Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

О НАКЛОННЫХ И ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИНАХ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

П. Я. Полубаринова-Кочина

(Москва)

Системы горизонтальных скважин находят все более широкое применение при устройстве водозаборных сооружений. Системы наклонных скважин встречаются при бурении нефти.

В результате беседы с работниками Варшавского водопровода, директором В. Войнаровичем и научными сотрудниками Вл. Скорашевским и В. Колисом, разрабатывающими новую систему водопроводных фильтров — с горизонтальными скважинами под дном реки мною была написана статья о работе горизонтальных скважин конечной длины[1]. Вопросы, рассматриваемые в настоящей статье, носят более широкий характер, охватывая случай наклонных скважин в напорных и безнапорных пластах. Дается приближенное решение известным методом источников постоянной интенсивности, распределенных вдоль линии или по поверхности.

Таким способом случай вертикальной скважины в напорном пласте был рассмотрен Ф. Самсьое [2] и позднее Н. К. Гиринским [3]. М. Маскет [4], а затем Б. И. Сегал [5] дали решение ряда задач о притоке к вертикальным скважинам в конечном пласте, подбирая переменные вдоль оси скважины распределения стоков.

Обозначим через q интенсивность стока, рассчитанную на единицу длины дуги кривой C. На элементе дуги будем иметь расход qds. Потенциал скорости, вызываемый действием стоков, распределенных вдоль линии C, находящейся в безграничном пространстве, имеет вид:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_C \frac{q(s)ds}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{0.1}$$

Здесь s — длина дуги, отсчитываемая от какой-нибудь точки линии C, ξ, η, ζ — координаты точек этой линии.

Если принять q постоянным вдоль всей линии C, то, обозначив через l длину кривой C, получим для полного расхода жидкости, притекающей к C, выражение

$$Q = lq \tag{0.2}$$

Предположим теперь, что стоки интенсивности q_0 на единицу площади распределены по поверхности Σ, элемент которой обозначим через $d\sigma$. Тогда потенциал скорости движения, вызываемого этой поверхностью стоков, будет

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{q_0(\xi, \eta, \zeta)d\sigma}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{0.3}$$

причем ξ, η, ζ — координаты точки поверхности Σ. Обозначая через S величину площади поверхности Σ, найдем, что полный расход через эту поверхность при постоянном q_0 будет

$$Q = Sq_0 \tag{0.4}$$

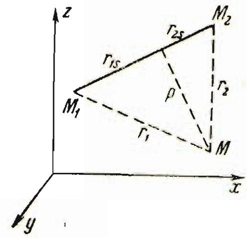
1. Наклонная скважина в безграничном пространстве. Предположим, что ось скважины представляет отрезок прямой между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Распределим вдоль этого отрезка стоки постоянной интенсивности q (на единицу длины). Потенциал скорости получающегося при этом движения будет

$$\varphi = \frac{q}{4\pi}\int_{M_1}^{M_2} \frac{ds}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{1.1}$$

где $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства, $N(\xi, \eta, \zeta)$ — точка отрезка M_1M_2. Обозначая через s длину дуги, отсчитываемую от точки M_1 вдоль отрезка M_1M_2, через l — длину отрезка M_1M_2, а через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы этого отрезка, можем написать

$$\xi = x_1 + s\cos\alpha, \quad \eta = y_1 + s\cos\beta, \quad \zeta = z_1 + s\cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{l}, \quad \cos\beta = \frac{y_2-y_1}{l}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2-z_1}{l}$$



Фиг. 1

Тогда подкоренное выражение интеграла (1.1) примет вид:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2 = r_1^2 - 2r_{1s}s + s^2 \tag{1.2}$$

где

$$r_1^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 \tag{1.3}$$

$$r_{1s} = (x-x_1)\cos\alpha + (y-y_1)\cos\beta + (z-z_1)\cos\gamma \tag{1.4}$$

Величина r_{1s} представляет проекцию отрезка M_1M на направление отрезка M_1M_2 (фиг. 1).

Теперь для (1.1) будем иметь

$$\varphi = \frac{q}{4\pi}\int_0^l \frac{ds}{\sqrt{s^2-2r_{1s}s+r_1^2}} = \frac{q}{4\pi}\ln\frac{l-r_{1s}+\sqrt{(l-r_{1s})^2+p^2}}{r_1-r_{1s}} \tag{1.5}$$

где l — длина отрезка M_1M_2:

$$l = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.6}$$

p — расстояние от точки $M(x, y, z)$ до отрезка M_1M_2:

$$p^2 = r_1^2 - r_{1s}^2 \tag{1.7}$$

Вводя в рассмотрение расстояние r_2 и проекцию отрезка MM_2 на направление M_1M_2, которую обозначим через r_{2s}, получим

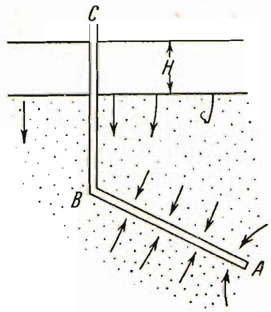
$$r_2^2 = (x_2-x)^2+(y_2-y)^2+(z_2-z)^2 \tag{1.8}$$

$$r_{2s} = (x_2-x)\cos\alpha + (y_2-y)\cos\beta + (z_2-z)\cos\gamma = l - r_{1s} \tag{1.9}$$

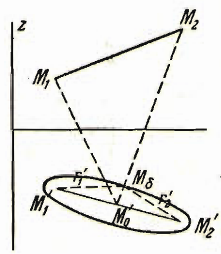
Выражение (1.5) теперь можно переписать так:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi}\ln\frac{r_2+r_{2s}}{r_1-r_{1s}} = \frac{q}{4\pi}\ln\frac{(r_1+r_{1s})(r_2+r_{2s})}{p^2} \tag{1.10}$$

2. Скважина в полупространстве с горизонтальной плоскостью равного потенциала. Представим себе, что под поверхностью воды, глубина которой равна H (фиг. 2), заложена в грунте скважина AB, из которой откачивается вода через трубу BC. Для приближенного решения задачи о дебите этой скважины, на поверхности которой потенциал скорости считается постоянным, рассмотрим схему фиг. 3. На ней показан отрезок M_1', M_2', концы которого имеют координаты $M_1'(x_1, \ y_1, -z_1)$, $M_2'(x_2, \ y_2, -z_2)$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Отразив этот отрезок относительно плоскости $z = 0$, получим отрезок M_1M_2 с концами $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Отрезок $M_1'M_2'$ нагрузим стоками, отрезок M_1M_2 — источниками интенсивности q. Получим потенциал скорости

$$\varphi(x, \ y, \ z) = \frac{q}{4\pi} \ln \frac{(r_1' + r_{1s}')(r_2' + r_{2s}')}{p'^2} - \frac{q}{4\pi} \ln \frac{(r_1 + r_{1s})(r_2 + r_{2s})}{p^2}$$

что можно переписать в виде

$$\varphi(x, \ y, \ z) = \frac{q}{4\pi} \ln \frac{(r_1' + r_{1s}')(r_2' + r_{2s}')p^2}{(r_1 + r_{1s})(r_2 + r_{2s})\, p'^2} = \frac{q}{4\pi} \ln \frac{(r_1 - r_{1s})(r_2' + r_{2s}')}{(r_2 + r_{2s})(r_1' - r_{1s}')} \tag{2.1}$$

причем r_1, r_{1s}, r_2, r_{2s} определяются формулами (1.3), (1.4), (1.8), (1.9), а для r_1', r_2', r_{1s}', r_{2s}' имеем

$$\begin{aligned} r_1' &= \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z + z_1)^2} \\ r_2' &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z + z_2)^2} \\ r_{1s}' &= (x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta - (z + z_1)\cos\gamma \\ r_{2s}' &= (x_2 - x)\cos\alpha + (y_2 - y)\cos\beta + (z + z_2)\cos\gamma \end{aligned} \tag{2.2}$$

Так как при $z = 0$ имеем $r_1 = r_1'$, $r_2 = r_2'$, $r_{1s} = r_{1s}'$, $r_{2s} = r_{2s}'$, то $\varphi(x, \ y, \ 0) = 0$. Если скважина находится в грунте с коэффициентом фильтрации k под слоем воды, глубина которой равна H, то удобно принять, что потенциал скорости на плоскости $z = 0$ равен $-kH$. При этом мы используем соотношение между потенциалом скорости φ и напором h, принятым в теории фильтрации:

$$\varphi = -kh, \qquad h = \frac{p}{\rho g} + z \tag{2.3}$$

где k — коэффициент фильтрации, p — давление, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести. Тогда вместо (2.1) напишем

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{(r_1 - r_{1s})(r_2' + r_{2s}')}{(r_2 + r_{2s})(r_1' - r_{1s}')} - kH \tag{2.4}$$

Принятие уравнения (2.4) означает, что мы считаем атмосферное давление равным нулю.

Эквипотенциальные поверхности в случае одной скважины, рассмотренной в п. 1, являются эллипсоидами вращения. В случае двух наклонных скважин близкими к эллипсоидам вращения будут лишь те поверхности равного потенциала, которые достаточно тесно охватывают отрезок $M_1'M_2'$ или M_1M_2.

Рассмотрим эквипотенциальную поверхность, охватывающую отрезок $M_1'M_2'$ настолько тесно, что поперечное сечение ее, образованное плоскостью, проходящей через середину отрезка $M_1'M_2'$, и перпендикулярное к нему, можно было бы принять за окружность. Обозначим через x_0, y_0, $-z_0$ координаты середины отрезка $M_1'M_2'$, через δ — радиус указанного почти кругового сечения. Возьмем произвольную точку M_δ этого сечения, координаты которой можно записать в виде

$$x_\delta = x_0 + \delta\cos\alpha_0, \qquad y_\delta = y_0 + \delta\cos\beta_0, \qquad z_\delta = -z_0 + \delta\cos\gamma_0 \tag{2.5}$$

Теперь в формуле (2.4) положим $M = M_\delta$, т. е. $x = x_\delta$, $y = y_\delta$, $z = z_\delta$. Тогда будем иметь приближенные соотношения

$$p'^2 = r_1'^2 - r_{1s}'^2 \approx \delta^2, \qquad r_1' = r_2' = \sqrt{\frac{l^2}{4} + \delta^2} \approx \frac{l}{2} \tag{2.6}$$

Кроме того,

$$r_{1s}' = r_{2s}' = \frac{1}{2}\, l \tag{2.7}$$

Что же касается величин r_1, r_2, r_{1s}, r_{2s}, то для их вычисления можно приближенно заменить M_δ серединой M_0' отрезка $M_1'M_2'$, т. е. x_δ, y_δ, z_δ заменить соответственно на x_0, y_0, $-z_0$. Получим

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{1}{4}\, l^2 + 4z_0z_1, \quad r_{1s} = \frac{1}{2}\, l - 4z_0(z_0 - z_1)/l \\ r_2^2 &= \frac{1}{4}\, l^2 + 4z_0z_2, \quad r_{2s} = \frac{1}{2}\, l + 4z_0(z_0 - z_1)/l \end{aligned} \tag{2.8}$$

Предположим теперь, что нам известно значение напора на выбранной эквипотенциальной поверхности. Обозначая его через φ_C, будем иметь

$$\varphi_C = -kH_C \tag{2.9}$$

Подстановка выражений (2.6) — (2.9) в формулу (2.4) дает

$$k(H - H_C) = \frac{q}{4\pi} \ln \frac{l^2\left(\sqrt{{}^1/_4 l^2 + 4z_0z_1} + 4z_0(z_0 - z_1)/l - {}^1/_2 l\right)}{\delta^2\left(\sqrt{{}^1/_4 l^2 + 4z_0z_2} + 4z_0(z_0 - z_1)/l + {}^1/_2 l\right)} \tag{2.10}$$

Отсюда для полного дебита отрезка $M_1'M_2'$, равного $Q = ql$, находим следующее выражение:

$$Q = \frac{2\pi kl\,(H - H_C)}{\ln(l/\delta) - \sigma} \tag{2.11}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{{}^1/_4 l^2 + 4z_0z_2} + 4z_0(z_0 - z_1)/l + {}^1/_2 l}{\sqrt{{}^1/_4 l^2 + 4z_0z_1} + 4z_0(z_0 - z_1)/l - {}^1/_2 l} \tag{2.12}$$

В частном случае горизонтальной скважины выражения для σ и Q упрощаются и мы получаем, полагая $z_1 = z_2 = z_0$:

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{l^2 + 16z_0^2} + l}{\sqrt{l^2 + 16z_0^2} - l}, \qquad Q = \frac{2\pi kl\,(H - H_C)}{\ln \dfrac{4lz_0}{\delta(\sqrt{l^2 + 16z_0^2} + l)}} \tag{2.13}$$

Если длина скважины настолько велика, что можно пренебречь величиной $16z_0^2$ по сравнению с l^2, то можно написать

$$Q = \frac{2\pi kl\,(H - H_C)}{\ln\,(2z_0/\delta)} \tag{2.14}$$

Это известная формула дебита отрезка длины l бесконечно длинной горизонтальной скважины.

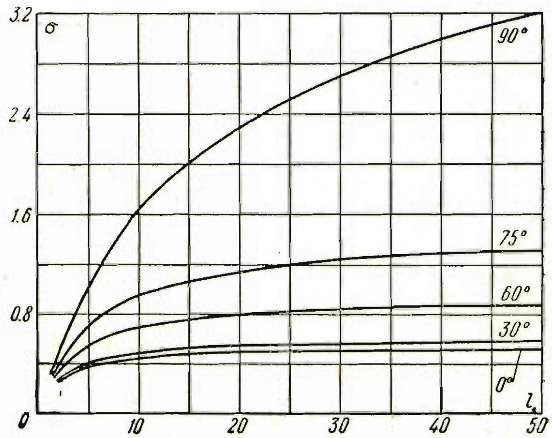
Отметим другой частный случай — вертикальной скважины, заложенной в грунте под поверхностью воды. Так как в этом случае

$$z_1 = z_0 - \tfrac{1}{2}\,l, \qquad z_2 = z_0 + \tfrac{1}{2}\,l \tag{2.15}$$

то получаем

$$\sigma = \frac{1}{2}\ln\frac{4z_0 + l}{4z_0 - l}$$

$$Q = \frac{2\pi kl\,(H - Hc)}{\ln\left(\dfrac{l}{\delta}\sqrt{\dfrac{4z_0 + l}{4z_0 - l}}\right)} \tag{2.16}$$



Фиг. 4

Для того чтобы иметь возможность сравнивать работу дрен при различных их наклонах, преобразуем формулу (2.12), вводя вместо z_1 и z_2 величины z_1 и γ по формулам

$$z_2 = z_1 + l\cos\gamma, \qquad z_0 = z_1 + \frac{l}{2}\cos\gamma \tag{2.17}$$

Кроме того, введем безразмерную величину

$$l_1 = \frac{l}{z_1} \tag{2.18}$$

Тогда σ будет зависеть от l_1 и γ:

$$\sigma = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{l_1^2 + 8\,(2 + l_1\cos\gamma)\,(1 + l_1\cos\gamma)} + 2\,(2 + l_1\cos\gamma)\cos\gamma + l_1}{\sqrt{l_1^2 + 8\,(2 + l_1\cos\gamma)} + 2\,(2 + l_1\cos\gamma)\cos\gamma - l_1} \tag{2.19}$$

Отметим предельный случай $l_1 = \infty$. Для него имеем

$$\sigma = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1 + 8\cos^2\gamma} + 2\cos^2\gamma + 1}{2\cos^2\gamma} \tag{2.20}$$

Для всех скважин, кроме горизонтальной, предельное значение σ имеет конечное значение. На фиг. 4 представлены графики зависимости σ от l_1 при различных значениях γ. Видим, что σ мало меняется для скважин, близких к вертикальным, и сильно возрастает при приближении к горизонтальному положению. Так как σ является вычитаемым в знаменателе формулы (2.11), то с увеличением σ дебит скважины увеличивается. Поэтому дебит горизонтальной скважины (при одной и той же длине скважин) больше дебита наклонной скважины, если напор на этих скважинах одинаков и если верхний конец скважины остается неизменным (так что скважина вращается вокруг него как вокруг неподвижной точки). На фиг. 4 даны значения γ лишь в пределах от 0 до 90°. При увеличении угла γ (от 90° до 180°) можно использовать те же графики, беря вместо γ величину $180° - \gamma$ и вместо $l_1 = l/z_1$ величину $l_2 = l/z_2$.

Если вращать отрезок $M_1'M_2'$ вокруг его середины (сохраняя длину), то можно написать формулу, выражающую зависимость σ от γ:

$$\sigma = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{l_0^2 + 8(2 + l_0\cos\gamma)} + 4\cos\gamma + l_0}{\sqrt{l_0^2 + 8(2 - l_0\cos\gamma)} + 4\cos\gamma - l_0} \qquad \left(l_0 = \frac{l}{z_0}\right) \tag{2.21}$$

Замечание. Мы рассматривали вместо действительной скважины, ограниченной цилиндрической поверхностью, скважину, ограниченную почти эллипсоидальной поверхностью. Можно условиться установить некоторый принцип соответствия между ними. Например, последовав примеру Н. К. Гиринского [3], рассматривавшего одну вертикальную скважину, можно цилиндрической скважине длины l и радиуса r_c привести в соответствие эллипсоидальную поверхность, у которой большая ось равна длине скважины, причем объем «эллипсоида» равен объему цилиндра. Тогда из соотношения

$$\pi r_c^2\, l = \frac{2}{3}\,\pi l b^2$$

получим, что $b = r_c\sqrt{3/2}$. Принимаем $\delta = b \approx 1.22\, r_c$.

Отметим также, что при нашем рассмотрении задачи получается приток через концы скважины. Если донного притока нет, то можно учесть частично это обстоятельство, поместив источники подходящей интенсивности на концах скважины.

3. Скважина в напорном пласте. Рассмотрим наклонную скважину в нижнем полупространстве, ограниченном сверху непроницаемой горизонтальной плоскостью $z = 0$.

Допустим, что на бесконечности имеется напор H_k (как бы соответствующий бесконечно удаленной поверхности питания).

Тогда, отражая отрезок $M_1'M_2'$ в плоскости $z = 0$ и размещая на симметричном отрезке стоки той же интенсивности, получим потенциал скорости в виде

$$\varphi = \frac{q}{4\pi}\ln\frac{(r_2 + r_{2s})(r_1' + r_{1s}')(r_2' + r_{2s}')}{p'^2(r_1 - r_{1s})} - kH_k \tag{3.1}$$

Нетрудно проверить, что на бесконечности

$$\varphi = -kH_k$$

Если, как и раньше, принять, что на поверхности скважины напор равен H_c, то подобно предыдущему получим формулу для дебита скважины

$$Q = \frac{2\pi k(H_k - H_c)\, l}{\ln(l/\delta) + \sigma} \tag{3.2}$$

где σ определяется равенством (2.12), или (2.18), или (2.21). Следовательно, график фиг. 4 также годится для рассматриваемого случая. Однако так как теперь σ стоит слагаемым в знаменателе, то с увеличением γ дебит уменьшается. Следовательно, дебит горизонтальной скважины теперь будет меньше дебита вертикальной, если сопоставлять, как и раньше, скважины одинаковой длины.

Скважина в безнапорном потоке. Исходя из решения, полученного для скважины в напорном потоке, можно получить приближенное решение для таковой в безнапорном течении. Так, если первоначально, до устройства скважины, грунтовые воды были неподвижны, имея горизонтальную плоскость свободной поверхностью, то можно использовать выражение (3.1), рассмотрев потенциал скорости:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi} \ln \frac{(r_2 + r_{2s})(r_1' + r_{1s}')(r_2' + r_{2s}')}{p'^2 (r_1 - r_{1s})} \tag{3.3}$$

Введение скважины деформирует свободную поверхность, которая должна быть одновременно поверхностью тока и поверхностью равного давления. Последнее условие записывается в виде

$$\varphi(x, y, z) + kz = 0 \tag{3.4}$$

Если свободная поверхность слабо деформирована скважиной, что будет иметь место, например, при достаточной длине или достаточном заглублении скважины, то можно принять, что уравнение свободной поверхности есть

$$z = -\frac{1}{k} \varphi(x, y, 0) \tag{3.5}$$

Так, для горизонтальной скважины приближенное уравнение свободной поверхности можно записать следующим образом:

$$z = -\frac{q}{2\pi k} \ln \frac{c - x + \sqrt{(c-x)^2 + y^2 + z_0^2}}{-c - x + \sqrt{(c+x)^2 + y^2 + z_0^2}} \tag{3.6}$$

На бесконечности ордината свободной поверхности равна нулю. Наибольшее понижение $z^{(0)}$ свободной поверхности равно в этом случае

$$z^{(0)} = -\frac{q}{\pi k} \ln \frac{c + \sqrt{c^2 + z_0^2}}{z_0} \tag{3.7}$$

Для дебита скважины можно принять формулу (3.2), считая в ней $H_k = 0$, $H_c = -z_0 + p_0/\rho g$, где p_0 — давление на поверхности скважины.

4. Кольцевая скважина. Пусть на плоскости $z = z_1$ дана окружность $\rho = a$, где

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \tag{4.1}$$

Вдоль дуги окружности распределены стоки постоянной интенсивности q. Тогда, применяя формулу (0.1), напишем

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi} \int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-z_1)^2}} \tag{4.2}$$

Полагая

$$\xi = a\cos\vartheta_0, \qquad \eta = a\sin\vartheta_0, \qquad ds = a\,d\vartheta_0$$
$$x = \rho\cos\vartheta, \qquad y = \rho\sin\vartheta \tag{4.3}$$

получим

$$\varphi = \frac{qa}{\pi} \int\limits_0^{{}^1/_2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(\rho+a)^2 + (z-z_1)^2 - 4a\rho\sin^2\vartheta}} = \frac{qa}{\pi\sqrt{(\rho+a)^2 + (z-z_1)^2}} \int\limits_0^{{}^1/_2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}$$

где

$$\frac{1}{2}\pi - \theta = \frac{1}{2}(\vartheta_0 - \vartheta), \qquad k^2 = \frac{4a\rho}{(\rho + a)^2 + (z - z_1)^2} \tag{4.4}$$

Видим, что потенциал скорости выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k^2)$ с модулем (4.4), а именно

$$\varphi = \frac{qa}{\pi\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z_1)^2}} K\left(\frac{4a\rho}{(\rho + a)^2 + (z - z_1)^2}\right) \tag{4.5}$$

Применим преобразование Ландена

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'} = \frac{\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z_1)^2} - \sqrt{(\rho - a)^2 + (z - z_1)^2}}{\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z_1)^2} + \sqrt{(\rho - a)^2 + (z - z_1)^2}}$$

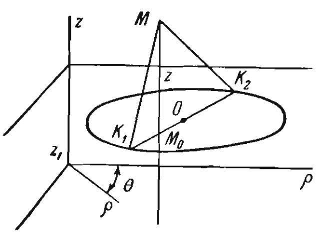
где

$$k'^2 = \frac{(\rho - a)^2 + (z - z_1)^2}{(\rho + a)^2 + (z - z_1)^2} \tag{4.6}$$

Введем обозначения

$$(z - z_1)^2 + (\rho + a)^2 = r_1^2, \qquad (z - z_1) + (\rho - a)^2 = r_2^2 \tag{4.7}$$

Тогда выражение (4.5) можно будет заменить таким, которое приводится в книге Бейтмена[6]:



Фиг. 5

$$\varphi = \frac{qa}{2\pi}\frac{1}{r_1 + r_2} K\left[\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\right)^2\right] \tag{4.8}$$

Величинам r_1 и r_2 можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Пусть дана точка $M(\rho, \vartheta, z)$. Опустим из нее перпендикуляр на плоскость $z = z_1$ (отрезок MM_0 фиг. 5) и проведем плоскость через центр окружности O и отрезок MM_0. Эта плоскость пересечет окружность по диаметру K_1K_2. Отрезки MK_1 и MK_2 и будут соответственно r_1 и r_2. Пользуясь формулой (4.5), напишем выражение потенциала скорости для кольцевой скважины, лежащей в плоскости $z = -z_1$, под водой, глубина которой равна H:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{qa}{2\pi}\Bigg\{ & \frac{1}{\sqrt{(z + z_1)^2 + (\rho + a)^2}} K\left(\frac{4a\rho}{(z + z_1)^2 + (\rho + a)^2}\right) - \\ & - \frac{1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + (\rho + a)^2}} K\left(\frac{4a\rho}{(z - z_1)^2 + (\rho + a)^2}\right)\Bigg\} - kH \end{aligned} \tag{4.9}$$

Пусть радиус поперечного сечения скважины будет δ. Это сечение не является собственно круговым, но при достаточно малом δ/a можно принять его за круговое. Полагая $z = -z_1$, $\rho = a + \delta$, $\varphi = -kH_c$, получим

$$k(H - H_c) = \frac{q}{2\pi}\left\{K\left[\frac{4a(a + \delta)}{(2a + \delta)^2}\right] - \frac{a}{2\sqrt{z_1^2 + a^2}} K\left(\frac{a^2}{z_1^2 + a^2}\right)\right\} \tag{4.10}$$

Так как

$$\frac{4a(a + \delta)}{(2a + \delta)^2} \approx 1 - \frac{\delta^2}{4a^2}$$

то можно применить формулу выражения полного эллиптического интеграла первого рода для модуля, близкого к единице:

$$K(k^2) \approx \ln(4/k') = \ln(8a/\delta)$$

Поэтому формула расхода может быть представлена в виде

$$Q = \frac{2\pi ka(H - H_c)}{\ln(8a/\delta) - \sigma}, \qquad \sigma = \frac{1}{2\sqrt{z_1^2 + a^2}} K\left(\frac{a^2}{z_1^2 + a^2}\right) \tag{4.11}$$

Для кольцевой скважины в напорном пласте выражение потенциала скорости будет отличаться от (4.9) лишь знаком у второго члена в скобках и тем, что H заменяется на H_k, а формула для дебита — лишь знаком у σ и заменой H на H_k от формулы (4.11).

Отметим, что потенциал скорости (4.5) или (4.8) кольцевой скважины может быть представлен в виде интеграла, содержащего бесселевы функции [6,7] первого рода нулевого порядка:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda(z-z_1)} J_0(\lambda\rho) J_0(\lambda a)\, d\lambda \tag{4.12}$$

При $\rho = a$, $z = z_1 + \delta$ получаем интеграл, выражающийся через полный эллиптический интеграл:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\delta} J_0^2(\lambda a)\, d\lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 + {}^1/_4\,\delta^2}} K\left(\frac{a^2}{a^2 + {}^1/_4\,\delta^2}\right) \tag{4.13}$$

Для достаточно малых значений δ / a правая часть (4.13) приводится к $(1/\pi a)\ln(8a/\delta)$. Формула для дебита скважины будет опять (4.11).

5. О системах скважин. Потенциалы скорости, вызываемые отдельными линейными стоками или источниками, можно складывать. При этом эквипотенциальные поверхности, охватывающие отрезки, загруженные источниками, будут деформироваться, однако достаточно тесно примыкающие к отрезкам поверхности будут все же близки к эллипсоидальным. Поэтому систему действительных скважин, с цилиндрическими поверхностями, в ряде случаев можно заменить системой эквипотенциальных поверхностей, охватывающих линейные источники. Так, если имеется n скважин под слоем воды глубиной H, с дебитами $Q_1, \ldots, Q_n$, то потенциал скорости, вызываемый ими, можно написать по (2.1) в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi l_i} \ln \frac{(r_1^{(i)} - r_{1s}^{(i)})(r_2'^{(i)} + r_{2s}'^{(i)})}{(r_2^{(i)} + r_{2s}^{(i)})(r_1'^{(i)} - r_{1s}'^{(i)})} - kH \tag{5.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned} r_k^{(i)} &= \sqrt{(x - x_k^{(i)})^2 + (y - y_k^{(i)})^2 + (z - z_k^{(i)})^2} \\ r_k'^{(i)} &= \sqrt{(x - x_k^{(i)})^2 + (y - y_k^{(i)})^2 + (z + z_k^{(i)})^2} \end{aligned} \qquad (k = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n) \tag{5.2}$$

причем $(x_1^{(i)},\ y_1^{(i)},\ -z_1^{(i)})$ и $(x_2^{(i)},\ y_2^{(i)},\ -z_2^{(i)})$ — координаты концов линейного стока. Величины $r_{1s}^{(i)}, \ldots, r_{2s}'^{(i)}$ определяются аналогично (1.4) и (2.2).

Для того чтобы вычислить дебиты скважин, когда известны напоры на их поверхностях, нужно поочередно выделить каждое слагаемое (5.1) и рассмотреть условие на соответствующей скважине. Например, выделим член $i = 1$ и возьмем середину первого отрезка $(x_0^{(1)},\ y_0^{(1)},\ -z_0^{(1)})$. Предположим, что малая полуось i-й скважины есть δ_i, напор на поверхности ее есть H_i. Тогда можем написать уравнение

$$k(H-H_1)=\frac{Q_1}{2\pi l_1}\ln\frac{l_1}{\delta_1}\left(\frac{\sqrt{l_1{}^2+16z_0{}^{(1)}z_1{}^{(1)}}+8z_0{}^{(1)}(z_0{}^{(1)}-z_1{}^{(1)})/l_1-l_1}{\sqrt{l_1{}^2+16z_0{}^{(1)}z_2{}^{(1)}}+8z_0{}^{(1)}(z_0{}^{(1)}-z_1{}^{(1)})/l_1+l_1}\right)^{1/2}+$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\frac{Q_i}{4\pi l_i}\ln\frac{(r_1{}^{(i)}-r_{1s}{}^{(i)})(r_2{}'^{(i)}+r_{2s}{}'^{(i)})}{(r_2{}^{(i)}+r_{2s}{}^{(i)})(r_1{}'^{(i)}+r_{1s}{}'^{(i)})} \tag{5.3}$$

где в членах, стоящих под знаком суммы, x, y, z заменяются соответственно на $x_0{}^{(1)}$, $y_0{}^{(1)}$, $-z_0{}^{(1)}$. Аналогичным образом получим еще $n-1$ уравнений, что вместе с (5.3) составит систему для определения n дебитов Q_i.

Остановимся на случае скважин одинаковой длины, расположенных равномерно по поверхности конуса, ось которого совпадает с осью z. А именно, одну скважину поместим в плоскости xOz, другие — в плоскостях, составляющих соответственно углы $\theta_0=2\pi/n$, $2\theta_0, \ldots, (n-1)\theta_0$ с плоскостью xOz. Перейдем к цилиндрическим координатам, полагая

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta, \qquad z=z \tag{5.4}$$

$$x_1{}^{(i)}=R_1\cos i\theta_0, \quad y_1{}^{(i)}=R_1\sin i\vartheta_0; \quad x_2{}^{(i)}=R_2\cos i\vartheta_0, \quad y_2{}^{(i)}=R_2\sin i\vartheta_0 \tag{5.5}$$

Тогда, принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}\cos\alpha^{(i)}&=\frac{x_2{}^{(i)}-x_1{}^{(i)}}{l}=\frac{(R_2-R_1)\cos i\vartheta_0}{l}\\ \cos\beta^{(i)}&=\frac{y_2{}^{(i)}-y_1{}^{(i)}}{l}=\frac{(R_2-R_1)\sin i\vartheta_0}{l}\end{aligned} \tag{5.6}$$

найдем для величин радиусов-векторов

$$\begin{aligned}r_1{}^{(i)2}&=\rho^2+R_1{}^2-2R_1\rho\cos(\vartheta-i\vartheta_0)+(z-z_1)^2\\ r_2{}^{(i)2}&=\rho^2+R_2{}^2-2R_2\rho\cos(\vartheta-i\vartheta_0)+(z-z_2)^2\\ [r_1{}'^{(i)}]^2&=\rho^2+R_1{}^2-2R_1\rho\cos(\vartheta-i\vartheta_0)+(z+z_1)^2\\ [r_2{}'^{(i)}]^2&=\rho^2+R_2{}^2-2R_2\rho\cos(\vartheta-i\vartheta_0)+(z+z_2)^2\end{aligned} \tag{5.7}$$

и для их проекций

$$\begin{aligned}r_{1s}^{(i)}&=\frac{R_2-R_1}{l}\{\rho\cos(\theta-i\theta_0)-R_1\}+\frac{z_2-z_1}{l}(z-z_1)\\ r_{2s}^{(i)}&=\frac{R_2-R_1}{l}\{R_2-\rho\cos(\theta-i\theta_0)\}+\frac{z_2-z_1}{l}(z_2-z)\\ r_{1s}'^{(i)}&=\frac{R_2-R_1}{l}\{\rho\cos(\theta-i\theta_0)-R_1\}-\frac{z_2-z_1}{l}(z+z_1)\\ r_{2s}'^{(i)}&=\frac{R_2-R_1}{l}\{R_2-\rho\cos(\theta-i\theta_0)\}+\frac{z_2-z_1}{l}(z+z_2)\end{aligned} \tag{5.8}$$

Выделим скважину, для которой $i=0$; для нее вычисления будут носить такой же характер, как и вычисления п. 2, причем мы подставим вместо ρ, θ, z значения

$$\rho=R_0=\frac{R_1+R_2}{2}, \qquad \theta=0, \qquad z=-z_0=-\frac{z_1+z_2}{2} \tag{5.9}$$

Окончательно получим для дебита каждой из скважин выражение

$$Q=\frac{2\pi kl\,(H-H_c)}{\ln(l/\delta)-\sigma+\Sigma} \tag{5.10}$$

где

$$\sigma=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{(R_0-R_1)^2+(z_0+z_2)^2}+{}^1/_2\,(R_0-R_1)^2/l-(z_0+z_2)(z_2-z_1)/l}{\sqrt{(R_0-R_1)^2+(z_0+z_1)^2}-{}^1/_2\,(R_0-R_1)^2/l+(z_0+z_1)(z_2-z_1)/l} \tag{5.11}$$

$$\Sigma=\sum_{i=1}^{n-1}\ln\frac{(r_1^{(i)}-r_{1s}^{(i)})\,(r_2'^{(i)}+r_{2s}'^{(i)})}{(r_2^{(i)}+r_{2s}^{(i)})\,(r_1'^{(i)}-r_{1s}'^{(i)})} \tag{5.12}$$

Здесь под $r_1^{(i)}$, $r_{1s}^{(i)}$, ... нужно понимать выражения (5.7), (5.8), в которых приняты соотношения (5.9), т. е.

$$\begin{aligned}
r_1^{(i)2}&=R_0^2+R_1^2-2R_0R_1\cos i\theta_0+(z_0+z_1)^2\\
r_2^{(i)2}&=R_0^2+R_2^2-2R_0R_2\cos i\theta_0+(z_0+z_2)^2\\
[r_1'^{(i)}]^2&=R_0^2+R_1^2-2R_0R_1\cos i\theta_0+(z_0-z_1)^2\\
[r_2'^{(i)}]^2&=R_0^2+R_2^2-2R_0R_2\cos i\theta_0+(z_0-z_1)^2
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
r_{1s}^{(i)}&=\frac{R_2-R_1}{l}(R_0\cos i\theta_0-R_1)-\frac{z_2-z_1}{l}(z_0+z_1)\\
r_{2s}^{(i)}&=\frac{R_2-R_1}{l}(R_2-R_0\cos i\theta_0)+\frac{z_2-z_1}{l}(z_0+z_2)\\
r_{1s}'^{(i)}&=\frac{R_2-R_1}{l}(R_0\cos i\theta_0-R_1)+\frac{(z_2-z_1)^2}{2l}\\
r_{2s}'^{(i)}&=\frac{R_2-R_1}{l}(R_2-R_0\cos i\theta_0)+\frac{(z_2-z_1)^2}{2l}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

При этом учтено, что $R_0-R_1=R_2-R_0$, $z_0-z_1=z_2-z_0$.

Для такой же системы скважин, находящихся в напорном пласте, формула для дебита отдельной скважины будет отличаться от формулы (5.10) знаком у σ и другим выражением Σ:

$$\Sigma=\sum_{i=1}^{n-1}\ln\frac{(r_2^{(i)}+r_{2s}^{(i)})\,(r_2'^{(i)}+r_{2s}'^{(i)})}{(r_1^{(i)}-r_{1s}^{(i)})\,(r_1'^{(i)}-r_{1s}'^{(i)})} \tag{5.15}$$

а также тем, что H нужно заменить на H_k.

6. Предельный случай — поверхность стоков. Величина Σ в формуле (5.10) характеризует интерференцию n скважин, т. е. определяет уменьшение дебита каждой скважины под влиянием остальных скважин. Представляет интерес рассмотрение предельного случая, когда линейные стоки (и соответственно источники) заполняют поверхность усеченного конуса или, в случае горизонтальных скважин, поверхность плоского кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями. Для решения этой задачи можно воспользоваться формулой (0.2).

Если имеем одну поверхность вращения вокруг оси z отрезка M_1M_2, составляющую угол γ с осью z, и M_1, M_2 имеют координаты ρ соответственно $\rho=R_1$, $\rho=R_2$, то уравнение (0.2) перепишется так:

$$\varphi(x,y,z)=\frac{q_0}{4\pi\sin\gamma}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\frac{\rho'd\rho'\,d\theta'}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{6.1}$$

Здесь принято во внимание, что элемент конической поверхности можно написать в виде

$$d\sigma = \frac{\rho' d\rho' d\theta'}{\sin\gamma} \tag{6.2}$$

и введены полярные координаты $\xi = \rho'\cos\theta'$, $\eta = \rho'\sin\theta'$.

Далее введем цилиндрические координаты $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$, а также напишем уравнение конической поверхности

$$\zeta = m\rho' + \zeta_0, \qquad m = \operatorname{cotg}\gamma \tag{6.3}$$

Получим интеграл

$$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\sin\gamma}\int_{R_1}^{R_2}\rho' d\rho' \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{(\rho+\rho')^2 + (z-\zeta_0-m\rho')^2 - 2\rho\rho'\cos(\theta-\theta')}} \tag{6.4}$$

в котором интегрирование по θ' выполняется при помощи полного эллиптического интеграла первого рода (аналогичного тому, который появляется в задаче п. 4):

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{A^2 - 2\rho\rho'\cos(\theta-\theta')}} = \frac{2K(4\rho\rho'/A^2)}{A} \tag{6.5}$$

$$A^2 = (\rho+\rho')^2 + (z-\zeta_0-m\rho')^2$$

Отметим, что это же выражение можно было бы получить сразу из (4.5), заменив в нем z_1 на $\zeta_0 + m\rho'$, a на ρ'

Теперь интеграл (6.4) приведется к интегралу по ρ':

$$\varphi(\rho, z) = \frac{q_0}{2\pi\sin\gamma}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho'}{A} K\left(\frac{4\rho\rho'}{A^2}\right) d\rho' \tag{6.6}$$

Это есть потенциал скорости течения, вызванного стоками, равномерно распределенными по поверхности усеченного конуса.

При $m = 0$ получаем плоский диск с круговым концентричным вырезом. Для него имеем

$$\varphi(\rho, z) = \frac{q_0}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho'}{\sqrt{(\rho+\rho')^2 + (z-z_0)^2}} K\left(\frac{4\rho\rho'}{\sqrt{(\rho+\rho')^2+(z-z_0)^2}}\right) d\rho' \tag{6.7}$$

В последней формуле мы заменили ζ_0 на z_0 — высоту плоскости, на которой лежит диск.

Можно получить другое выражение для потенциала скорости φ «конической» скважины, если воспользоваться формулой (4.12) для потенциала скорости кольца, заменив в ней z_1 на $\zeta_0 + m\rho'$, a на ρ'. Это выражение нужно умножить на $\rho' d\rho'$ (заменив, кроме того, q на q_0 — плотность поверхностного стока) и проинтегрировать по ρ' в пределах от R_1 до R_2. Получим

$$\varphi = \frac{q_0}{4\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda|z-\zeta_0|} I_0(\lambda\rho) \int_{R_1}^{R_2} \rho' e^{m\lambda\rho'} I_0(\lambda\rho')\, d\rho'\, d\lambda. \tag{6.8}$$

В случае плоского кольца, при $m = 0$, интегрирование по ρ' выполняется:

$$\int_{R_1}^{R_2}\rho' I_0(\lambda\rho')\,d\rho' = \left.\frac{\rho' I_1(\lambda\rho')}{\lambda}\right|_{R_1}^{R_2} = \frac{R_2 I_1(\lambda R_2) - R_1 I_1(\lambda R_1)}{\lambda}$$

где I_1 — цилиндрическая функция первого порядка. Для φ будем теперь иметь

$$\varphi(\rho, z) = \frac{q_0}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda|z-z_0|} I_0(\lambda\rho) \left[R_2 I_1(\lambda R_2) - R_1 I_1(\lambda R_1)\right] \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{6.9}$$

В частном случае $R_1 = 0$ получаем диск, нагруженный стоками интенсивности q_0: формула для него имеется, например, в книге Бейтмена [3]:

$$\varphi = \frac{q_0 R_2}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda|z-z_0|} I_0(\lambda\rho) I_1(\lambda R_2) \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{6.10}$$

В этом последнем случае нетрудно получить формулу для дебита. Рассмотрим, например, случай скважины-диска в грунте под водой глубины H, если диск находится на глубине $-z_1$ под поверхностью грунта. Потенциал скорости будет (полагаем $R_2 = R$)

$$\varphi = \frac{q_0 R}{4\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda|z+z_1|} - e^{-\lambda|z-z_1|}\right] I_0(\lambda\rho) I_1(\lambda R) \frac{d\lambda}{\lambda} - kH \tag{6.11}$$

Полагая $z = -z_1 + \delta$, $\rho = 0$ и считая, что в этой точке $\varphi = -kH_c$, принимая во внимание формулу

$$\int_0^\infty e^{-a\lambda} I_1(b\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{b} \tag{6.12}$$

найдем

$$Q = \pi R^2 q_0 \frac{4\pi^2 Rk(H - H_c)}{\sqrt{1 + \delta^2/R^2} - \delta/R - (\sqrt{1 + 4z_1^2/R^2} - 2z_1/R)} \tag{6.13}$$

При достаточно малом δ/R можно принять

$$\sqrt{1 + \delta^2/R^2} \approx 1$$

Для случая диска с вырезом, при более сложных вычислениях, можно пользоваться рядами, содержащими гипергеометрические функции [4]

$$\int_0^\infty e^{-ct} I_0(a\lambda) I_1(b\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \qquad (b > 0,\ b < \sqrt{a^2+c^2} - c)$$

$$= \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m (2m)!}{m!\,(m+1)!} \left(\frac{b}{2\sqrt{a^2+c^2}}\right)^{2m+1} F\left(\frac{1}{2}+m, -m, 1; \frac{a^2}{a^2+c^2}\right) \tag{6.14}$$

или

$$\int_0^\infty e^{-c\lambda} I_0(a\lambda) I_1(b\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \qquad (0 < a < \sqrt{b^2+c^2} - c)$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{b^2+c^2}} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m (2m)!}{(m!)^2} \left(\frac{a}{2\sqrt{b^2+c^2}}\right)^{2m} F\left(\frac{1}{2}+m, 1-m, 2; \frac{b^2}{b^2+c^2}\right) \tag{6.15}$$

В последних формулах

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

Отметим еще формулу, которая полезна при малом значении c/a

$$F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{a^2}{a^2+c^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+{}^1/_2)\,\Gamma(\beta+{}^1/_2)} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; \frac{c^2}{a^2+c^2}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \frac{2c}{\sqrt{a^2+c^2}} F\left(\alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{c^2}{a^2+c^2}\right).$$

Можно получить формулу для дебита плоской кольцевой скважины, если в формуле (6.9) положить $z = z_0 + \delta$, $R = R_0 = {}^1/_2\,(R_1 + R_2)$ и использовать затем одну из формул (6.14), (6.15). Ввиду громоздкости получающихся формул мы их не приводим.

Если z_1/R достаточно мало по сравнению с совокупностью остальных членов знаменателя формулы (6.13), то дебит не зависит от z_1 и для диска с вырезом равен разности соответствующих дебитов.

В проведении вычислений мне оказывала помощь А. Р. Шкирич.

Поступила 7 X 1955

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. О горизонтальных скважинах конечной длины. Archiwum mechaniki stosowanej, t. VII, zeszyt 3, Warszawa, 1955.
2. Samsioe A. F. Einfluss von Rohrbrunnen auf die Bewegung des Grundwassers, ZAMM 1931, Bd. 11, H. 2.
3. Гиринский Н. К. Определение коэфициента фильтрации по данным откачек при неустановившихся дебите и понижениях. М., Госгеолиздат, 1950.
4. Маскет М. Течение однородных жидкостей и газов в пористой среде (перевод с англ. М. А. Геймана, изд. 1937 г.), Гостоптехиздат, М., 1949 г.
5. Сегал Б. И. Некоторые пространственные задачи теории потенциала и их приложения. Известия АН СССР, серия матем., т. X, в. 4, 1946 г.
6. Bateman H. Partial differential Equations of mathematical Physics. Cambridge, 1932.
7. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций; перевод со 2-го англ. изд. В. С. Бермана. М., 1949.