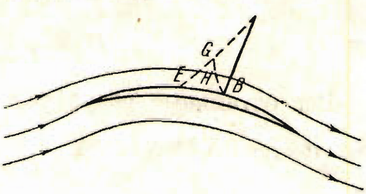
Но из (22) — (25) следует

$$\beta = -\frac{\Gamma}{2\pi C\,(^3/_2 s_1)^{1/3}}, \qquad \alpha = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sigma_2}{\sigma_0} \tag{26}$$

Данный результат относится, и к чисто дозвуковому обтеканию.

Кроме условия (23) и требования конечности функции ψ, в точке разветвления должны быть выполнены условия

$$\psi = 0 \quad \text{на } BCDCE, \qquad \partial\psi/\partial\theta = 0 \quad \text{на } BAH$$
$$\psi(0, \eta) = \psi(0, -\eta) \quad \text{на } BAH \tag{27}$$
$$\psi(\theta, 0) = f(\theta) \qquad \text{при } \theta_G < \theta < \theta_E \tag{28}$$



Фиг. 4

И в случае этой задачи получим для $\psi(\theta, 0)$ $(\theta_A < \theta < \theta_G)$ линейное функциональное уравнение того же типа, как и выше. В плоскости xy получится обтекание профиля вида, изображенного на фиг. 4.

Точки разветвления линий тока (т. е. передняя и задняя кромки профиля) будут соответствовать таким точкам линии $BCDCE$, в которых $\partial\psi/\partial\theta = \partial\psi/\partial\eta = 0$. Их появление неизбежно, так как в противном случае угол θ при обходе обтекаемого контура возрастал бы на 2π и не вернулся бы к первоначальному значению, как это имеет место по условиям задачи.

Следует отметить, что при таком задании условий задачи (как и в предыдущей задаче) не исключено частичное взаимное перекрытие «верхней половины» и «нижней половины» потока, т. е. областей $\psi > 0$ и $\psi < 0$. Это значит, что не при любых заданных годографах профиля, значениях η_1, η_2, θ_2, циркуляции Γ и функции $f(\theta)$ получится физически реальный профиль крыла.

Нужно также иметь в виду, что существование точки разветвления K при циркуляционном обтекании не обязательно: для некоторых профилей область $ABCDCEGHA$ плоскости (θ, η) может быть однолистной.

В случае бесциркуляционного обтекания несимметричного профиля задача отличается от предыдущей лишь тем, что имеется только одна особая точка, а именно точка разветвления второго порядка при $\theta = 0$, $\theta = \theta_1$ вида

$$\psi = \rho^{-1/2}\left(a \cos \frac{1}{2} + b \sin \frac{1}{2} t\right) + C + O\left(\rho^{1/2}\right) \tag{29}$$

Все сказанное выше легко переносится на произвольный газ, т. е. на уравнения С. А. Чаплыгина.

При этом третье условие (27) должно быть заменено условием

$$\psi(0, \eta) = \psi(0, \bar{\eta}) \qquad \text{на } BAH \tag{30}$$

где $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\eta)$ — значение величины η на противоположной стороне скачка.

Вместо уравнения (19) будем иметь уравнения Л. С. Лейбензона [10]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \sqrt{K} \frac{\partial \varphi}{\rho \partial t} \qquad \frac{\partial \varphi}{\rho \partial t} = -\sqrt{K} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \tag{31}$$

где K — функция С. А. Чаплыгина:

$$K = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2 (1 - M^2), \qquad s = \int_w^{a^*} \sqrt{1 - M^2} \frac{dw}{w} \qquad \left(M = \frac{w}{a}\right) \tag{32}$$

Тогда будет

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma_0}{\sigma w}\right) = \frac{\sqrt{K}}{w}, \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\sigma_0}{\sigma w} \tag{33}$$

Выкладки, аналогичные предыдущим, дают в случае циркуляционного течения вместо (36)

$$\beta = -\frac{\Gamma}{2\pi \sqrt{K_1}}, \qquad \alpha = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \tag{34}$$

Все остальные результаты остаются без изменения.

Поступила 21 XI 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Busemann A. Widerstand bei Geschwindigkeiten nahe der Schallgeschwindigkeit, Vortrag auf dem 3 internationalen Kongress für technische Mechanik, Stockholm, 1930
2. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.
3. Франкль Ф. И. К образованию скачков уплотнения в дозвуковых течениях с местными сверхзвуковыми скоростями. ПММ, т. XI, № 1, 1947.
4. Франкль Ф. И. Пример околозвукового течения газа с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.
5. Христианович С. А. Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях. Труды ЦАГИ, вып. 481, 1940.
6. Христианович С. А., Юрьев И. М. Обтекание профиля при докритической скорости потока. ПММ, т. XI, вып. 1, 1947.
7. Фалькович С. В. Об одном семействе сопел Лаваля. ПММ, т. XI, № 2, 1947.
8. Фалькович С. В. К теории сопел Лаваля. ПММ, т. X, № 4, 1916.
9. Trilling L., Walker K. On transsonic flow past a finite wedge. J. Math. and Phys., vol. 32, № 1, 1953
10. Лейбензон Л. С. О теории движения газов. ДАН, № 9, 1935.