Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ [1]

Н. Е. Кочин

В последнее время в работах Н. М. Гюнтера [1,2] и Л. Лихтенштейна [3] был рассмотрен ряд теорем существования для идеальной несжимаемой однородной или неоднородной жидкости. Все эти теоремы относились, однако, либо к случаю жидкости, заполняющей безграничное пространство, либо же к случаю жидкости, заполняющей сосуд, движущийся заданным образом.

С практической точки зрения более интересными являются случаи протекания жидкости через некоторые фиксированные области. В связи с этим мы ставим и решаем в настоящей работе вопрос о доказательстве теоремы существования для одного из простейших случаев подобного рода.

Рассмотрим область V, ограниченную поверхностью S цилиндрического вида. Поверхность S состоит из трех частей: боковой поверхности S_0 и двух оснований S_1 и S_2. Про все три поверхности S_0, S_1, S_2 мы предположим, что они имеют непрерывно дифференцируемую кривизну. Кроме того, мы предположим, что во всех точках линии L_1 пересечения поверхностей S_0 и S_1 угол, под которым пересекаются эти две поверхности, всюду больше нуля и меньше π. Аналогичное предположение мы сделаем также относительно линии L_2 пересечения поверхностей S_0 и S_2.

Мы будем рассматривать течение идеальной несжимаемой однородной жидкости, находящейся под действием сил, имеющих потенциал. Мы считаем при этом, что жидкость, полностью заполняющая объем V, втекает в этот объем через поверхность S_1 и вытекает через поверхность S_2.

Обозначим через x, y, z прямолинейные прямоугольные координаты какой-либо точки области V, через t — время, через u, v, w — проекции скорости q частицы жидкости на оси координат, через ρ — плотность жидкости, через p — давление, ~~через Π — силовую~~ функцию, наконец, через ξ, η, ζ — проекции вектора вихря ω на оси координат:

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

---

[1] После смерти Н. Е. Кочина была обнаружена отпечатанная на машинке неоконченная статья под заглавием «Об одной теореме существования гидродинамики» (Н. Кочин), содержавшая 21.5 страницы. Повидимому, статья была напечатана в 1935 г., когда Н. Е. Кочин собирался переезжать из Ленинграда в Москву. Никаких других материалов к этой работе в архиве Н. Е. Кочина обнаружено не было. По просьбе редакции Д. Е. Долидзе взял на себя труд закончить статью. При этом он продолжил рассуждения Н. Е. Кочина по оценке функций и их производных, заменив в формулах (20) и соответственно (24) и некоторых последующих условие Гельдера условием Липшица, так как в дальнейшем при доказательстве эквивалентности понадобилась непрерывность вторых производных.

От редакции

через n — внутреннюю нормаль к поверхности S, ограничивающей область V, через q_n — проекцию скорости на эту нормаль, через ω_n — проекцию вектора вихря скорости, на ту же нормаль.

Основные уравнения гидромеханики имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial \Pi}{\partial x}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial \Pi}{\partial y}\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial \Pi}{\partial z}\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad \left(\Pi=-\frac{p}{\rho}+U\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

Нашей задачей является доказательство существования решения системы (1), удовлетворяющей определенным начальным и пограничным условиям. А именно, установим теорему существования и единственности.

Теорема. Пусть в области V заданы функции $u_0(x, y, z), v_0(x, y, z)$, $w_0(x, y, z)$, определяющие скорости частиц жидкости в начальный момент времени t_0; соответствующие составляющие вектора вихря обозначим через ξ_0, η_0, ζ_0; пусть, кроме того, задана для некоторого промежутка времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ нормальная составляющая q_n скорости q на поверхности S, ограничивающей область V, причем $q_n=0$ на боковой поверхности S_0 и $q_n>0$ на основании S_1, $q_n<0$ на основании S_2 и

$$\int_{S_1} q_n\,dS+\int_{S_2} q_n\,dS=0$$

Для момента t_0 заданное значение q_n должно совпадать со значением

$$q_{n_0}=u_0\cos(n, x)+v_0\cos(n, y)+w_0\cos(n, z)$$

Пусть, наконец, для того же промежутка времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ заданы все три составляющие ξ, η, ζ вектора вихря на основании S_1, совпадающие в момент t_0 с соответствующими значениями ξ_0, η_0, ζ_0. Предположим далее, что заданные функции удовлетворяют следующим условиям:

1) функции u_0, v_0, w_0 имеют непрерывные вторые производные по координатам x, y, z, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем λ, где $0<\lambda<1$, например,

$$\left|\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x', y', z')-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x'', y'', z'')\right|<Ad^\lambda$$

где

$$d=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}$$

2) функция q_n имеет вторые непрерывные производные по координатам точки поверхности, удовлетворяющие условию Гельдера с тем же показателем λ;

3) заданные значения составляющих вихря ξ_0, η_0, ζ_0 и ξ, η, ζ имеют непрерывные производные, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем λ:

$$\left|\frac{\partial \xi(x', y', z', t')}{\partial x'}-\frac{\partial \xi(x'', y'', z'', t'')}{\partial x''}\right|<$$

$$<K\,\{|x''-x'|+|y''-y'|+|z''-z'|+|t''-t'|\}^\lambda$$

причем, понятно, $\xi(x', y', z', t_0)=\xi_0(x', y', z')$, если же $t'>t_0$, то точка $x'y'z'$ принадлежит поверхности S_1.

При сделанных предположениях система уравнений (1) имеет решение, и притом единственное, определенное для некоторого достаточно малого промежутка времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) функции u, v, w имеют непрерывные вторые производные по координатам x, y, z, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем λ;

2) в начальный момент времени t_0 функции u, v, w принимают в области V заданные значения u_0, v_0, w_0;

3) на поверхности S области V нормальная составляющая q_n скорости принимает заданное значение;

4) на основании S_1 принимает заданное значение вектор вихря.

Доказательство высказанной теоремы мы получим, построив по методу последовательных приближений решение системы (1), удовлетворяющее указанным начальным и граничным условиям. При этом преобразуем сначала данную систему уравнений (1) к переменным Лагранжа. А именно, рассмотрим систему уравнений

$$\frac{da}{d\tau} = u(a, b, c, \tau), \qquad \frac{db}{d\tau} = v(a, b, c, \tau), \qquad \frac{dc}{d\tau} = w(a, b, c, \tau) \tag{2}$$

и определим то решение этой системы, которое удовлетворяет начальным условиям $a = x$, $b = y$, $c = z$ при $\tau = t$.

В результате мы получим функции

$$a(x, y, z, t, \tau), \qquad b(x, y, z, t, \tau), \qquad c(x, y, z, t, \tau) \tag{3}$$

Поскольку функции $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)$ определены только в области V, то, считая $t > t_0$, мы должны различать два случая. Если точка с координатами (3) во всем промежутке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ не выходит из области V, то положим

$$[a]\ (x, y, z, t) = a(x, y, z, t, t_0)$$
$$[b]\ (x, y, z, t) = b(x, y, z, t, t_0)$$
$$[c]\ (x, y, z, t) = c(x, y, z, t, t_0)$$

Если же указанное обстоятельство не имеет места, то в силу сделанных предположений найдется такой момент времени

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(x, y, z, t) \tag{4}$$

что в промежутке $\tilde{\tau} \leqslant \tau \leqslant t$ точка с координатами (3) не выходит из области V, в момент же $\tilde{\tau}$ точка с координатами (3) будет принадлежать поверхности S_1. В этом случае мы положим

$$[a]\ (x, y, z, t) = a(x, y, z, t, \tilde{\tau})$$
$$[b]\ (x, y, z, t) = b(x, y, z, t, \tilde{\tau})$$
$$[c]\ (x, y, z, t) = c(x, y, z, t, \tilde{\tau})$$

Аналогично же обозначим через $[\partial a / \partial x]$ функцию $\partial a(x, y, z, t, \tau)/\partial x$, в которую подставлено вместо τ значение t_0 в первом случае и значение $\tilde{\tau}$ во втором случае. Аналогичное значение припишем и другим величинам подобного рода, например,

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y}\right], \qquad \left[\frac{\partial b}{\partial x}\right], \qquad \left[\frac{D(a, b)}{D(x, y)}\right] \quad \text{и т. д.}$$

Известно теперь, что из основных уравнений гидромеханики (1) вытекают следующие уравнения, связывающие между собой составляющие вектора вихря одной и той же частицы в два различных момента времени:

$$\begin{aligned}
\xi(x, y, z, t) &= [\xi]\left[\frac{D(b, c)}{D(y, z)}\right] + [\eta]\left[\frac{D(c, a)}{D(y, z)}\right] + [\zeta]\left[\frac{D(a, b)}{D(y, z)}\right] \\
\eta(x, y, z, t) &= [\xi]\left[\frac{D(b, c)}{D(z, x)}\right] + [\eta]\left[\frac{D(c, a)}{D(z, x)}\right] + [\zeta]\left[\frac{D(a, b)}{D(z, x)}\right] \\
\zeta(x, y, z, t) &= [\xi]\left[\frac{D(b, c)}{D(x, y)}\right] + [\eta]\left[\frac{D(c, a)}{D(x, y)}\right] + [\zeta]\left[\frac{D(a, b)}{D(x, y)}\right]
\end{aligned} \qquad (5)$$

где аналогично предыдущему введено обозначение $[\xi]$, $[\eta]$, $[\zeta]$, причем эти функции принадлежат к числу заданных начальными и граничными условиями. Мы имеем, наконец, еще уравнения, выражающие составляющие скорости u, v, w через составляющие вихря ξ, η, ζ. Чтобы иметь возможность применить известные формулы для вычисления вектора по его вихрю, заданному во всем бесконечном пространстве, определим вихрь скорости вне объема V формулами

$$\xi = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad \eta = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \zeta = \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

где функция ψ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\triangle\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$

и регулярна вне поверхности S и удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \omega_n \qquad \text{на } S$$

Обозначим через $G_e(x, y, z; x', y', z')$ функцию Грина задачи Неймана для области, внешней по отношению к поверхности S, т. е. функцию от x', y', z', удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 G_e}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 G_e}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 G_e}{\partial z'^2} = 0$$

регулярную всюду вне поверхности S, кроме точки (x, y, z), в окрестности которой функция G_e отличается от регулярной функции слагаемым r^{-1} (где $r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$) и удовлетворяющую условию $\partial G_e / \partial n = 0$ на поверхности S.

Тогда мы будем иметь

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\int_S G_e(x, y, z; x', y', z')\,\omega_n'\,dS' \qquad (6)$$

По полученному полю вихрей, применяя известные формулы, получим поле скоростей:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_\infty \frac{1}{r}\zeta'\,dV' - \frac{\partial}{\partial z}\int_\infty \frac{1}{r}\eta'\,dV'\right\} \\
\tilde{v}(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\int_\infty \frac{1}{r}\xi'\,dV' - \frac{\partial}{\partial x}\int_\infty \frac{1}{r}\zeta'\,dV'\right\} \\
\tilde{w}(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_\infty \frac{1}{r}\eta'\,dV' - \frac{\partial}{\partial y}\int_\infty \frac{1}{r}\xi'\,dV'\right\}
\end{aligned} \qquad (7)$$

Интегралы, относящиеся к части объема V_e, лежащей вне поверхности S, можно преобразовать в поверхностные интегралы, и тогда мы получим формулы, определяющие вектор $\tilde{q}$ с составляющими:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_V \frac{1}{r}\zeta'\,dV' - \frac{\partial}{\partial z}\int_V \frac{1}{r}\eta'\,dV' - \int_S \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z'}\beta' - \frac{\partial\psi'}{\partial y'}\gamma'\right)dS'\right\} \\
\tilde{v}(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\int_V \frac{1}{r}\xi'\,dV' - \frac{\partial}{\partial x}\int_V \frac{1}{r}\zeta'\,dV' - \int_S \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\gamma' - \frac{\partial\psi'}{\partial z'}\alpha'\right)dS'\right\} \qquad (8) \\
\tilde{w}(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_V \frac{1}{r}\eta'\,dV' - \frac{\partial}{\partial y}\int_V \frac{1}{r}\xi'\,dV' - \int_S \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\alpha' - \frac{\partial\psi'}{\partial x'}\beta'\right)dS'\right\}
\end{aligned}
$$

вихрь которого внутри объема V имеет составляющие ξ, η, ζ. Однако этот вектор не будет, вообще говоря, иметь на поверхности S предписанную нормальную составляющую скорости q_n. Прибавим поэтому к полученному вектору еще безвихревый вектор

$$
\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= \tilde{u}(x, y, z, t) + \partial\varphi/\partial x \\
v(x, y, z, t) &= \tilde{v}(x, y, z, t) + \partial\varphi/\partial y \qquad (9) \\
w(x, y, z, t) &= \tilde{w}(x, y, z, t) + \partial\varphi/\partial z
\end{aligned}
$$

где функция $\varphi(x, y, z, t)$ есть регулярная гармоническая функция внутри объема V, удовлетворяющая граничному условию

$$\partial\varphi/\partial n = q_n - \tilde{q}_n \qquad \text{на поверхности } S$$

Заметим при этом, что соответственно в силу (7) и по условию

$$\int_S \tilde{q}_n\,dS' = 0, \qquad \int_S q_n\,dS' = 0$$

Для определения функции φ мы можем применить формулу

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\int_S G_i(x, y, z; x', y', z')(q_n' - \tilde{q}_n')\,dS' \qquad (10)$$

где $G_i(x, y, z;\ x', y', z')$ есть функция Грина задачи Неймана для объема V, т. е. функция от x', y', z', удовлетворяющая уравнению Лапласа, регулярная всюду внутри V, кроме точки (x, y, z), в окрестности которой G_i отличается от регулярной функции слагаемым r^{-1}, и удовлетворяющая граничным условиям (S' обозначает величину поверхности S)

$$\frac{\partial G_i}{\partial n} = \frac{4\pi}{S'} \quad \text{на поверхности } S, \qquad \int_{S'} G_i(x, y, z; x', y', z')\,dS' = 0$$

Итак, нам нужно искать решение системы функциональных уравнений (5) — (10). В дальнейшем мы покажем, что решение этой системы уравнений действительно дает решение первоначальной системы (1).

Полученную систему функциональных уравнений мы будем решать методом последовательных приближений.

Первое приближение мы определим формулами

$$
\begin{aligned}
u_1(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z) + \partial\varphi_1/\partial x \\
v_1(x, y, z, t) &= v_0(x, y, z) + \partial\varphi_1/\partial y \qquad (11) \\
w_1(x, y, z, t) &= w_0(x, y, z) + \partial\varphi_1/\partial z
\end{aligned}
$$

где функция $\varphi_1(x, y, z, t)$ есть регулярная гармоническая функция внутри объема V, удовлетворяющая граничному условию

$$\partial\varphi_1 / \partial n = q_n - q_{n_0} \text{ на } S$$

Допустим теперь, что мы нашли в m-м приближении функции

$$u_m(x, y, z, t), \qquad v_m(x, y, z, t), \qquad w_m(x, y, z, t)$$

Покажем, как от этих функций перейти к $m+1$-му приближению. Прежде всего интегрируем систему уравнений

$$\frac{da_m}{d\tau} = u_m(a_m, b_m, c_m, \tau)$$
$$\frac{db_m}{d\tau} = v_m(a_m, b_m, c_m, \tau)$$
$$\frac{dc_m}{d\tau} = w_m(a_m, b_m, c_m, \tau) \tag{12}$$

при начальных условиях

$$a_m = x, \qquad b_m = y, \qquad c_m = z \qquad \text{при } \tau = t \tag{13}$$

причем точка (x, y, z) принадлежит объему V, а момент t принадлежит промежутку (t_0, t_1). В результате мы получим функции

$$a_m(x, y, z, t, \tau), \qquad b_m(x, y, z, t, \tau), \qquad c_m(x, y, z, t, \tau) \tag{14}$$

Определяем далее функцию $\tau_m(x, y, z, t)$, равную t_0, если точка с координатами (3) не выходит из области V, в противном же случае определяющую момент прохождения рассматриваемой частицы через поверхность S_1. Определяем далее функцию

$$[a_m] = a_m(x, y, z, t, \tau(x, y, z, t))$$

и аналогичные ей функции. После этого строим функции ξ_m, η_m, ζ_m по формулам (5), например,

$$\xi_m(x, y, z, t) = [\xi_m]\left[\frac{D(b_m, c_m)}{D(y, z)}\right] + [\eta_m]\left[\frac{D(c_m, a_m)}{D(y, z)}\right] + [\zeta_m]\left[\frac{D(a_m, b_m)}{D(y, z)}\right] \tag{15}$$

где $[\xi_m]$, $[\eta_m]$, $[\zeta_m]$ — суть заданные проекции вихря в точках $[a_m]$, $[b_m]$, $[c_m]$ в момент τ_m. Определяем далее на поверхности S нормальную составляющую вихря формулой

$$\omega_{mn} = \xi_m \alpha + \eta_m \beta + \zeta_m \gamma$$

и, применяя формулу (6), находим

$$\psi_m(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S G_e(x, y, z; x', y', z')\, \omega_{mn}'\, dS' \tag{16}$$

После этого используем формулы (8), например,

$$\tilde{u}_m(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_V \frac{1}{r}\zeta_m'\, dV' - \frac{\partial}{\partial z}\int_V \frac{1}{r}\eta_m'\, dV - \right.$$
$$\left. - \int_S \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_m'}{\partial z'}\beta' - \frac{\partial\psi_m'}{\partial y'}\gamma'\right) dS'\right\} \tag{17}$$

Далее составляем на поверхности

$$\tilde{q}_{mn} = \tilde{u}_m \alpha + \tilde{v}_m \beta + \tilde{w}_m \gamma$$

и по формуле (10) находим

$$\varphi_{m+1}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S G_i(x, y, z;\ x', y', z')(q_n' - \tilde{q}_{m,n}')\, dS' \tag{18}$$

Наконец, применяя формулы (9), определяем искомые составляющие скорости в $m+1$-м приближении, например,

$$u_{m+1}(x, y, z, t) = \tilde{u}_m(x, y, z, t) + \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x} \tag{19}$$

Итак, исходя из первого приближения (11), мы получим во втором приближении функции u_2, v_2, w_2, в третьем приближении u_3, v_3, w_3 и т. д. Остается доказать сходимость полученного процесса.

По предположению функции q_n и q_{0n} обладают вторыми производными по координатам, непрерывными и удовлетворяющими условию Гельдера с показателем λ. Тогда функция

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S G_i(x, y, z;\ x', y', z')(q_n' - q_{0n}')\, dS'$$

имеет в объеме V непрерывные производные третьего порядка по координатам, удовлетворяющие условию Гельдера с тем же показателем λ. Следовательно, функции u_1, v_1, w_1, определенные формулами (11), имеют в объеме V вторые производные по координатам, непрерывные и удовлетворяющие условию Гельдера с показателем λ.

Допустим теперь, что полученные функции u_m, v_m, w_m обладают этим свойством, и докажем, что тогда и функции u_{m+1}, v_{m+1}, w_{m+1} будут обладать этим свойством в объеме V и в промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Пусть, например,

$$|u_m(x, y, z, t)| < M, \qquad |v_m(x, y, z, t)| < M, \qquad |w_m| < M$$

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w_m}{\partial z}\right| < M \tag{20}$$

$$\left|\left[\frac{\partial u_m}{\partial x}\right]' - \left[\frac{\partial u_m}{\partial x}\right]''\right| < Md, \ldots, \left|\left[\frac{\partial w_m}{\partial z}\right]' - \left[\frac{\partial w_m}{\partial z}\right]''\right| < Md$$

где один и два штриха означают, что берутся значения функции в точках (x', y', z') и (x'', y'', z'') соответственно, а

$$d^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$$

Функции

$$a_m(x, y, z, t, \tau), \ b_m, c_m$$

удовлетворяют уравнениям

$$\frac{da_m}{d\tau} = u_m(a_m, b_m, c_m, \tau), \qquad \frac{db_m}{d\tau} = v_m, \qquad \frac{dc_m}{d\tau} = w_m$$

при начальных условиях

$$a_m = x, \quad b_m = y, \quad c_m = z \quad \text{при} \quad \tau = t$$

Ясно прежде всего, что

$$|a_m(x, y, z, t, \tau) - x| < M|t - \tau|, \ |b_m - y| < M|t - \tau|, \ |c_m - z| < M|t - \tau|$$

Функции a_m, b_m, c_m имеют непрерывные производные по x, y, z, t. Введем обозначения

$$\frac{\partial a_m}{\partial x} = A_m + 1, \qquad \frac{\partial b_m}{\partial x} = B_m, \qquad \frac{\partial c_m}{\partial x} = C_m$$

Тогда функции A_m, B_m, C_m удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dA_m}{d\tau} &= \frac{\partial u_m}{\partial a_m}(A_m + 1) + \frac{\partial u_m}{\partial b_m} B_m + \frac{\partial u_m}{\partial c_m} C_m \\ \frac{dB_m}{d\tau} &= \frac{\partial v_m}{\partial a_m}(A_m + 1) + \frac{\partial v_m}{\partial b_m} B_m + \frac{\partial v_m}{\partial c_m} C_m \\ \frac{\partial C_m}{d\tau} &= \frac{\partial w_m}{\partial a_m}(A_m + 1) + \frac{\partial w_m}{\partial b_m} B_m + \frac{\partial w_m}{\partial c_m} C_m \end{aligned} \tag{21}$$

при начальных условиях $A_m = 0$, $B_m = 0$, $C_m = 0$ при $\tau = t$.

Составим систему уравнений

$$\frac{d\overline{A}_m}{d\tau} = -M(\overline{A}_m + 1 + \overline{B}_m + \overline{C}_m)$$

$$\frac{d\overline{B}_m}{d\tau} = -M(\overline{A}_m + 1 + \overline{B}_m + \overline{C}_m)$$

$$\frac{d\overline{C}_m}{d\tau} = -M(\overline{A}_m + 1 + \overline{B}_m + \overline{C}_m)$$

Ясно, что, интегрируя эти уравнения при тех же начальных условиях

$$\overline{A}_m = 0, \qquad \overline{B}_m = 0, \qquad \overline{C}_m = 0 \text{ при } \tau = t$$

мы получим в промежутке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ неравенства

$$|A_m| \leqslant \overline{A}_m, \qquad |B_m| \leqslant \overline{B}_m, \qquad |C_m| \leqslant \overline{C}_m$$

и так как

$$\overline{A}_m = \overline{B}_m = \overline{C}_m = \frac{1}{3}\left[e^{3M(t-\tau)} - 1\right]$$

то получаем для промежутка $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ оценки

$$\left|\frac{\partial a_m}{\partial x} - 1\right|, \quad \left|\frac{\partial b_m}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial C_m}{\partial x}\right| \leqslant \frac{1}{3}\left[e^{3M(t-\tau)} - 1\right]$$

Но так как

$$e^u - 1 \leqslant u\,\frac{e^{u_0} - 1}{u_0} \text{ при } 0 \leqslant u \leqslant u_0$$

то

$$\frac{1}{3}\left[e^{3M(t-\tau)} - 1\right] \leqslant MK_1(t-\tau), \qquad \text{где } K_1 = \frac{e^{3M(t_1-t_0)}}{3(t_1-t_0)M}$$

Итак, мы имеем в объеме V для промежутка $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$ оценки

$$\left|\frac{\partial a_m}{\partial x} - 1\right|, \quad \left|\frac{\partial b_m}{\partial z} - 1\right|, \ldots, \left|\frac{\partial c_m}{\partial z} - 1\right| \leqslant MK_1(t-\tau) \tag{22}$$

Оценим, далее, разности типа $\left|\left[\frac{\partial a_m}{\partial x}\right]' - \left[\frac{\partial a_m}{\partial x}\right]''\right|$. Полагая опять

$$\left(\frac{\partial a_m}{\partial x}\right)' = A_m' + 1, \qquad \left(\frac{\partial b_m}{\partial x}\right)' = B_m', \qquad \left(\frac{\partial c_m}{\partial x}\right)' = C_m'$$

$$\left(\frac{\partial a_m}{\partial x}\right)'' = A_m'' + 1, \qquad \left(\frac{\partial b_m}{\partial x}\right)'' = B_m'', \qquad \left(\frac{\partial c_m}{\partial x}\right)'' = C_m''$$

и, пользуясь уравнениями (21), найдем систему трех уравнений, из которых первое имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{d(A_m' - A_m'')}{d\tau} &= \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\right)'(A_m' - A_m'') + \left(\frac{\partial u_m}{\partial b_m}\right)'(B_m' - B_m'') + \\ &+ \left(\frac{\partial u_m}{\partial c_m}\right)'(C_m' - C_m'') + \left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\right)' - \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\right)''\right](A_m'' + 1) + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial b_m}\right)' - \left(\frac{\partial u_m}{\partial b_m}\right)''\right]B_m'' + \left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial c_m}\right)' - \left(\frac{\partial u_m}{\partial c_m}\right)''\right]C_m'' \end{aligned} \tag{23}$$

при начальных условиях

$$A_m' - A_m'' = 0, \qquad B_m' - B_m'' = 0, \qquad C_m' - C_m'' = 0 \qquad \text{при } \tau = t$$

В силу неравенств (20) мы имеем оценки вида

$$\left|\left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\right)' - \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\right)''\right| < MD$$

где

$$\begin{aligned} D^2 = [a_m(x', y', z', t, \tau) - a_m(x'', y'', z'', t, \tau)]^2 + [b_m(x', y', z', t, \tau) - \\ - b_m(x'', y'', z'', t, \tau)]^2 + [c_m(x', y', z', t, \tau) - c_m(x'', y'', z'', t, \tau)]^2 \end{aligned}$$

Но в силу (22) ясно, что

$$\begin{aligned} |a_m(x', y', z', t, \tau) - a_m(x'', y'', z'', t, \tau)| < |x'' - x'| + \\ + MK_1(t - \tau)(|x'' - x'| + |y'' - y'| + |z'' - z'|) \end{aligned} \tag{23a}$$

и нетрудно отсюда вывести, что $D \leqslant K_2 d$, где K_2 — некоторая постоянная, зависящая от $MK_1(t - \tau)$. Мы находим таким образом оценку

$$\left|\left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\right)' - \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\right)''\right| < MK_3 d$$

Составляя для системы (23) мажорантную систему, нетрудно теперь получить оценки типа

$$|A_m' - A_m''| < MK_4 d(t - \tau)$$

Итак, мы имеем неравенства

$$\left|\left(\frac{\partial a_m}{\partial x}\right)' - \left(\frac{\partial a_m}{\partial x}\right)''\right|, \ldots, \left|\left(\frac{\partial c_m}{\partial z}\right)' - \left(\frac{\partial c_m}{\partial z}\right)''\right| < MK_4 d(t - \tau) \tag{24}$$

Рассмотрим теперь функции $\tau_m(x, y, z, t)$. Пусть уравнение поверхности S_1 есть

$$\Psi(x, y, z) = 0$$

Тогда τ_m или равно t_0, или есть решение уравнения

$$\Psi(a_m(x, y, z, t, \tau), b_m(x, y, z, t, \tau), c_m(x, y, z, t, \tau)) = 0$$

Применяя правило дифференцирования неявных функций, находим

$$\frac{\partial\Psi}{\partial a_m}\left(\frac{\partial a_m}{\partial x}+\frac{\partial a_m}{\partial\tau}\frac{\partial\tau_m}{\partial x}\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial b_m}\left(\frac{\partial b_m}{\partial x}+\frac{\partial b_m}{\partial\tau}\frac{\partial\tau_m}{\partial x}\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial c_m}\left(\frac{\partial c_m}{\partial x}+\frac{\partial c_m}{\partial\tau}\frac{\partial\tau_m}{\partial x}\right)=0$$

Но производные $\partial\Psi/\partial a_m$, $\partial\Psi/\partial b_m$, $\partial\Psi/\partial c_m$ пропорциональны косинусам α, β, γ углов, составляемых нормалью к поверхности S_1 с осями координат, кроме того,

$$\frac{\partial a_m}{\partial\tau}=u_m,\qquad \frac{\partial b_m}{\partial\tau}=v_m,\qquad \frac{\partial c_m}{\partial\tau}=w_m$$

поэтому легко находим, что

$$\frac{\partial\tau_m}{\partial x}=-\frac{1}{q_{mn}}\left(\frac{\partial a_m}{\partial x}\alpha+\frac{\partial b_m}{\partial x}\beta+\frac{\partial c_m}{\partial x}\gamma\right)$$

Для $\partial a_m/\partial x$, $\partial b_m/\partial x$, $\partial c_m/\partial x$ мы имеем оценки (22). Кроме того, по предположению, q_{mn} на поверхности S_1 принимает данное значение q_n всюду на этой поверхности, превосходящее положительное число l.

Отсюда следует ограниченность производных $\partial\tau_m/\partial x$, $\partial\tau_m/\partial y$, $\partial\tau_m/\partial z$.

Ясно далее, что функция $\tau_m(x, y, z, t)$ остается постоянной вдоль решения уравнений (12), определенного начальными данными (13). Но тогда

$$\frac{\partial\tau_m}{\partial x}u_m(x, y, z, t)+\frac{\partial\tau_m}{\partial y}v_m(x, y, z, t)+\frac{\partial\tau_m}{\partial z}w_m(x, y, z, t)+\frac{\partial\tau_m}{\partial t}=0$$

и, следовательно, производная $\partial\tau_m/\partial t$ также остается ограниченной.

Из ограниченности производных $\partial\tau_m/\partial x$, $\partial\tau_m/\partial y$, $\partial\tau_m/\partial z$, $\partial\tau_m/\partial t$ вытекает, в частности, условие Липшица для функции τ:

$$\begin{aligned}&|\tau_m(x', y', z', t')-\tau_m(x'', y'', z'', t'')|\leqslant\\&\leqslant K_0\{|x''-x'|+|y''-y'|+|z''-z'|+|t''-t'|\}\end{aligned}\tag{25}$$

Теперь нетрудно оценить разность типа $[\partial a_m/\partial x]'-[\partial a_m/\partial x]''$. В самом деле, пусть, например,

$$\tau_m(x', y', z', t)\geqslant\tau_m(x'', y'', z'', t)$$

Обозначим на время $\partial a_m/\partial x=A(x, y, z, t, \tau)$; тогда мы имеем

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial a_m}{\partial x}\right]'-\left[\frac{\partial a_m}{\partial x}\right]''&=A(x', y', z', t, \tau_m(x', y', z', t'))-\\-A(x'', y'', z'', t, \tau_m(x'', y'', z'', t))&=\{A(x', y', z', t, \tau_m(x', y', z', t))-\\-A(x'', y'', z'', t, \tau_m(x', y', z', t'))\}&+\{A(x'', y'', z'', t, \tau_m(x', y', z', t))-\\&-A(x'', y'', z'', t, \tau_m(x'', y'', z'', t))\}\end{aligned}$$

Первая разность уже оценена нами в неравенствах (24). Заметим далее, что

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\,\partial\tau}=\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial x}+\frac{\partial u_m}{\partial b_m}\frac{\partial b_m}{\partial x}+\frac{\partial u_m}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial x}$$

есть ограниченная величина, $|\partial A/\partial\tau|<MK_5$, и, следовательно,

$$\begin{aligned}&|A(x'', y'', z'', t, \tau_m(x', y', z', t))-A(x'', y'', z'', t, \tau_m(x'', y'', z'', t))|<\\&<MK_5|\tau_m(x', y', z', t)-\tau_m(x'', y'', z'', t)|\end{aligned}$$

т. е. в силу (25)

$$|A(x'', y'', z'', t, \tau_m(x', y', z', t))-A(x'', y'', z'', t, \tau_m(x'', y'', z'', t))|<MK_6 d$$

Итак, мы получаем оценки вида

$$\left| \left[\frac{\partial a_m}{\partial x} \right]' - \left[\frac{\partial a_m}{\partial x} \right]'' \right| < MK_7\, d \tag{26}$$

показывающие, что функции типа $[\partial a_m / \partial x]$ удовлетворяют условиям Липшица.

Аналогичные оценки имеют место для разностей типа $[a_m]' - [a_m]''$. В самом деле, в силу оценок (23а), (25) и в силу равенства

$$da_m / d\tau = u_m(a_m, b_m, c_m, \tau)$$

мы имеем, очевидно,

$$| [a_m]' - [a_m]''| =$$
$$= | a_m(x', y', z', t, \tau_m(x', y', z', t)) - a_m(x'', y'', z'', t, \tau_m(x'', y'', z'', t)) | \leqslant$$
$$\leqslant | x' - x''| + MK_1(t - \tau)(| x'' - x'| + | y'' - y'| + |z'' - z'|) +$$
$$+ MK_0(| x'' - x'| + | y'' - y'| + | z'' - z'|)$$

так что

$$| [a_m]' - [a_m]''| \leqslant | x' - x''| + MK_8(| x'' - x'| + | y'' - y'| + | z'' - z'|) \tag{27}$$

Переходим к оценкам вторых производных. Имеем

$$\left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right|, \ \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x\, \partial y} \right|, \ldots, \left| \frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2} \right| < M$$

$$\left| \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right)' - \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right)'' \right|, \ldots, \left| \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2} \right)' - \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2} \right)'' \right| < Md^{\lambda} \tag{20a}$$

Прежде всего заметим, что

$$a_m = x - \int_{\tau}^{t} u_m(x, y, z, t)\, dt, \qquad \frac{\partial^2 a_m}{\partial x\, \partial y} = - \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int_{\tau}^{t} u_m\, dt, \ldots$$

и введем обозначения

$$\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\, \partial y} = \alpha_m, \qquad \frac{\partial^2 b_m}{\partial x\, \partial y} = \beta_m, \qquad \frac{\partial^2 c_m}{\partial x\, \partial y} = \gamma_m$$

Дифференцируя уравнения (21) по y, для функций α_m, β_m, γ_m получим аналогичные уравнения, а именно

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_m}{d\tau} &= \frac{\partial u_m}{\partial a_m} \alpha_m + \frac{\partial u_m}{\partial b_m} \beta_m + \frac{\partial u_m}{\partial c_m} \gamma_m + F_m \\ \frac{d\beta_m}{d\tau} &= \frac{\partial v_m}{\partial a_m} \alpha_m + \frac{\partial v_m}{\partial b_m} \beta_m + \frac{\partial v_m}{\partial c_m} \gamma_m + \Phi_m \\ \frac{d\gamma_m}{d\tau} &= \frac{\partial w_m}{\partial a_m} \alpha_m + \frac{\partial w_m}{\partial b_m} \beta_m + \frac{\partial w_m}{\partial c_m} \gamma_m + \Psi_m \end{aligned} \tag{21a}$$

при начальных условиях $\alpha_m = 0$, $\beta_m = 0$, $\gamma_m = 0$ при $\tau = t$.

Здесь функции F_m, Φ_m, Ψ_m содержат первые производные от a_m, b_m, c_m и вторые производные от u_m, v_m, w_m. Последняя система уравнений имеет тот же самый вид, что и система уравнений (21). Поэтому, повторяя рассуждения, относящиеся к функциям A_m, B_m, C_m, удовлетворяющим уравнениям (21), в силу (20а) получим

$$|\alpha_m|, \ |\beta_m|, \ |\gamma_m| \leqslant \frac{M_0}{3M} [e^{3M(t-\tau)} - 1]$$

где M_0 — максимум абсолютных значений F_m, Φ_m и Ψ_m. Следовательно, будет существовать такое положительное постоянное K_1^*, зависящее от M и M_0, что в промежутке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ будем иметь оценки

$$\left|\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\, \partial y}\right|, \left|\frac{\partial^2 b_m}{\partial x\, \partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 c_m}{\partial x \partial y}\right| \leqslant MK_1^*(t-\tau) \tag{22a}$$

Далее, полагая

$$\left(\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\, \partial y}\right)' = \alpha_m', \qquad \left(\frac{\partial^2 b_m}{\partial x\, \partial y}\right)' = \beta_m', \qquad \left(\frac{\partial^2 c_m}{\partial x\, \partial y}\right)' = \gamma_m'$$

$$\left(\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\, \partial y}\right)'' = \alpha_m'', \qquad \left(\frac{\partial^2 b_m}{\partial x\, \partial y}\right)'' = \beta_m'', \qquad \left(\frac{\partial^2 c_m}{\partial x\, \partial y}\right)'' = \gamma_m''$$

составим уравнения, аналогичные уравнениям (23); будем иметь

$$\frac{d(\alpha_m' - \alpha_m'')}{d\tau} = \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\right)'(\alpha_m' - \alpha_m'') + \left(\frac{\partial u_m}{\partial b_m}\right)'(\beta_m' - \beta_m'') +$$

$$+ \left(\frac{\partial u_m}{\partial c_m}\right)'(\gamma_m' - \gamma_m'') + \left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\right)' - \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\right)''\right]\alpha_m'' +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial b_m}\right)' - \left(\frac{\partial u_m}{\partial b_m}\right)''\right]\beta_m'' + \left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial c_m}\right)' - \left(\frac{\partial u_m}{\partial c_m}\right)''\right]\gamma_m'' + (F_m)' - (F_m)''$$

при начальных условиях

$$\alpha_m' - \alpha_m'' = 0, \quad \beta_m' - \beta_m'' = 0, \quad \gamma_m' - \gamma_m'' = 0 \quad \text{при } \tau = t$$

В силу неравенств (20), (20a) и (24) опять получим оценки

$$\left|\left(\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\, \partial y}\right)' - \left(\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\, \partial y}\right)''\right|, \ldots, \left|\left(\frac{\partial^2 c_m}{\partial x\, \partial y}\right)' - \left(\frac{\partial^2 c_m}{\partial x\, \partial y}\right)''\right| \leqslant MK_4^* d^\lambda (t-\tau) \tag{24a}$$

и аналогично для других производных. Составим теперь разность

$$\left[\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\, \partial y}\right]' - \left[\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\, \partial y}\right]'' = \alpha_m(x', y', z', t, \tau_m') - \alpha_m(x'', y'', z'', t, \tau_m'')$$

где

$$\tau_m' = \tau_m(x', y', z', t), \qquad \tau_m'' = \tau_m(x'', y'', z'', t)$$

Последнюю разность представим в следующем виде:

$$\alpha_m(x', y', z', t, \tau_m') - \alpha_m(x'', y'', z'', t, \tau_m'') = \alpha_m(x', y', z', t, \tau_m') -$$

$$- \alpha_m(x'', y'', z'', t, \tau_m') + \alpha_m(x'', y'', z'', t, \tau_m') - \alpha_m(x'', y'', z'', t, \tau_m'')$$

Но в силу неравенств (24a) первая разность в правой части последнего равенства по абсолютному значению остается меньше, чем $MK_4^* d^\lambda (t-\tau)$, а в силу неравенств (20), (20a) и (22a) из уравнений (21a) вытекает, что $\partial\alpha_m / \partial\tau$ ограничена, поэтому вторая разность в правой части последней формулы по абсолютному значению будет меньше, чем $MK_5^*(\tau_m' - \tau_m'')$. Таким образом, на основании оценки (25) можем написать

$$\left|\left[\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\, \partial y}\right]' - \left[\frac{\partial^2 a_m}{\partial x \partial y}\right]''\right| < MK_7^* d^\lambda \tag{26a}$$

Далее, так как

$$[\xi_m] = \xi_m\{a_m(x, y, z, t, \tau_m(x, y, z, t)),\ b_m,\ c_m,\ \tau_m(x, y, z, t)\}$$

известна, причем заданные значения этой функции удовлетворяют условию Липшица, кроме того, $[\partial\xi_m/\partial x]$ также заданы и удовлетворяют условию Гельдера, то в силу (25) легко найдем неравенства

$$|[\xi_m]' - [\xi_m]''| \leqslant K_9\, d, \qquad \left|\left[\frac{\partial\xi_m}{\partial x}\right]' - \left[\frac{\partial\xi_m}{\partial x}\right]''\right| \leqslant K_{10} d^{\lambda} \tag{28}$$

Из формул (5) и из оценок (26), (26а), (28) ясно, что производные по координатам функции $\xi_m(x, y, z, t)$, $\eta_m(x, y, z, t)$, $\zeta_m(x, y, z, t)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ.

Теперь из формулы (16) следует, что функция $\psi_m(x, y, z, t)$ имеет вторые производные по координатам, непрерывные и удовлетворяющие условию Гельдера с показателем λ. А тогда функции $\tilde{u}_m(x, y, z, t)$, $\tilde{v}_m(x, y, z, t)$, $\tilde{w}_m(x, y, z, t)$, определенные формулами (17), имеют непрерывные вторые производные по координатам, удовлетворяющие условию Гельдера. Наконец, функция $\varphi_{m+1}(x, y, z, t)$, определенная формулой (18), будет иметь непрерывные производные третьего порядка по координатам x, y, z, удовлетворяющие условию Гельдера.

Отсюда следует, наконец, что функции u_{m+1}, v_{m+1}, w_{m+1}, определенные формулами (19), имеют непрерывные производные второго порядка по координатам, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем λ.

Переходим теперь к доказательству сходимости полученного процесса. Пусть в m-ом приближении мы получим для объема V и для некоторого промежутка времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ оценки

$$|u_m(x, y, z, t) - u_{m-1}(x, y, z, t)| \leqslant N, \quad |v_m - v_{m-1}| \leqslant N, \quad |w_m - w_{m-1}| \leqslant N$$
$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x} - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x}\right| \leqslant N, \quad \left|\frac{\partial u_m}{\partial y} - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial z}\right| \leqslant N, \ldots, \left|\frac{\partial w_m}{\partial z} - \frac{\partial w_{m-1}}{\partial z}\right| \leqslant N$$
$$\left|\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2}\right| \leqslant N, \quad \left|\frac{\partial^2 u_m}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x\,\partial y}\right| \leqslant N, \ldots \tag{29}$$

Исходя из этих оценок, получим оценки для разностей типа

$$|u_{m+1} - u_m|, \quad \left|\frac{\partial u_{m+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_m}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 u_{m+1}}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u_m}{\partial x\,\partial y}\right|, \ldots$$

Мы имеем прежде всего равенства

$$a_m = x + \int_t^{\tau} u_m(a_m, b_m, c_m, \tau)\, d\tau$$
$$a_{m-1} = x + \int_t^{\tau} u_{m-1}(a_{m-1}, b_{m-1}, c_{m-1}, \tau)\, d\tau$$

и, следовательно,

$$a_m - a_{m-1} = \int_t^{\tau} [u_m(a_m, b_m, c_m, \tau)] - u_{m-1}(a_{m-1}, b_{m-1}, c_{m-1}, \tau)]\, d\tau$$

Помня, что мы имеем неравенства вида

$$\left|\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial u_{m-1}}{\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial u_{m-1}}{\partial z}\right| < M$$

и пользуясь (29), получим для $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$

$$|a_m - a_{m-1}| \leqslant \int_{\tau}^{t} [N + M(|a_m - a_{m-1}| + |b_m - b_{m-1}| + |c_m - c_{m-1}|)]\, d\tau$$

Отсюда легко получить оценки вида

$$|a_m(x, y, z, t, \tau) - a_{m-1}(x, y, z, t, \tau)| \leqslant \frac{N}{3M}[e^{3M(t-\tau)} - 1]$$

или

$$|a_m(x, y, z, t, \tau) - a_{m-1}(x, y, z, t, \tau)| \leqslant K_{11}N(t-\tau) \tag{30}$$

Точно так же нетрудно оценить разности вида

$$\frac{\partial a_m}{\partial x} - \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x}$$

Мы имеем

$$\frac{\partial a_m}{\partial x} = 1 + \int_t^\tau \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial x} + \frac{\partial u_m}{\partial b_m}\frac{\partial b_m}{\partial x} + \frac{\partial u_m}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial x}\right)d\tau \tag{31}$$

Заметим далее, что в силу (29)

$$\left|\frac{\partial u_m(a_m, b_m, c_m, \tau)}{\partial a_m} - \frac{\partial u_{m-1}(a_m, b_m, c_m, \tau)}{\partial a_m}\right| \leqslant N$$

и что в силу (30) и того, что функция $\partial u_{m-1}/\partial x$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\left|\frac{\partial u_{m-1}(a_m, b_m, c_m, \tau)}{\partial a_m} - \frac{\partial u_{m-1}(a_{m-1}, b_{m-1}, c_{m-1}, \tau)}{\partial a_{m-1}}\right| \leqslant MN|t-\tau|K_{12}$$

Но из (31) следует

$$\frac{\partial a_m}{\partial x} - \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x} = \int_t^\tau \left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m} - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial a_{m-1}}\right)\frac{\partial a_m}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_m}{\partial b_m} - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial b_{m-1}}\right)\frac{\partial b_m}{\partial x} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial u_m}{\partial c_m} - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial c_{m-1}}\right)\frac{\partial c_m}{\partial x} + \frac{\partial u_{m-1}}{\partial a_{m-1}}\left(\frac{\partial a_m}{\partial x} - \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x}\right) +$$

$$\left. + \frac{\partial u_{m-1}}{\partial b_{m-1}}\left(\frac{\partial b_m}{\partial x} - \frac{\partial b_{m-1}}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_{m-1}}{\partial c_{m-1}}\left(\frac{\partial c_m}{\partial x} - \frac{\partial c_{m-1}}{\partial x}\right)\right]d\tau$$

В силу предыдущих оценок мы выводим отсюда

$$\left|\frac{\partial a_m}{\partial x} - \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x}\right| \leqslant \int_\tau^t \left\{(N + MN(t-\tau)K_{12})K_{13} + \right.$$

$$\left. + M\left(\left|\frac{\partial a_m}{\partial x} - \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial b_m}{\partial x} - \frac{\partial b_{m-1}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial c_m}{\partial x} - \frac{\partial c_{m-1}}{\partial x}\right|\right)\right\}d\tau$$

и далее

$$\left|\frac{\partial a_m}{\partial x} - \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x}\right| < K_{14}N(t-\tau) \tag{32}$$

Дадим теперь аналогичные оценки для функции $[a_m]$. Для этого нужно прежде всего оценить разность

$$\tau_m(x, y, z, t) - \tau_{m-1}(x, y, z, t)$$

Пусть $\tau_m > \tau_{m-1}$, тогда τ_m есть решение уравнения

$$\Psi(a_m(x, y, z, t, \tau_m), b_m(x, y, z, t, \tau_m), c_m(x, y, z, t, \tau_m)) = 0$$

В $m-1$-ом приближении точка с координатами x, y, z в момент t будет иметь в момент τ_m координаты

$$a_{m-1}(x, y, z, t, \tau_m), b_{m-1}(x, y, z, t, \tau_m), c_{m-1}(x, y, z, t, \tau_m)$$

причем по неравенствам (30)

$$|a_m(x, y, z, t, \tau_m) - a_{m-1}(x, y, z, t, \tau_m)| \leqslant K_{11} N(t - t_0) \tag{33}$$

Но ясно, что

$$\tau_{m-1}(x, y, z, t) = \tau_{m-1}\{a_{m-1}(x, y, z, t, \tau_m), b_{m-1}(x, y, z, t, \tau_m)$$
$$c_{m-1}(x, y, z, t, \tau_m), \tau_m(x, y, z, t)\}$$

и, кроме того, очевидно, что

$$\tau_m(x, y, z, t) = \tau_{m-1}\{a_m(x, y, z, t, \tau_m), b_m(x, y, z, t, \tau_m)$$
$$c_m(x, y, z, t, \tau_m), \tau_m(x, y, z, t)\}$$

Принимая теперь во внимание ограниченность производных $\partial\tau_{m-1}/\partial x$, $\partial\tau_{m-1}/\partial y$, $\partial\tau_{m-1}/\partial z$ и оценки (33), находим

$$|\tau_m(x, y, z, t) - \tau_{m-1}(x, y, z, t)| \leqslant K_{15} N(t - t_0) \tag{34}$$

Такая же оценка получится и для случая $\tau_m < \tau_{m-1}$. Случай $\tau_m = \tau_{m-1}$, очевидно, не требует рассмотрения. Теперь без всякого труда получаются оценки вида

$$|[a_m] - [a_{m-1}]| \leqslant K_{16} N(t - t_0), \qquad \left|\left[\frac{\partial a_m}{\partial x}\right] - \left[\frac{\partial a_{m-1}}{\partial x}\right]\right| \leqslant K_{17} N(t - t_0) \tag{35}$$

Оценим теперь изменения составляющих вихря при переходе от $m-1$-го к m-му приближению. Мы имеем

$$[\xi_m] - [\xi_{m-1}] = \xi([a_m], [b_m], [c_m], \tau_m) - \xi([a_{m-1}]\,[b_{m-1}], [c_{m-1}], \tau_{m-1})$$

Но по условию заданные значения ξ удовлетворяют условию Липшица Пользуясь еще оценками (34) и (35), получим

$$|[\xi_m] - [\xi_{m-1}]| \leqslant K_{18} N(t - t_0)$$

Теперь из формулы (15) сразу следуют оценки

$$|\xi_m(x, y, z, t) - \xi_{m-1}(x, y, z, t)| \leqslant K_{19} N(t - t_0)$$

Совершенно аналогично можно оценить

$$\left|\frac{\partial^2 a_m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_{m-1}}{\partial x^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 a_{m-1}}{\partial x\,\partial y}\right|, \ldots$$

Для этого при помощи формулы (31) напишем

$$\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 a_{m-1}}{\partial x\,\partial y} = \int_t^\tau \Big[\left(\frac{\partial u_m}{\partial a_m} - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial a_{m-1}}\right)\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial u_m}{\partial b_m} - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial b_{m-1}}\right)\frac{\partial^2 b_m}{\partial x\,\partial y} +$$
$$+ \left(\frac{\partial u_m}{\partial c_m} - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial c_{m-1}}\right)\frac{\partial^2 c_m}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial u_{m-1}}{\partial a_{m-1}}\left(\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 a_{m-1}}{\partial x\,\partial y}\right) +$$
$$+ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial b_{m-1}}\left(\frac{\partial^2 b_m}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 b_{m-1}}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{\partial u_{m-1}}{\partial c_{m-1}}\left(\frac{\partial^2 c_m}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 c_{m-1}}{\partial x\,\partial y}\right)\Big]\,d\tau + \int_t^\tau F\,dt$$

где F содержит разности вторых производных от u_m и u_{m-1} и первых производных от a_m, b_m и c_m. Поэтому в силу (29) получим оценку, аналогичную оценке (32), т. е.

$$\left|\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 a_{m-1}}{\partial x\,\partial y}\right| \leqslant K_{14}{}^* N(t - \tau)$$

В силу формулы (34) также легко получить оценки вида

$$\left|\left[\frac{\partial^2 a_m}{\partial x\,\partial y}\right]-\left[\frac{\partial^2 a_{m-1}}{\partial x\,\partial y}\right]\right|\leqslant K_{17}{}^*N\,(t-t_0)$$

$$\left|\left[\frac{\partial \xi_m}{\partial x}\right]-\left[\frac{\partial \xi_{m-1}}{\partial x}\right]\right|\leqslant K_{18}{}^*N\,(t-t_0)$$

и тогда из формулы (15) получим

$$\left|\frac{\partial \xi_m}{\partial x}-\frac{\partial \xi_{m-1}}{\partial x}\right|\leqslant K_{19}{}^*N\,(t-t_0)$$

Исходя отсюда, пользуясь формулой (16), находим

$$\left|\frac{\partial \psi_m}{\partial x}-\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial x}\right|\leqslant K_{20}{}^*N\,(t-t_0)$$

$$\left|\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 \psi_{m-1}}{\partial x\,\partial y}\right|\leqslant K_{20}{}^*N\,(t-t_0)$$

Формулы (17) показывают затем, что

$$|\tilde{u}_m(x, y, z, t)-\tilde{u}_{m-1}(x, y, z, t)|\leqslant K_{21}N\,(t-t_0) \tag{36}$$

$$\left|\frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x}-\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x}\right|\leqslant K_{21}N\,(t-t_0), \qquad \left|\frac{\partial^2 \tilde{u}_m}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 \tilde{u}_{m-1}}{\partial x\,\partial y}\right|\leqslant K_{21}N\,(t-t_0)$$

Наконец, из формулы (18) находим оценки вида

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x}-\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right|\leqslant K_{22}N\,(t-t_0)\\ \left|\frac{\partial^2 \varphi_{m+1}}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x\,\partial y}\right|\leqslant K_{22}N\,(t-t_0)\\ \left|\frac{\partial^3 \varphi_{m+1}}{\partial x^2\,\partial y}-\frac{\partial^3 \varphi_m}{\partial x^2\,\partial y}\right|\leqslant K_{22}N\,(t-t_0)\end{gathered} \tag{37}$$

Принимая все это во внимание и пользуясь формулами (19), находим, что

$$|u_{m+1}(x, y, z, t)-u_m(x, y, z, t)|\leqslant K_{23}N\,(t-t_0) \tag{38}$$

$$\left|\frac{\partial u_{m+1}}{\partial x}-\frac{\partial u_m}{\partial x}\right|\leqslant K_{23}N\,(t-t_0), \qquad \left|\frac{\partial^2 u_{m+1}}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u_m}{\partial x\,\partial y}\right|\leqslant K_{23}N\,(t-t_0)$$

Выберем теперь промежуток времени $t-t_0$, достаточно малый, чтобы выполнялось условие

$$K_i\,(t-t_0)<\delta<1, \quad i=1, 2, \ldots 23 \tag{39}$$

и рассмотрим ряды

$$u_0+(u_1-u_0)+\ldots$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+\ldots, \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}\right)+\ldots \tag{40}$$

В силу оценок (38) и (39), мажоранта рядов (40) будет иметь вид:

$$N\,(1+\delta+\delta^2+\ldots) \tag{41}$$

Но сумма в скобках выражения (41) есть убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, ряды (40) сходятся абсолютно и равномерно в области V и существуют пределы последовательностей

$$u_m, \ \frac{\partial u_m}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 u_m}{\partial x\, \partial y}, \ldots$$

представляющие собой непрерывные функции; вторые производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ.

Очевидно, эти пределы удовлетворяют соотношениям (9), где $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{w}$, φ — значения, определяемые формулами (5), (6), (8) и (10). В самом деле, в силу формул (36) и (37) существуют пределы последовательностей

$$\widetilde{u}_m, \ \frac{\partial \widetilde{u}_m}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 \widetilde{u}_m}{\partial x\, \partial y}, \ldots, \ \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 \varphi_{m+1}}{\partial x\, \partial y}, \ \frac{\partial^3 \varphi_{m+1}}{\partial x^2\, \partial y}, \ldots$$

и, как вытекает из доказанного положения о сходимости процесса, эти пределы достигаются равномерно. Поэтому равенства (15), (16), (17) и (18) в пределе при $m \to \infty$ совпадут соответственно с равенствами (5), (6), (8) и (10). Если теперь перейдем к пределу в соотношениях (19), получим

$$\lim_{m\to\infty} u_{m+1} = \widetilde{u} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Нетрудно проверить, что найденные значения u, v, w единственны. В самом деле, пусть u^*, v^*, w^* — значения компонентов скорости, удовлетворяющие соотношениям (9) при соблюдении равенств (5), (6), (8) и (10). Рассмотрим разность

$$u - u^* = \widetilde{u} - \widetilde{u}^* + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \varphi^*)$$

$\varphi - \varphi^*$ — гармоническая функция, нормальная производная которой обращается в нуль на границе, поэтому будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \varphi^*) = 0$$

Функции $\widetilde{u}$, $\widetilde{u}^*$ определяются формулами (8) при соответствующих значениях вихря и гармонической функции ψ. Согласно равенств (5), $\xi = \xi^*$, $\eta = \eta^*$, $\varepsilon = \varepsilon^*$ в области V, а ψ и ψ^* выражаются формулой (6) при одном и том же значении ω_n', поэтому производные функции ψ по координатам будут равны нулю в области V. Следовательно, формулы (8) дадут $\widetilde{u} = \widetilde{u}^*$ и получим окончательно $u - u^* = 0$, и аналогично для двух других компонентов скорости.

Остается доказать эквивалентность решения системы уравнений (5), (6), (8), (9) и (10) с решением первоначальной системы (1) при заданных граничных и начальных условиях.

Сперва покажем, что скорость, определенная формулами (5), (6), (8), (9) и (10), удовлетворяет заданным граничным условиям.

В силу формулы (10) производная $\partial\varphi/\partial n$ принимает на границе значение, равное $q_n - \widetilde{q}_n$, поэтому из формул (9) вытекает, что нормальная компонента вектора скорости q будет принимать на границе S заданное значение q_n.

Далее имеем $x = a$, $y = b$, $z = c$ при $t = \tau$ и из формул (5) имеем

$$\xi(a, b, c, \tau) = [\xi], \qquad \eta(a, b, c, \tau) = [\eta], \qquad \zeta(a, b, c, \tau) = [\zeta]$$

Отсюда видно, что удовлетворяется также граничное условие для вихря на поверхности S_1.

Рассмотрим вопрос удовлетворения начальных условий. Воспользуемся формулами (11). Из граничного условия для φ_1 видно, что в начальный момент $\partial\varphi_1/\partial n = 0$ на границе, поэтому $\varphi_1(x, y, z, t_0) = \text{const}$ и из формул (11) получим

$$u_1(x, y, z, t_0) = u_0(x, y, z)$$

Переходя ко второму приближению, заметим, что в силу формулы (15) имеем

$$\xi_1(x, y, z, t_0) = \xi_0(x, y, z), \qquad \eta_1(x, y, z, t_0) = \eta(x, y, z), \ldots$$

Поэтому формула (16) даст

$$\psi_1(x, y, z, t_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S G_e(x, y, z, x', y', z')\,\omega_{0n}'\,dS'$$

и из равенства (17) получим

$$\tilde{u}_1(x, y, z, t_0) = u_0(x, y, z).$$

Из последней формулы видно, что $\tilde{q}_{1n}(x, y, z, t_0) = q_{0n}$, и из равенства (18) будем иметь $\varphi_2(x, y, z, t_0) = \text{const}$. Подставляя это значение в равенство (9), получим $u_2(x, y, z, t_0) = u_0(x, y, z)$. Продолжением этого процесса приближения нетрудно установить, что $u_{m+1}(x, y, z, t_0) = u_0(x, y, z)$ при любом значении m, что в пределе даст

$$u(x, y, z, t_0) = u_0(x, y, z)$$

Остается доказать, что компоненты скорости, определенные формулами (5), (6), (8), (9) и (10), удовлетворяют уравнениям (1).

Из формул (9) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \tag{42}$$

Воспользуемся формулами (8) и составим расхождение скорости $\tilde{q}$; будем иметь

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = \int\limits_S \left\{\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z'}\beta' - \frac{\partial\psi'}{\partial y'}\gamma'\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\gamma' - \frac{\partial\psi'}{\partial z'}\alpha'\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\alpha' - \frac{\partial\psi'}{\partial x'}\beta'\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS' =$$

$$= \int\limits_S \left\{\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi'}{\partial z'}\right)\right]\alpha' + \left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi'}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\right)\right]\beta' + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\right)\right]\gamma'\right\} dS'$$

В последней формуле под интегралом имеем проекцию на нормаль вихря вектора с компонентами

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

поэтому поверхностный интеграл будет равняться нулю и в силу (42) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

т. е. удовлетворяется четвертое уравнение системы (1).

Далее уравнениями (2) определяются параметры Лагранжа в движении со скоростью q.

Как известно из основных уравнений гидродинамики, первые три уравнения системы (1) в параметрах Лагранжа имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a}&=\frac{\partial \Pi^*}{\partial a}+u_0\\
\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial b}&=\frac{\partial \Pi^*}{\partial b}+v_0\\
\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial c}&=\frac{\partial \Pi^*}{\partial c}+w_0
\end{aligned}\tag{43}$$

где

$$\frac{\partial x}{\partial t}=u,\qquad \frac{\partial y}{\partial t}=v,\qquad \frac{\partial z}{\partial t}=w,\qquad \Pi^*=\int_{t_0}^{t}\left(U-\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)dt$$

Мы показали, что u, v, w имеют непрерывные производные второго порядка относительно координат, удовлетворяющие условию Гельдера. Покажем теперь, что x, y, z также имеют непрерывные производные второго порядка относительно a, b, c.

Для этого воспользуемся формулами (2), откуда будем иметь

$$a=x+\int_t^{\tau}u(a,b,c,\tau)\,d\tau\quad\text{или}\quad x=a-\int_t^{\tau}u(a,b,c,\tau)\,d\tau$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}=-\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial b}\int_t^{\tau}u\,d\tau$$

и аналогично для других производных. Следовательно, x, y, z имеют непрерывные вторые производные относительно a, b, c.

Уравнения (5) получаются из системы (43) путем перекрестного дифференцирования и последующего разрешения полученной системы относительно ξ, η, ζ. Но из формул (9) имеем

$$\xi=\tilde{\xi},\qquad \eta=\tilde{\eta},\qquad \zeta=\tilde{\zeta}$$

а согласно доказанному выше начальные значения $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ равны соответственно u_0, v_0, w_0, поэтому при выполнении равенств (5), (8) будет справедливой следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial a}+\tilde{v}\frac{\partial y}{\partial a}+\tilde{w}\frac{\partial z}{\partial a}&=\frac{\partial \tilde{\Pi}^*}{\partial a}+u_0\\
\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial b}+\tilde{v}\frac{\partial y}{\partial b}+\tilde{w}\frac{\partial z}{\partial b}&=\frac{\partial \tilde{\Pi}^*}{\partial b}+v_0\\
\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial c}+\tilde{v}\frac{\partial y}{\partial c}+\tilde{w}\frac{\partial z}{\partial c}&=\frac{\partial \tilde{\Pi}^*}{\partial c}+w_0
\end{aligned}\tag{44}$$

где

$$\widetilde{\Pi}^* = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\widetilde{U} - \frac{\widetilde{p}}{\rho} + \frac{\widetilde{q}^2}{2}\right) dt$$

Уравнения (44) перепишем в параметрах Эйлера; будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \widetilde{u}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y} + \widetilde{w}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z} &= \frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial x} \\ \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t} + \widetilde{u}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} + \widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y} + \widetilde{w}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial z} &= \frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial y} \qquad \left(\widetilde{\Pi} = \widetilde{U} - \frac{\widetilde{p}}{\rho}\right) \\ \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} + \widetilde{u}\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x} + \widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial y} + \widetilde{w}\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial z} &= \frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial z} \end{aligned} \tag{45}$$

где $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{w}$ представляют собой компоненты скорости движения идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей все бесконечное пространство, принимающие в начальный момент заданные значения u_0, v_0, w_0. Следовательно, $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{p}$ есть решение задачи, рассмотренной Н. М. Гюнтером в статье [1], где он доказал, что уравнения (45) вместе с уравнением неразрывности удовлетворяются во всем бесконечном пространстве единственным значением $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{p}$, удовлетворяющим заданному начальному условию для скорости.

Подставим в систему (44) $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{w}$ из формул (9), обозначая

$$\Pi^* = \widetilde{\Pi}^* + \varphi \tag{46}$$

получим

$$\begin{aligned} u\frac{\partial x}{\partial a} + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{\partial \Pi^*}{\partial a} + u_0 \\ u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} + w\frac{\partial z}{\partial b} &= \frac{\partial \Pi^*}{\partial b} + v_0 \\ u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c} &= \frac{\partial \Pi^*}{\partial c} + w_0 \end{aligned}$$

Но последняя система совпадает с системой (43), которая со своей стороны эквивалентна первым трем уравнениям (1).

Если в равенство (46) подставим значения Π^* и $\widetilde{\Pi}^*$, будем иметь

$$\int\limits_{t_0}^{t} \left(U - \frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}\right) dt = \int\limits_{t_0}^{t} \left(U - \frac{\widetilde{p}}{\rho} + \frac{\widetilde{q}^2}{2}\right) dt + \varphi$$

откуда получим следующую формулу для определения давления:

$$p = \frac{\rho}{2}(q^2 - \widetilde{q}^2) + \widetilde{p} - \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Таким образом, построенное нами решение системы (5), (6), (8), (9) и (10) удовлетворяет уравнениям (1) и заданным начальным и граничным условиям. Поэтому теорема существования для рассматриваемого случая доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гюнтер Н. М. Об основной задаче гидродинамики. Известия физико-математического института имени В. А. Стеклова, т. II, 1926.
2. Гюнтер Н. М. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде. Известия Академии наук СССР, отд. физ.-мат. наук, 1926, стр. 1323—1348, 1503—1532; 1927, стр. 621—656, 1139—1162; 1928, стр. 9—30.
3. Lichtenstein L. Grundlagen der Hydromechanik. 1929, стр. 482—493.