Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОСНОВЫ ГАЗОДИНАМИКИ ВЗАИМНОПРОНИКАЮЩИХ ДВИЖЕНИЙ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

Х. А. Рахматулин

(Москва)

Движение пульпы, незастывшего бетона, зерн, воздуха, насыщенного пылью или парами, газированной нефти, коллоидного топлива, представляющего смесь мазута с углем, торфяных масс, глинистых растворов и т. д. могут служить примерами совместного движения механической смеси сред, состоящих из сравнительно мелких частиц.

При движении такого рода смеси с большими скоростями существенное значение имеет разница в скоростях отдельных сред, совершающих совместное движение. Поэтому для исследования этих движений необходимо создать «многоскоростную» гидро-газодинамику, аналогичную «двухскоростной» гидродинамике сверхтекучего гелия [1].

Ниже рассматриваемая теория предполагает, что размеры частиц l, участвующих в движении, значительно меньше, чем расстояние, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики потока.

Излагаемая теория от упомянутой теории[1] будет отличаться не только тем, что она приложима для смесей из многих компонент, но главным образом тем, что в ней без некоторых ограничений работы [1] строится замкнутая система уравнений за счет введения: функций взаимодействий, впервые рассмотренных в работе [2], и кинематических соотношений для пористой среды, которые здесь устанавливаются.

Наша теория по существу является обобщением теории фильтрации Н. Е. Жуковского и более приемлема для движений сред, состоящих из макрочастиц, чем для сред, частицы которых суть свободные молекулы. Движения газированной нефти, когда газ и жидкость имеют различные скорости, рассмотрены в работе [3], но в этой работе автор исходил из несколько других уравнений, чем наши, и рассмотрел медленную фильтрацию, где можно пренебречь инерционными членами.

Движения многофазных сред с точки зрения гидравлических сопротивлений в значительной степени изучены экспериментально в работах по нефтепромысловой механике, из которых укажем, например, [4]; но следует заметить, что в [4] обработка данных опытов ведется на основании других теоретических построений. Упомянутые опытные данные могут служить материалом для проверки нашей теории.

Предлагаемая теория позволит разработать методику экспериментального изучения быстрой фильтрации при больших давлениях. Из этих экспериментов можно будет для некоторых случаев определять неизвестные функции K_n, входящие в наши уравнения. Надо заметить, что в настоящее время настал момент, подходящий для полного развития теории движения смесей как по потребности этой теории для приложений, так и по возможностям исследований.

Современная электронная аппаратура позволяет вести эксперименты с волновыми явлениями, исследование которых часто позволит нам определять функции взаимодействия K_n. Также следует заметить, что электронные счетные машины позволят легко провести сложные расчеты, к которым сведутся математические задачи развиваемой теории.

В настоящей работе мы ограничиваемся приведением уравнения движения идеальных сред. Легко видеть, что аналогичные системы уравнений также могут быть написаны для вязких и упруго-пластических сред.

§ 1. Элементы кинематики однородно-изотропной пористой среды. Взаимнопроницающее движение двух или нескольких сред может быть рассматриваемо как движение их в пористой среде. Для любого из этих газов (сред) остальные будут являться пористой средой, в которой он движется. Поэтому для нас имеют существенное значение свойства пористой среды. Пусть единица объема содержит пустоты-поры объемом m_w. Это число m_w назовем объемной пористостью данной пористой среды. Аналогично через m_s обозначим площадь пор, приходящуюся на единицу поверхности, и назовем это число поверхностной пористостью.

Докажем, что в однородно-пористой среде объемная пористость и поверхностная пористость равны, т. е.

$$m_w = m_s$$

Пусть в пористой среде движется некоторая жидкость с истинной плотностью ρ_i. Обозначим через ρ_c среднюю плотность этой жидкости, т. е. ρ_c есть кажущаяся плотность, получаемая при равномерном распределении массы жидкости по всему объему при отсутствии пористой среды. Из определения пористости и средней плотности следует

$$m_w \rho_i = \rho_c \qquad (1.1)$$

Пусть скоростное поле определяется вектором $\mathbf{V}$ с проекциями u, v, w.

Очевидно, движение в пористой среде со скоростью $\mathbf{V}$ и плотностью ρ_i тождественно движению в свободной среде со скоростью $\mathbf{V}$ и плотностью ρ_c. Расход через единицу поверхности равен $\rho_i V_n m_s$, через среднюю плотность получим, что тот же расход равен $\rho_c V_n$. Следовательно,

$$\rho_c = m_s \rho_i$$

На основании (1.1), подставляя сюда $\rho_c = m_w \rho_i$, получим $m_w = m_s$, что и требовалось доказать.

Обращаем внимание, что из доказанной теоремы вытекает, что если на площадку $d\sigma$ действует давление p, то сила, приходящаяся на долю среды n от воздействия на $d\sigma$, будет

$$m_n p\, d\sigma = \frac{\rho_{nc}}{\rho_{ni}}\, p\, d\sigma$$

Введем еще одно соотношение, очень важное для дальнейшего. Пусть смесь состоит из N сред. Пусть их истинные плотности ρ_{ni} и средние плотности ρ_n $(n = 1, \ldots, N)$.

Так как объемная пористость есть часть единицы объема, занимаемая данным газом, то сумма всех коэффициентов пористости

$$m_1 + \ldots + m_n = 1$$

или на основании (1.1)

$$\frac{\rho_1}{\rho_{1i}} + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}} + \cdots + \frac{\rho_N}{\rho_{Ni}} = 1 \qquad (1.2)$$

§ 2. Вывод уравнения движения. Если допустить рассматриваемые нами среды сплошными, что вполне законно, то в каждой точке пространства необходимо рассмотреть столько векторов скоростей $\mathbf{V}_n$, сколько сред участвует в движении; кроме того, очевидно, что в каждой точке будем иметь несколько плотностей ρ_n. В дальнейшем мы будем рассматривать среднюю плотность среды ρ_n, которая получится, если равномерно распределить по всему объему массу какой-нибудь среды из участвующих в движении. Через ρ_{ni} обозначим ее истинную плотность. Для средних плотностей ρ_n можно, очевидно, написать закон Ломоносова (сохранения вещества) в форме Эйлера

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_n \mathbf{V}_n) = 0 \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

где N — число сред, участвующих в движении. Заметим, что принятие уравнения (1.1) имеет принципиальное значение; для истинных плотностей оно будет иметь другую форму.

Пусть в процессе движения часть сред превращается в другие среды, участвующие в движении. Если закон превращения таков, что масса dm в одну секунду выделяет $\lambda\, dm$ массы другой жидкости, то, очевидно, уравнение неразрывности напишется в форме

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}_n) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{jn}\rho_j - \rho_n \sum_{j=1}^{N} \lambda_{nj} \tag{2.2}$$

где λ_{jn} — скорость превращения j-й компоненты в n-ю, λ_{nj} — скорость превращения n-й компоненты в j-ю.

Выведем теперь уравнение движения. При движении многофазных сред могут наблюдаться различные случаи в зависимости от свойств компонент. Укажем на некоторые из них.

1. Все среды могут быть рассмотрены как упругие газы.

2. Некоторые из сред являются упругими, некоторые же идеально-пластическими газами.

3. Некоторые из сред являются упругими, некоторые упруго-пластическими, обладающими эффектом переуплотнения (переукладки).

4. Некоторые среды являются газами упругими идеально-пластическими с эффектом переукладки, а другие же среды являются упруго-пластическими твердыми средами.

Следует заметить, что газы могут быть рассматриваемы как идеальными, так и вязкими.

Как видим, в зависимости от того, какая из указанных выше комбинаций нас интересует, уравнения движения примут соответствующий вид. Возможное число уравнений практически не ограничено.

Мы рассмотрим случай, когда участвующие в движении среды могут быть рассматриваемы как идеальные газы.

В этом случае давление в данной точке может быть принято общим для всех компонент среды. Имеет смысл рассматривать случай, когда давление будет общим только для некоторых групп из сред, участвующих в движении. Если выделить из среды элементарный объем со сторонами dx, dy, dz, то, очевидно, на этот объем вдоль оси x действует сила $-dz\,dy\,(\partial p / \partial x)\,dx$. Часть этой силы действует на n-ю компоненту со средней плотностью ρ_n и массовой $\rho_n\, dx\, dy\, dz$.

Очевидно, на долю n-й компоненты среды приходится сила

$$-\,dy\,dz \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho_n}{\rho_{ni}}\, p\right) dx \tag{2.3}$$

Кроме этой поверхностной силы, будут силы взаимного воздействия компонент сред между собой. Обозначим силу воздействия j-й компоненты на n-ю через $\mathbf{F}_{jn}$ с проекциями по декартовым осям $X_{jn}Y_{jn}Z_{jn}$.

Необходимо выделить из этой силы взаимодействия силу, обусловленную переменностью сечения трубки тока. Это означает, что суммарная сила, действующая вдоль оси x, должна свестись к

$$-dy\,dz\,\frac{\rho_n}{\rho_{ni}}\frac{\partial p}{\partial x}\,dx + X_{jn}'\,\rho_n\,dx\,dy\,dz \tag{2.4}$$

где $X_{jn}' = K_{jn}(u_j - u_n)$ равна нулю при одинаковых относительных скоростях. Таким образом, уравнение движения принимает вид:

$$\begin{gathered}
\frac{du_n}{dt} = -\frac{1}{\rho_{ni}}\frac{\partial p}{\partial x} + \sum_{j=1}^{N}\frac{K_{jn}}{\rho_n}(u_j - u_n) + X_n, \\
\frac{dv_n}{dt} = -\frac{1}{\rho_{ni}}\frac{\partial p}{\partial y} + \sum_{j=1}^{N}\frac{K_{jn}}{\rho_n}(v_j - v_n) + Y_n \qquad (n = 1, \ldots, N) \\
\frac{dw_n}{dt} = -\frac{1}{\rho_{ni}}\frac{\partial p}{\partial z} + \sum_{j=1}^{N}\frac{K_{jn}}{\rho_n}(w_j - w_n) + Z_n
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Во многих случаях можно принять допущение

$$p = p(\rho_{ni}, c_n) \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{2.6}$$

где c_n — постоянная, связанная с энтропией среды. Мы рассмотрим случаи, когда c_n при данном движении задана и не меняется.

Для газов, обладающих свойством пластичности, всегда следует различать активный процесс сжатия от пассивного.

Заметим, что система уравнений (2.1), (2.2), (2.5) и (2.6) замкнутая, т. е. в ней столько уравнений, сколько неизвестных

$$3N + N + N + 1 = 5N + 1$$

В случае, когда давление не может быть принято общим для всех составляющих смеси, система окажется незамкнутой.

Рассмотрим случай, когда одна группа компонент смеси имеет давление, отличное от другой. В этом случае, естественно, к уравнениям типа (2.6) прибавится еще одно уравнение, связывающее оба различных давления и другие параметры системы:

$$p_1 = f\left(p_2, \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_N, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{\rho_3}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_N}{\rho_1}\right) \tag{2.7}$$

Ввиду наличия этого уравнения система замыкается и в этом случае. Уравнения написанной выше системы являются чисто механическими. В частности, они будут замкнутыми, если все $\rho_{hi} = \mathrm{const}$.

В случае движения с наличием фазовых превращений к этим уравнениям необходимо присоединить уравнения, которые дают закон сохранения энергии и физические законы, управляющие этими фазовыми превращениями.

§ 3. Взаимнопроницающие движения двух сжимаемых сред. Рассмотрим случай одномерного движения. Обозначим через u скорость одной и через v скорость другой среды. В данном частном случае имеем

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho_{1i}}\frac{\partial p}{\partial x} - K_1(v - u) = 0, \qquad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho_{2i}}\frac{\partial p}{\partial x} - K_2(u - v) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho_1) = 0, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v\rho_2) = 0 \tag{3.2}$$

Заметим еще, что

$$\frac{\rho_1}{\rho_{1i}} + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}} = 1 \tag{3.3}$$

Будем исследовать тип уравнений (3.1) и (3.2). Можно заранее сказать, что эти уравнения гиперболического типа. Нам необходимо написать для них характеристики, которые позволят выяснить качественный характер явлений. Итак, если считать вдоль характеристик заданными ρ_1, ρ_2, u, v, ρ_{1i}, ρ_{2i}, то будем иметь

$$du = u_t\, dt + u_x\, dx, \qquad dv = v_t\, dt + v_x\, dx$$
$$d\rho_1 = \rho_{1t}\, dt + \rho_{1x}\, dx, \qquad d\rho_2 = \rho_{2t}\, dt + \rho_{2x}\, dx$$
$$d\rho_{1i} = \rho_{1it}\, dt + \rho_{1ix}\, dx, \qquad d\rho_{2i} = \rho_{2it}\, dt + \rho_{2ix}\, dx$$

Отсюда

$$u_t = \frac{du}{dt} - u_x \frac{dx}{dt}, \qquad \rho_{1t} = \frac{d\rho_1}{dt} - \rho_{1x}\frac{dx}{dt}$$
$$v_t = \frac{dv}{dt} - v_x \frac{dx}{dt}, \qquad \rho_{2t} = \frac{d\rho_2}{dt} - \rho_{2x}\frac{dx}{dt}$$

Подставляя в (3.1), (3.2) u_t, v_t, ρ_{1t}, ρ_{2t}, получим

$$\frac{du}{dt} + u_x(u - x_t) = -\frac{1}{\rho_{1i}}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{\rho_1}(v-u)$$
$$\frac{dv}{dt} + v_x(v - x_t) = -\frac{1}{\rho_{2i}}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{\rho_2}(u-v) \tag{3.4}$$
$$\frac{d\rho_1}{dt} + \rho_{1x}(u - x_t) + \rho_1 u_x = 0, \qquad \frac{d\rho_2}{dt} + \rho_{2x}(v - x_t) + \rho_2 v_x = 0$$

Преобразуем уравнение (3.4), имея в виду

$$\frac{\partial \rho_{1i}}{\partial t} = \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \rho_{2i}}{\partial t} = \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \left(a_1^2 = \frac{dp}{d\rho_{1i}}\right)$$
$$\frac{\partial \rho_{1i}}{\partial x} = \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial \rho}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \rho_{2i}}{\partial x} = \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial \rho}{\partial x}, \qquad \frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u\frac{\partial \rho_1}{\partial x} \qquad \left(a_2^2 = \frac{dp}{d\rho_{2i}}\right)$$

Из (3.3) получим

$$\frac{1}{\rho_{1i}}\frac{d\rho_1}{dt} - \frac{\rho_1}{\rho_{1i}^2}\frac{d\rho_{1i}}{dt} + \frac{1}{\rho_{2i}}\frac{d\rho_2}{dt} - \frac{\rho_2}{\rho_{2i}^2}\frac{d\rho_{2i}}{dt} = 0$$
$$\frac{1}{\rho_{1i}}\left[\frac{d\rho_1}{dt} + \rho_{1x}(u - x_t)\right] - \frac{\rho_1}{\rho_{1i}^2}\frac{1}{a_1^2}\left[\frac{dp}{dt} + p_x(u-x_t)\right] + \tag{3.5}$$
$$+ \frac{1}{\rho_{2i}}\left[\frac{d\rho_2}{dt} + \rho_{2x}(v - x_t)\right] - \frac{\rho_2}{\rho_{2i}^2}\frac{1}{a_2^2}\left[\frac{dp}{dt} + p_x(v-x_t)\right] = 0$$

Исключая из (3.4) и (3.5) ρ_{1x}, ρ_{2x}, ρ_x, получим два уравнения относительно u_x, v_x. Исключая ρ_{1x}, ρ_{2x}, получим из (3.5)

$$\frac{\rho_1}{\rho_{1i}}u_x + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}}v_x + p_x\left[\frac{\rho_1(u-x_t)}{\rho_{1i}^2 a_1^2} + \frac{\rho_2(v-x_t)}{\rho_{2i}^2 a_2^2}\right] + \frac{dp}{dt}\left[\frac{\rho_1}{\rho_{1i}^2 a_1^2} + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}^2 a_2^2}\right] = 0$$

Обозначая

$$A = \frac{\rho_1(u-x_t)}{\rho_{1i}^2 a_1^2} + \frac{\rho_2(v-x_t)}{\rho_{2i}^2 a_2^2}, \qquad B = \frac{dp}{dt}\left[\frac{\rho_1}{\rho_{1i}^2 a_1^2} + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}^2 a_2^2}\right] \tag{3.6}$$

получим

$$p_x = -\frac{1}{A}\left(B + \frac{\rho_1}{\rho_{1i}}u_x + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}}v_x\right)$$

Следовательно, уравнения для вывода характеристик будут

$$\frac{du}{dt} + u_x(u - x_t) = \frac{1}{A\rho_{1i}}\left(B + \frac{\rho_1}{\rho_{1i}}u_x + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}}v_x\right) + \frac{K}{\rho_1}(v - u)$$

$$\frac{dv}{dt} + v_x(v - x_t) = \frac{1}{A\rho_{2i}}\left(B + \frac{\rho_1}{\rho_{1i}}u_x + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}}v_x\right) + \frac{K}{\rho_2}(u - v)$$

Во избежание ошибок приведем эти уравнения в нормальный вид

$$u_x\left[(u - x_t) - \frac{\rho_1}{\rho_{1i}^2 A}\right] - \frac{\rho_2}{\rho_{1i}\rho_{2i}A}v_x = \frac{B}{A\rho_{1i}} - \frac{du}{dt} + \frac{K}{\rho_1}(v - u)$$

$$-\frac{\rho_1}{\rho_{1i}\rho_{2i}A}u_x + v_x\left[(v - x_t) - \frac{\rho_2}{\rho_{2i}^2 A}\right] = \frac{B}{A\rho_{2i}} - \frac{dv}{dt} + \frac{K}{\rho_2}(u - v)$$

Уравнения характеристик получим, написав условия пропорциональности коэффициента этого уравнения:

$$\frac{u - x_t - \dfrac{\rho_1}{\rho_{1i}^2 A}}{-\dfrac{\rho_1}{\rho_{1i}\rho_{2i}A}} = \frac{-\dfrac{\rho_2}{\rho_{1i}\rho_{2i}A}}{v - x_t - \dfrac{\rho_2}{\rho_{2i}^2 A}} = \frac{\dfrac{B}{A\rho_{1i}} - \dfrac{du}{dt} + \dfrac{K}{\rho_1}(v - u)}{\dfrac{B}{A\rho_{2i}} - \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{K}{\rho_2}(u - v)}$$

$$\frac{\rho_{1i}^2 A(u - x_t) - \rho_1}{-\dfrac{\rho_{1i}}{\rho_{2i}}\rho_1} = \frac{-\rho_2}{\rho_{1i}\rho_{2i}A(v - x_t) - \dfrac{\rho_2\rho_{1i}}{\rho_{2i}}}$$

Отсюда

$$\left[\frac{(u - x_t)^2}{a_1^2} + \frac{\rho_2\rho_{1i}^2}{\rho_1\rho_{2i}^2 a_2^2}(u - x_t)(v - x_t) - 1\right]\left[\frac{\rho_1\rho_{2i}}{\rho_{1i}a_1^2}(v - x_t)(u - x_t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_2\rho_{1i}}{\rho_{2i}a_2^2}(v - x_t)^2 - \frac{\rho_2\rho_{1i}}{\rho_{2i}}\right] = \frac{\rho_{1i}}{\rho_{2i}}\rho_2$$

Раскрывая скобки, получим

$$\frac{\rho_1\rho_{2i}(v - x_t)(u - x_t)^3}{\rho_{1i}a_1^4} + \frac{\rho_2\rho_{1i}(u - x_t)^2(v - x_t)^2}{\rho_{2i}a_1^2 a_2^2} - \frac{\rho_2\rho_{1i}}{\rho_{2i}}\frac{(u - x_t)^2}{a_1^2} +$$

$$+ \frac{\rho_2\rho_{1i}}{\rho_{2i}a_1^2 a_2^2}(u - x_t)^2(v - x_t)^2 + \frac{\rho_2^2\rho_{1i}^3}{\rho_1\rho_{2i}^3}\frac{(v - x_t)^3(u - x_t)}{a_2^4} - \frac{\rho_2^2\rho_{1i}^3}{\rho_1\rho_{2i}^3}\frac{(u - x_t)(v - x_t)}{a_2^2} -$$

$$- \frac{\rho_1\rho_{2i}}{\rho_{1i}a_1^2}(v - x_t)(u - x_t) - \frac{\rho_2\rho_{1i}}{\rho_{2i}a_2^2}(v - x_t)^2 + \frac{\rho_2\rho_{1i}}{\rho_{2i}} = \frac{\rho_2\rho_{1i}}{\rho_{2i}}$$

Далее имеем

$$\frac{(v - x_t)(u - x_t)^3}{a_1^4} + 2\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\rho_{1i}^2}{\rho_{2i}^2}\frac{(u - x_t)^2(v - x_t)^2}{a_1^2 a_2^2} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2\left(\frac{\rho_{1i}}{\rho_{2i}}\right)^4\frac{(v - x_t)^3(u - x_t)}{a_2^4} - \tag{3.7}$$

$$-(u - x_t)(v - x_t)\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2\left(\frac{\rho_{1i}}{\rho_{2i}}\right)^4\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_1^2}\right] - \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\rho_{1i}^2}{\rho_{2i}^2}\left[\frac{(u - x_t)^2}{a_1^2} + \frac{(v - x_t)^2}{a_2^2}\right] = 0$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\rho_{2i}^2}{\rho_{1i}^2}\frac{(v - x_t)(u - x_t)^3}{a_1^4} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\rho_{1i}^2}{\rho_{2i}^2}\frac{(v - x_t)^3(u - x_t)}{a_2^4} + 2\frac{(u - x_t)^2(v - x_t)^2}{a_1^2 a_2^2} -$$

$$-(u - x_t)(v - x_t)\left[\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\rho_{1i}^2}{\rho_{2i}^2}\frac{1}{a_2^2} + \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\rho_{2i}^2}{\rho_{1i}^2}\frac{1}{a_1^2}\right] - \frac{(u - x_t)^2}{a_1^2} - \frac{(v - x_t)^2}{a_2^2} = 0$$

Теперь видно, что уравнение характеристики вполне симметрично относительно индексов.

Пусть $u = v$, тогда

$$(x_t - u)^2 = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\rho_{1i}^2}{\rho_{2i}^2}\frac{1}{a_2^2} + \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\rho_{2i}^2}{\rho_{1i}^2}\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2}}{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\rho_{2i}^2}{\rho_{1i}^2}\frac{1}{a_1^4} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\rho_{1i}^2}{\rho_{2i}^2}\frac{1}{a_2^4} + \frac{2}{a_2^2 a_1^2}} = \lambda$$

Если $\rho_{2i} = \rho_{1i}$, то $a_1 = a_2$ и мы получим

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho_{1i}\,, \quad (x_t - u)^2 = a^2\,\frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2} + 2}{\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} + 2} = a^2$$

Обозначим

$$\frac{x_t - v}{a_2} = y\,, \qquad \frac{x_t - u}{a_1} = z, \qquad K_1^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\rho_{2i}^2}{\rho_{1i}^2}\frac{a_2}{a_1} \tag{3.8}$$

Тогда из (3.7) получается

$$K_1^2 y z^3 + \frac{y^3 z}{K_1^2} + 2y^2 z^2 = yz\left(K_1^2 + \frac{1}{K_1^2}\right) + y^2 + z^2$$

или

$$K_1^4 z^2 + y^2 + 2K_1^2 yz = K_1^4 + 1 + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$$

Отсюда z

$$z^2\left(K_1^2 + \frac{y}{z}\right) = K_1^4 + 1 + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$$

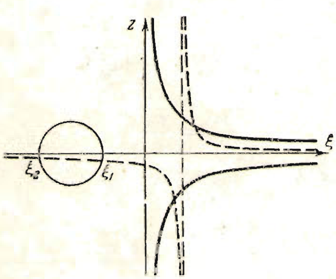
Полагая $y/z = \xi$, получим

$$z = \pm\sqrt{\frac{K_1^4 + 1 + \xi + \xi^{-1}}{(K_1^2 + \xi)^2}} \tag{3.9}$$

Будем исследовать поведение этой кривой. Если корень числителя подкоренного выражения в правой части

$$\xi^2 + (K_1^4 + 1)\,\xi + 1 = 0$$

$$\xi_{1,2} = -\frac{(K_1^4 + 1)}{2} \pm \sqrt{\frac{(K_1^4 + 1)^2}{4} - 1} \tag{3.10}$$



Фиг. 1

Начертим теперь график. Исключая x_t, выражения y и z, получим

$$a_2 y - a_1 z = u - v$$

$$z = \frac{u - v}{a_1}\,\frac{1}{(a_2 / a_1)\,\xi - 1} \tag{3.11}$$

Пересечение кривых (3.8) и (3.10) дает значения z и ξ, по которым определяем из (3.7) волновые скорости x_t. Из фиг. 1 видно, что всегда имеются две действительные характеристики. При

$$\frac{u - v}{a_1} < \beta_0$$

имеются еще две действительные характеристики, т. е. возникает вторая скорость «звука».

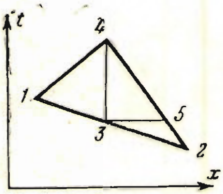
Мы здесь не будем обосновывать эквивалентность системы характеристик самим уравнением, считая это доказанным для гиперболических уравнений.

Методы числового решения той или другой задачи также очевидны. Случай $(u-v)/a_1 > \beta_0$ требует специального разбора.

§ 4. Линеаризированные уравнения движения. Если систему (3.1) и (3.2) линеаризировать обычным в таких случаях приемом, то получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{1i}} \frac{\partial p}{\partial x} - K(v-u) = 0, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{2i}} \frac{\partial p}{\partial x} - K(u-v) = 0, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$



Фиг. 2

Коэффициенты в этих уравнениях считаются постоянными, так как члены, содержащие в коэффициентах величины u, v, в этих уравнениях отсутствуют.

Полагая $u = v = 0$, в уравнениях (3.7) получим для них уравнения характеристик

$$x_{t1} = x_{t2} = 0, \qquad x_{t3,4}{}^2 = \lambda^2 \tag{4.1}$$

Таким образом, мы получим, что имеется система трех действительных характеристик.

Следовательно, в этом случае придется дополнить уравнения характеристик. Мы рекомендуем воспользоваться линеаризированными уравнениями сохранения вещества. Если их написать в конечных разностях, то получим (фиг. 2)

$$\frac{\rho_{14}-\rho_{13}}{t_4-t_3} + \rho_{01} \frac{u_5-u_3}{x_5-x_3} = 0, \qquad \frac{\rho_{24}-\rho_{23}}{t_4-t_3} + \rho_{02} \frac{u_5-u_3}{x_5-x_3} = 0$$

§ 5. Случай движения несжимаемых жидкостей. Мы ограничимся рассмотрением взаимнопроницающего движения несжимаемых сред.

Очевидно, если участвующие в движении среды несжимаемы, их истинные плотности ρ_{ji} будут постоянными. Средние же плотности ρ_j, вообще говоря, будут переменными.

Следовательно, в этом случае движение описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt} &= -\frac{1}{\rho_{ni}} \frac{\partial p}{\partial x} + \sum_{j=1}^{N} \frac{K_{jn}}{\rho_n} (u_j - u_n) + X_n \\ \frac{dv_n}{dt} &= -\frac{1}{\rho_{ni}} \frac{\partial p}{\partial y} + \sum_{j=1}^{N} \frac{K_{jn}}{\rho_n} (v_j - v_n) + Y_n \\ \frac{dw_n}{dt} &= -\frac{1}{\rho_{ni}} \frac{\partial p}{\partial z} + \sum_{j=1}^{N} \frac{K_{jn}}{\rho_n} (w_j - w_n) + Z_n \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_n \mathrm{V}_n) = 0 \tag{5.2}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\rho_j}{\rho_{ji}} = 1 \tag{5.3}$$

Система (5.1), (5.2), (5.3) замкнутая. В случае установившегося движения

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial v_n}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial w_n}{\partial t} = 0$$

§ 6. Теорема об изменении состава смеси. Рассмотрим движения смеси двух несжимаемых жидкостей. В данном случае имеем

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{1i}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{\rho_1}(u_2 - u_1), \qquad u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{2i}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{\rho_2}(u_1 - u_2) \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u, \rho) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(u_2 \rho_2) = 0 \tag{6.2}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_{1i}} + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}} = 1 \tag{6.3}$$

Из (6.1), имея в виду (6.3), получаем

$$\rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \rho_2 u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

На основании (6.2)

$$\rho_1 u_1 = c_1 = \mathrm{const}, \qquad \rho_2 u_2 = c_2 = \mathrm{const} \tag{6.4}$$

Следовательно, для любого вида функции K получаем следующий общий интеграл

$$\rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2 + p = c_3 \tag{6.5}$$

Это уравнение не есть аналог интеграла Бернулли, для случая однокомпонентной несжимаемой жидкости она выполняется всегда. Из (6.3)

$$\frac{\rho_1}{\rho_{1i}}\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\rho_{1i}}{\rho_{2i}}\right) = 1$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho_{1i}}\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\rho_{1i}}{\rho_{2i}}\right)\left(c_1^2 + c_2^2\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + p = c_3$$

Пусть в некотором сечении потока заданы

$$\rho_1 = \rho_{10}, \quad \rho_2 = \rho_{20}, \quad u_1 = u_{01}, \quad u_2 = u_{02}, \quad p = p_0$$

Тогда, вводя обозначения

$$\frac{\rho_{01}}{\rho_{1i}} = \varkappa\,, \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \lambda\,, \quad \frac{\rho_{1i}}{\rho_{2i}} = \mu\,, \quad \frac{u_{01}}{u_{02}} = \nu\,, \quad \frac{p_0}{\rho_{1i} u_{01}^2} = p_0^*$$

имеем

$$\frac{u_{01}^2 \rho_{01}^2}{\rho_{1i}}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\nu^2 \lambda_0^2}\right) + p = p_0 + u_{01}^2 \rho_{01} + u_{02}^2 \rho_{02}^2$$

$$\varkappa^2\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\nu^2 \lambda_0^2}\right) + p^* = p_0^* + \varkappa + \frac{\varkappa}{\nu^2 \lambda_0}\rho_{02}$$

Откуда

$$\frac{dp^*}{d\lambda} = -\frac{\varkappa^2}{\nu^2\lambda_0^2}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)+\frac{\varkappa^2\mu}{\lambda^2}\left(1+\frac{\lambda}{\nu^2\lambda_0^2}\right)=\frac{\varkappa^2\mu}{\lambda^2}-\frac{\varkappa^2}{\nu^2\lambda_0^2}=\frac{\varkappa^2}{\nu^2\lambda_0^2}\left(\frac{\nu^2\lambda_0^2\mu}{\lambda^2}-1\right)$$

Следовательно, при $\lambda=\lambda_0$

$$\frac{dp^*}{d\lambda}>0 \quad \text{при } \nu^2\mu>1, \qquad \frac{dp^*}{d\lambda}<0 \quad \text{при } \nu^2\mu<1 \tag{6.6}$$

Полученный результат может быть сформулирован следующим образом: если отношение скоростного напора истинной плотности первой жидкости к скоростному напору истинной плотности второй жидкости смеси больше единицы, то с ростом или убыванием давления будет расти или убывать отношение средней плотности первой жидкости ко второй.

Если же указанное отношение скоростных напоров меньше единицы, то увеличению давления будет соответствовать падение отношения средних плотностей и уменьшению давления будет соответствовать рост отношения средних плотностей.

Заметим, что величины u_{01}, u_{02}, ρ_{10}, ρ_{20} и dp, $d\rho$, $d\rho_2$ нельзя задавать произвольно, так как они связаны системой уравнений (6.1) — (6.3).

Представляет интерес интегрирование указанной системы, которая сводится к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению.

§ 7. Установившееся движение в трубе переменного сечения. Очевидно, в этом случае уравнения движения будут иметь вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho_{1i}}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{K}{\rho_i}(v-u), \qquad v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho_{2i}}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{K}{\rho_2}(u-v) \tag{7.1}$$

$$f(x)\rho_1 u=\text{const}=c_1, \qquad f(x)\rho_2 v=\text{const}=c_2 \tag{7.2}$$

В этих уравнениях $f(x)$ — площадь поперечного сечения трубы. Заметим, что мы движение принимаем равномерным.

Подставляя ρ_1 и ρ_2 из (7.2) в уравнение (6.3), получим

$$\frac{c_1}{u\rho_{1i}}+\frac{c_2}{v\rho_{2i}}=f(x) \tag{7.3}$$

Из (7.1) непосредственно имеем

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\rho_{1i}}\left[\rho_{2i}v\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{K\rho_{2i}}{\rho_2}(u-v)\right]+\frac{K}{\rho_1}(v-u) \tag{7.4}$$

Пользуясь (17.2), получим

$$\frac{c_1}{\rho_{1i}}\frac{1}{u}=f-\frac{c_2}{\rho_{2i}}\frac{1}{v} \qquad (c_1=f_0\rho_{10}u_0,\ c_2=f_0\rho_{20}v_0)$$

Вводя обозначения $\alpha=c_1/\rho_{1i}$, $\beta=c_2/\rho_{2i}$, находим

$$\frac{\alpha}{u}=f-\frac{\beta}{v}, \qquad \text{или} \qquad u=\alpha\frac{v}{fv-\beta} \tag{7.5}$$

Подставляя (7.5) в (7.4) при $K = 0$ и $\rho_{1i} = \rho_{2i}$, получим

$$\alpha \frac{v}{fv-\beta} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha v}{fv-\beta}\right) = v \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\alpha^2}{(fv-\beta)} + \frac{\alpha^2 v}{fv-\beta} \frac{-f'v - f(\partial v/\partial x)}{(fv-\beta)^2} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\alpha^2 v^2 f'}{(fv-\beta)^3} = \frac{\partial v}{\partial x}\left[\frac{\alpha^2}{(fv-\beta)^2} - 1 - \frac{\alpha^2 vf}{(fv-\beta)^3}\right]$$

$$\alpha^2 v^2 f' = -\frac{\partial v}{\partial x}\left[(fv-\beta)^3 + \alpha^2\beta\right]$$

Полагая в этом уравнении $fv = A$, имеем $\alpha^2 A = (A-\beta)^3 + \beta\alpha^2$, или $A = \beta$. Что и требовалось доказать.

Далее имеем

$$\frac{\alpha^2 v}{(fv-\beta)^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\alpha^2 v^2}{fv-\beta} \frac{f'v + f(\partial v/\partial x)}{(fv-\beta)^2} = \tag{7.6}$$

$$= \frac{\rho_{2i}}{\rho_{1i}} v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{K\rho_{2i}}{\rho_{1i}}\left(\frac{\alpha v}{fv-\beta} - v\right)\frac{fv}{c_2} + \frac{Kf}{c_1} \frac{\alpha v}{fv-\beta}\left(v - \frac{\alpha v}{fv-\beta}\right)$$

Отсюда

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\dfrac{\alpha^2 v^3 f'}{(fv-\beta)^3} - \dfrac{K\rho_{2i} fv^2 [(\alpha+\beta) - fv]}{c_2 \rho_{1i}(fv-\beta)} + \dfrac{Kf\alpha v^2 [fv - \alpha - \beta]}{c_1 (fv-\beta)^2}}{\dfrac{\alpha^2 v}{(fv-\beta)^2} - \dfrac{\alpha^2 v^2 f}{(fv-\beta)^3} - \dfrac{\rho_{2i}\, v}{\rho_{1i}}}$$

Таким образом, задача свелась к интегрированию этого уравнения. При $f(x) = x$ получим плоский источник и при $f(x) = x^2$ — пространственный. В отличие от обыкновенного случая источники и стоки в зависимости от знаков C_1 и C_2 будут с одинаковым и разным направлениями потоков, составляющих смесь жидкостей. Очевидно, такое течение возможно только для ограниченного интервала изменения x.

§ 8. О неустановившемся течении смеси несжимаемых жидкостей. В предыдущем параграфе мы рассмотрели одномерное установившееся движение двух смесей. Теперь же рассмотрим их установившееся движение в трубе постоянного сечения. Напишем уравнения движения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{1i}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{\rho_1}(v-u), \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{2i}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{\rho_2}(u-v) \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho_1) = 0, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v\rho_2) = 0 \tag{8.2}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_{1i}} + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}} = 1 \tag{8.3}$$

Нетрудно заметить, что написанная система замкнута. Найдем характеристику систем (8.1), (8.2), (8.3). Исключая ρ_2, последние два уравнения заменим одним:

$$-\lambda \frac{\partial \rho_1}{\partial t} - v\lambda \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + (\rho_{2i} - \lambda\rho_1)\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

К нашей системе присоединим следующие уравнения, справедливые вдоль характеристик:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + x_t \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + x_t \frac{\partial \rho_1}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + x_t \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + x_t \frac{\partial p}{\partial x}$$

Исключая везде производную по t, получим

$$\frac{du}{dt} - x_t \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{1i}}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{\rho_1}(v-u)$$

$$\frac{dv}{dt} + (v - x_t)\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{2i}}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{\rho_2}(u-v)$$

Отсюда

$$\rho_{1i}\frac{du}{dt} - \rho_{2i}\frac{dv}{dt} + \rho_{1i}(u - x_t)\frac{\partial u}{\partial x} - \rho_{2i}(v - x_t)\frac{\partial v}{\partial x} = K(v-u)\left(\frac{\rho_{1i}}{\rho_1} + \frac{\rho_{2i}}{\rho_2}\right)$$

Аналогично

$$\frac{d\rho_1}{dt} - x_t\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + \rho_1\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial\rho_1}{\partial x} = 0$$

$$-\lambda\left(\frac{d\rho_1}{dt} - x_t\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) - v\lambda\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + (\rho_{2i} - \lambda\rho_1)\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Исключая из этих уравнений $\partial\rho_1/\partial x$, получим

$$-\lambda\frac{d\rho_1}{dt} + \lambda\frac{(x_t - v)}{x_t - u}\left[\frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1\frac{\partial u}{\partial x}\right] + (\rho_{2i} - \lambda\rho_1)\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Из уравнений для $\partial u/\partial x$ и $\partial v/\partial x$ выпишем условия пропорциональности коэффициентов:

$$\frac{\rho_{1i}(u - x_t)}{\rho_1\lambda\dfrac{x_t - v}{x_t - u}} = \frac{\rho_{2i}(x_t - v)}{\rho_{2i} - \lambda\rho_1} = \frac{\rho_{1i}\dfrac{du}{dt} - \rho_{2i}\dfrac{dv}{dt} - \varkappa(v-u)\left(\dfrac{\rho_{1i}}{\rho_1} + \dfrac{\rho_{2i}}{\rho_2}\right)}{\lambda\dfrac{x_t - v}{x_t - u}\dfrac{d\rho_1}{dt} - \lambda\dfrac{d\rho_1}{dt}}$$

Отсюда получим

$$-\frac{\rho_{1i}(x_t - u)^2}{\rho_1\lambda} = \frac{\rho_2}{\rho_{2i} - \lambda\rho_1}(x_t - v)^2$$

Откуда видно, что характеристики будут действительными только при

$$\rho_{2i} - \lambda\rho_1 < 0, \qquad \lambda = \frac{\rho_{2i}}{\rho_{1i}}$$

Следовательно,

$$\rho_{1i} - \rho_1 < 0$$

Как известно, $\rho_1/\rho_{1i} < 1$, следовательно, в несжимаемой смеси продольные волны невозможны, как и следовало ожидать,— несмотря на сходство уравнений движения смеси несжимаемых жидкостей с уравнениями движения газов, они являются эллиптическими.

Поступила 5 I 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, 1953.
2. Stefan M. J. Versuche über die Verdampfung Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften, Bd. 68, 1873.
3. Скрябин А. Сопротивление в трубах при перекачке вязких жидкостей в условиях теплообмена. Нефтяное хозяйство, 1940.
4. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.