

К ТЕОРИИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ

М. Н. К о г а н

(Москва)

Существующие в настоящее время методы расчета обтекания крыльев, по линейной теории, в общем случае весьма трудоемки. Поэтому для получения более наглядных результатов были сделаны упрощения, приведшие к так называемой теории тонких тел, применимой лишь для крыльев очень малого удлинения.

Эта теория не дает зависимости аэродинамических характеристик от чисел M набегающего потока. Однако возможность использования хорошо разработанной теории конформных отображений делает ее весьма плодотворной.

В настоящей работе исследуется возможность привлечения аппарата теории конформных отображений к решению пространственных задач обтекания крыльев в постановке более точной, чем теория тонкого тела.

§ 1. Ошибки, вносимые конформным преобразованием. Пусть в пространстве s, x, y (фиг. 1) задана некоторая поверхность вращения

$$r = f(s) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta) \quad (1.1)$$

такая, что $f(0) = 0$ и $f'(0) \neq 0$. Предположим, что функция $f(s)$ и ее производная $f'(s)$ порядка ϵ , где ϵ — некоторая малая величина.

Рассмотрим в пространстве, внешнем по отношению к поверхности (1.1), сверхзвуковое возмущенное течение, потенциал которого φ удовлетворяет уравнению

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (\beta = \sqrt{M_0^2 - 1}) \quad (1.2)$$

где M_0 — значение числа M набегающего потока, и граничным условиям

$$\varphi = 0 \quad \text{на конусе возмущений } \frac{s}{\beta} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \omega(s, \theta) \quad \text{на поверхности (1.1)} \quad (1.4)$$

Функция $\omega(s; \theta)$ предполагается обладающей степенью гладкости, необходимой и достаточной, чтобы решение задачи могло быть представлено сходящимся рядом Фурье:

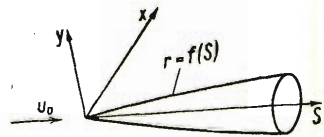
$$\varphi = \varphi_0(s, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n}(s, r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n}(s, r) \sin n\theta \quad (1.5)$$

Функции $\varphi_{1n}(s, r)$ и $\varphi_{2n}(s, r)$ удовлетворяют, очевидно, уравнениям

$$L_{in} = \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi_{in}}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{in}}{\partial r^2} - \frac{n^2}{r^2} \varphi_{in} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.6)$$

Легко проверить, что если функция ψ_{n-1} является решением уравнения $L_{n-1} = 0$, то решение уравнения $L_n = 0$ будет

$$\psi_n = \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial r} - \frac{n-1}{r} \psi_{n-1} \quad (1.7)$$



Фиг. 1

Известно, что решение уравнения $L_0 = 0$, обращающееся в нуль на конусе возмущений, имеет вид:

$$\varphi_0(s, r) = \int_0^{s-\beta r} \frac{F_0(\lambda) d\lambda}{V(s-\lambda)^2 - \beta^2 r^2} = - \int_{\operatorname{arch} \frac{s}{\beta r}}^0 F_0(s - \beta r \operatorname{ch} \sigma) d\sigma, \quad (1.8)$$

где $F_0(\lambda)$ — произвольная функция. Тогда решение уравнения $L_{in} = 0$, обращающееся в нуль на конусе возмущений, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{in} = & -1 (-\beta)^n \int_{\operatorname{arch} \frac{s}{\beta r}}^0 F_{in}^{(n)}(s - \beta r \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{ch}^n \sigma d\sigma + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \beta^{(n-k)} \frac{\alpha_k(n)}{r^k} \int_{\operatorname{arch} \frac{s}{\beta r}}^0 F_{in}^{(n-k)}(s - \beta r \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{ch}^{n-k} \sigma d\sigma \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\alpha_k(n)$ — величины, зависящие от n . Так как $\operatorname{ch} \sigma = (s - \lambda)/\beta r$, то легко видеть, что если функция φ_{in} имеет порядок A , то $\partial^2 \varphi_{in} / \partial s^2$ имеет порядок A или $A \ln r$, а $\partial^2 \varphi_{in} / \partial r^2$ и $r^{-1} \partial \varphi_{in} / \partial r$ будут порядка $A r^{-2}$. Очевидно, что таким же свойством обладает и функция φ , определяемая по уравнению (1.5). Таким образом, первый член уравнения (1.2) вблизи поверхности (1.1) имеет более высокий порядок малости, чем остальные члены. Преобразуем далее пространство s, r, θ в пространство s_1, ξ, η при помощи преобразования

$$s_1 = s, \quad \xi = \xi^*(s, r, \theta), \quad \eta = \eta^*(s, r, \theta) \quad (1.10)$$

которое в каждой из плоскостей $s = \text{const}$ является конформным преобразованием, т. е. функции ξ^* и η^* удовлетворяют уравнениям Коши—Римана

$$\frac{\partial \xi^*}{r \partial \theta} = - \frac{\partial \eta^*}{\partial r}, \quad \frac{\partial \xi^*}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \eta^*}{\partial \theta} \quad (1.11)$$

Уравнение (1.2) при этом преобразовании перейдет в

$$\frac{\beta^2}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1 \partial \xi} \xi_s^* + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1 \partial \eta} \eta_s^* + \xi_s^* \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1 \partial \xi} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \xi_s^* + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} \eta_s^* \right) + \\ & + \eta_s^* \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} \xi_s^* + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \eta_s^* \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi_{ss}^* + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \eta_{ss}^* \\ \Delta = & \xi_r^{*2} + \frac{1}{r^2} \xi_\theta^{*2} = \eta_r^{*2} + \frac{1}{r^2} \eta_\theta^{*2} \end{aligned}$$

Ограничим класс отображающих функций ξ^* и η^* функциями вида

$$\xi^* = r \cos \theta [1 + O(\varepsilon_1^2 r^{-2})], \quad \eta^* = r \sin \theta [1 + O(\varepsilon_1^2 / r^{-2})] \quad (\varepsilon_1 \leq \varepsilon) \quad (11.13)$$

Тогда $\Delta = 1 + O(\varepsilon_1^2 r^{-2})$. Потребуем далее, чтобы

$$\xi_s^* = O(\varepsilon_1^2 r^{-1}), \quad \eta_s^* = O(\varepsilon_1^2 r^{-1}) \quad (1.14)$$

Оценим теперь погрешность, даваемую заменой $\Delta^{-1} \partial^2 \varphi / \partial s^2$ на $\partial^2 \varphi / \partial s_1^2$ в уравнении (1.12). Перепишем уравнение (1.12) в виде

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = \beta \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right) \quad (1.15)$$

Пусть в условии (1.4) $\omega = O(\varepsilon)$. Тогда из (1.9) легко видеть, что

$$F_i^{(n)} = O(\varepsilon^{n+2}), \quad \varphi = O \left[\varepsilon^2 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n+2}}{r^n} (\cos n\theta + \sin n\theta) \right] = O(\varepsilon^2 \ln r)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= O(\varepsilon^2 \ln r), & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} &= O(\varepsilon^2 \ln r), & \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= O\left(\frac{\varepsilon^2}{r}\right) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= O\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2}\right), & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= O\left[\frac{\varepsilon^3}{r} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r} + \dots\right)\right] \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= O\left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta r}\right), & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2} &= O\left[\varepsilon^2 \ln \varepsilon + \frac{\varepsilon^2 \varepsilon_1^2}{\Delta r^2}\right] \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= O\left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta r}\right), & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} &= O\left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta r^2}\right), & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} &= O\left(\frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon^2 \ln r}{\Delta r^2}\right) \end{aligned}$$

Заметим, что в приведенных оценках члены, содержащие логарифм, соответствуют нулевому члену разложения (1.5). Нелиinearизированное уравнение для возмущенного потенциала скоростей можно записать в виде

$$\varphi_{rr} + \frac{\varphi_r}{r} + \frac{\varphi_{\theta\theta}}{r^2} - \beta^2 \varphi_{ss} - (\text{члены более высокого порядка}) \quad (1.16)$$

Подставляя в правую часть уравнения линеаризованное решение, найдем, что правая часть содержит члены порядка $\varepsilon^4 r^{-2}$. С другой стороны, мы видим, что правая часть уравнения (1.15) имеет порядок $(\varepsilon^2 \varepsilon_1^2 \ln r) \Delta^{-1} r^{-2}$, если в разложении (1.5) имеется член φ_0 , и $\varepsilon^2 \varepsilon_1^2 \Delta^{-1} r^{-2}$, если этого члена нет. Таким образом, если $\varphi_0 = 0$, то, отбрасывая в уравнении (1.15) правую часть уравнения, мы отбрасываем члены того же порядка, что и члены, отбрасываемые при линеаризации. Поэтому с точностью линейной теории решение уравнения (1.2) является также решением уравнения

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (1.17)$$

Условие (1.3) удовлетворяется приближенно: по (1.13) конус возмущений пространства $sr\theta$ переходит в конус возмущений пространства $s_1 \xi \eta$ с точностью до $\varepsilon_1^2 \beta^2 s^{-2}$. Условие (1.4) переходит в

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi_r^* + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \eta_r^* = \omega$$

и удовлетворяется на поверхности, в которую переходит поверхность вращения $r = f(s)$.

Предположим, что поверхность $r = f(s)$ переходит в пространстве s_1, ξ, η в поверхность тела, обтекаемого потоком газа, вектор скорости которого представляется в виде $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{k} + v_0 \alpha \mathbf{j}$, где \mathbf{i}, \mathbf{j} и \mathbf{k} — единичные векторы, направленные соответственно по осям ξ, η и s .

Направляющие косинусы нормали к поверхности будут

$$\cos(n, \xi) = + \frac{\eta_0^*}{N}, \quad \cos(n, \eta) = + \frac{\xi_0^*}{N}, \quad \cos(n, s_1) = - \frac{\eta_0^* \xi_s^* - \xi_0^* \eta_s^* + f' r \Delta}{N}$$

где

$$N^2 = \sqrt{r^2 \Delta + (\eta_\theta^* \xi_s^* - \xi_\theta^* \eta_s^* + f' r \Delta)^2}$$

Учитывая, что $f' = 0(\varepsilon)$, и условия (1.13) и (1.14) и пренебрегая величинами высшего порядка малости, получим

$$N = r \sqrt{\Delta}, \quad v_0 n = -v_0 \frac{f' r \Delta + \eta_\theta^* \xi_s^* - \eta_s^* \xi_\theta^*}{r \sqrt{\Delta}} - \frac{v_0 \xi_\theta^* \alpha}{r \sqrt{\Delta}}$$

Далее

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\eta_\theta^*}{r \sqrt{\Delta}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\xi_\theta^*}{r \sqrt{\Delta}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{f' r \Delta + \eta_\theta^* \xi_s^* - \eta_s^* \xi_\theta^*}{r \sqrt{\Delta}} \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \approx \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi_r^* + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \eta_r^* \right)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi_r^* + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \eta_r^*$$

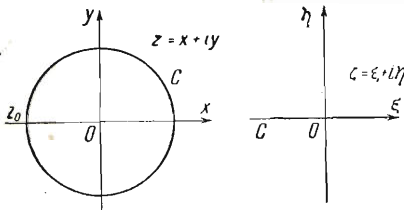
Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sqrt{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\sqrt{\Delta} \frac{v_0 n}{v_0} = f' \Delta + \frac{\eta_\theta^* \xi_s^* - \eta_s^* \xi_\theta^*}{r} + \frac{\xi_\theta^* \alpha}{r}$$

Из этого выражения видно, что условия непротекания на рассматриваемой поверхности в пространстве $s_1 \xi \eta$ не переходят, вообще говоря, при тех же условиях течения на бесконечности в условия непротекания на поверхности $r = f(s)$ пространства sxy . При проведении оценки правой части уравнения (1.15) предполагалось, что $\Delta \neq 0$. Если отображающая функция

$$(1.18)$$

$$\zeta = \zeta^*(s; z) = \xi^*(s; r; \theta) + i \eta^*(s; r; \theta)$$



Фиг. 2

где $z = x + iy$, такова, что контур C^* , в который переходит окружность C радиуса $r = f(s)$, имеет угловые точки, то в этих точках $\Delta = |\zeta_z^*|^2$ может обращаться в нуль. Пусть точка z_0 на контуре s переходит при преобразовании (1.18) в угловую точку ζ_0 контура C^* (фиг. 2). Если внешний угол контура C^* в точке ζ_0 равен τ ($0 \leq \tau \leq 2$), то вблизи точки z_0 функция (1.18) имеет вид:

$$\zeta = \zeta_0 + \text{const} (z - z_0)^\tau$$

При $0 \leq \tau \leq 1$ величина $|\zeta_z^*| \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$, а при $1 < \tau \leq 2$ величина $|\zeta_z^*| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow z_0$.

Очевидно, что при $0 \leq \tau \leq 1$ сделанные выше оценки остаются в силе, так как Δ не обращается в нуль. При $1 < \tau \leq 2$ в правой части уравнения (1.15) может проявиться особенность. Однако выражение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$$

стоящее в левой части уравнения, также содержит эту особенность, так что сделанные оценки сохраняют смысл.

§ 2. О точности линейной теории. В предыдущем параграфе показано, что ошибки, вносимые преобразованием пространства $sr\theta$ в пространство $\xi\eta s$, имеют при $\varphi_0 = 0$ тот же порядок малости, что и члены, отбрасываемые при линеаризации уравнения для потенциала скоростей.

Легко оценить величину ошибки, вносимую в решение уравнения для потенциала скоростей линеаризацией уравнений. Достаточно провести эту оценку для простейшего течения около круглого конуса. Это не уменьшает общности исследования, так как решение для конуса является составной частью решения для любого заостренного тела.

Воспользовавшись методом последовательных приближений, принимая за первое приближение линеаризованное решение и подставляя его в правую часть уравнения (1.16), получим второе приближение путем решения линейного неоднородного уравнения. Пусть круглый конус с половиной угла раствора, равной $\text{arc tg } \varepsilon$, установлен под углом $\alpha = 0$ (ε) к набегающему потоку. Решение линейной задачи можно представить в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 \cos \theta \tag{2.1}$$

где

$$\varphi_0 = \xi c_0 (\text{arc scht } t - \sqrt{1-t^2}), \quad \varphi_1 = \xi c_1 \left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{t} - t \text{ arc scht } t \right) \tag{2.2}$$

$$\left(\xi = s, \quad t = \frac{\beta r}{s} \right)$$

Подставляя решение (2.1) в правую часть уравнения (1.16) и приравнявая нулю величины нулевого и первого порядка по α , получим неоднородные уравнения второго приближения^[1], решая которые, получим второе приближение для φ_0 и φ_1 .

Продельвая несложные операции^[1], найдем, что второе приближение оставляет неизменными в выражениях для φ_0 и φ_1 , полученных из первого приближения, лишь первые члены соответственно порядка $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$ и ε^2 . С другой стороны, эти первые члены ухватываются теорией тонкого тела. Поэтому в линейной постановке единственно строгой теорией является теория тонкого тела.

Соответственно в граничных условиях должны быть отброшены квадратичные члены, а тангенсы заменены углами, так как в решении им соответствуют члены, не ухватываемые линейной теорией. Однако при расчете давления необходимо оставлять некоторые квадратичные члены, порядок которых соизмерим с оставляемыми, т. е. выражение для давления \bar{p} следует брать в виде

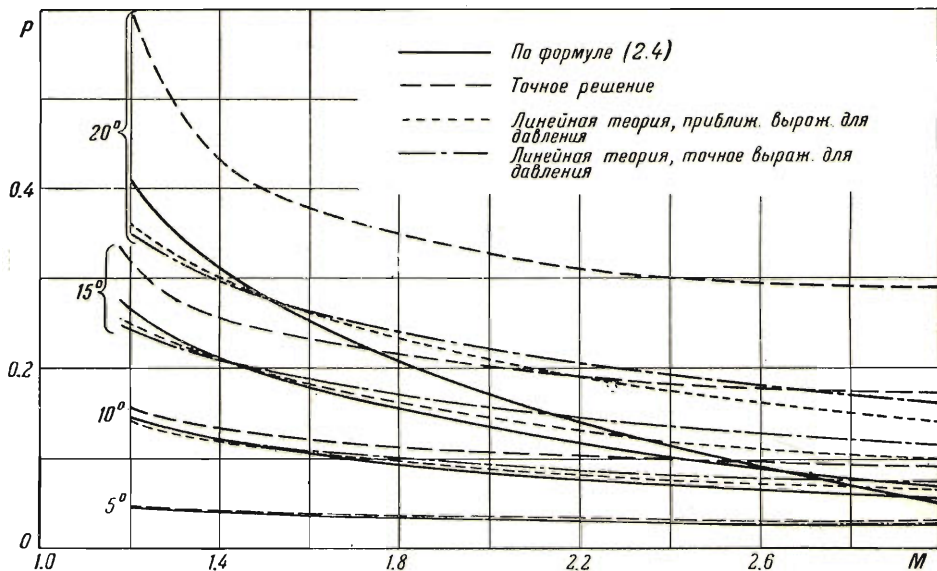
$$\bar{p}_0 = -(2\varphi_{0s} + \varphi_{0r}^2), \quad \bar{p}_1 = -2\varphi_{1s} \tag{2.3}$$

где в выражениях для φ_{0s} , φ_{0r} и φ_{1s} следует оставлять лишь члены порядка ε^2 и $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$. Тогда для давления на конусе при нулевом угле атаки получим

$$\bar{p} = C_x = 2\varepsilon^2 \ln \frac{2}{\beta\varepsilon} - \varepsilon^2 \tag{2.4}$$

На фиг. 3 приведено сравнение точности различных методов расчета сопротивления круглого конуса при нулевом угле атаки. При малых углах раствора конуса все приближенные методы хорошо согласуются с точным решением. По мере увеличения толщины конуса все методы,

основанные на линеаризации уравнений, отходят все дальше от точного решения. Различие же между методами линеаризации носит довольно случайный характер, поскольку в каждом из них произвольно оставляется часть членов более высокого порядка, а часть членов этого же порядка отбрасывается. Поэтому единственным обоснованным линейным решением является решение (2.4).



Фиг. 3

Для конуса под углом атаки линейная теория правильно определяет лишь первый член разложения по толщине порядка ϵ^2 . Тот факт, что второе приближение изменяет член порядка $\epsilon^4 \ln \epsilon$, обусловлен наличием в правой части уравнения (1.16) члена $2M^2 \varphi_{0sr} \alpha$ вида $\epsilon^2 \alpha r^{-1}$. При оценке погрешности, вносимой конформным отображением, мы видели, что правая часть при $\varphi_0 = 0$ содержит член вида $\epsilon^2 \epsilon_1^2 \Delta^{-1} r^{-2}$, которому в решении для φ_1 соответствуют члены порядка ϵ^4 . Поэтому, если какой-либо задаче в пространстве $s_1 \xi \eta$ в пространстве $s r \theta$ соответствует задача об определении течения около круглого конуса под углом атаки (т. е. $\varphi_0 = 0$), то, воспользовавшись конформным отображением этого решения в пространство $s_1 \xi \eta$, мы получим решение, первые два члена которого определены правильно, т. е. получим следующий по сравнению с теорией тонкого тела член разложения по толщине тела.

Очевидно, что сказанное будет справедливо и для неконических тел, для которых разложение (1.5) содержит также и члены с номерами, отличными от 0 и 1.

К задачам, которые могут быть решены таким образом, относятся задачи об определении течения около тел без толщины (течения около тонких крыльев малого удлинения, крестообразных оперений и тому подобные). В этом случае в разложении (1.5) отсутствует член $\varphi_0 = 0$ и решение в пространстве $s_1 \xi \eta$ будет содержать погрешность порядка ϵ^4 , точно учитывая члены порядка $\epsilon^4 \ln \epsilon$.

§ 3. Подъемная сила крыла малого удлинения. Проиллюстрируем сказанное в предыдущем параграфе на примере треугольного крыла в сверхзвуковом потоке. Рассмотрим треугольное крыло в сверхзвуковом потоке. На поверхности крыла $\partial\varphi/\partial n = -v_0\alpha$; следовательно, на поверхности эквивалентного конуса, связанного с крылом при помощи преобразований

$$\xi = r \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \cos \theta, \quad \eta = r \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin \theta \quad (3.1)$$

будет $\partial\varphi/\partial r = -2v_0\alpha \sin \theta$, что соответствует обтеканию конуса под углом атаки 2α .

Из теории конических течений хорошо известно, что потенциал на поверхности конуса с половиной угла раствора $\arctg \varepsilon$, обтекаемого под углом атаки 2α , будет

$$\varphi = 2v_0\alpha\varepsilon s \frac{\sqrt{\varepsilon^{-2} - \beta^2} - \beta^2 \varepsilon \operatorname{arch}(1/\beta\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^{-2} - \beta^2} + \beta^2 \varepsilon \operatorname{arch}(1/\beta\varepsilon)} \sin \theta \quad (3.2)$$

Переходя к переменным s_1, ξ, η , получим

$$\varphi = -2v_0\alpha\varepsilon s_1 \frac{\sqrt{\varepsilon^{-2} - \beta^2} - \beta^2 \varepsilon \operatorname{arch}(1/\beta\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^{-2} - \beta^2} + \beta^2 \varepsilon \operatorname{arch}(1/\beta\varepsilon)} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{4s_1^2\varepsilon^2}} \quad (3.3)$$

С другой стороны, на поверхности крыла точное линейное решение имеет вид:

$$\varphi = \frac{v_0\alpha}{E \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \chi}} \sqrt{s_1^2 \operatorname{ctg}^2 \chi - \xi^2} \quad (3.4)$$

где χ — угол стреловидности крыла по передней кромке и $E(x)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Согласно преобразованию (3.1) при $r_0 = \varepsilon s$

$$\operatorname{ctg} \chi = 2\varepsilon, \quad \varphi = \frac{2v_0\alpha\varepsilon s_1}{E \sqrt{1 - 4\beta^2\varepsilon^2}} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{4s_1^2\varepsilon^2}} \quad (3.5)$$

Разложим решения (3.3) и (3.5) в ряд по ε ; имеем

$$\varphi = 2v_0\alpha s_1 \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{\xi^2}{4s_1^2}} [1 + 2\beta^2\varepsilon^2 \ln \beta\varepsilon - 2\beta^2\varepsilon^2 \ln 2 + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon)]$$

по (3.3) и

$$\varphi = 2v_0\alpha s_1 \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{\xi^2}{4s_1^2}} [1 + 2\beta^2\varepsilon^2 \ln \beta\varepsilon + 2\beta^2\varepsilon^2 (\frac{1}{2} - \ln 2) + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon)]$$

по (3.5).

Таким образом, приближенное (т. е. полученное пересчетом с конуса) решение и точное решение [формула (3.5)] различаются членами порядка $\alpha\varepsilon^3$, что соответствует оценкам, сделанным в предыдущем параграфе.

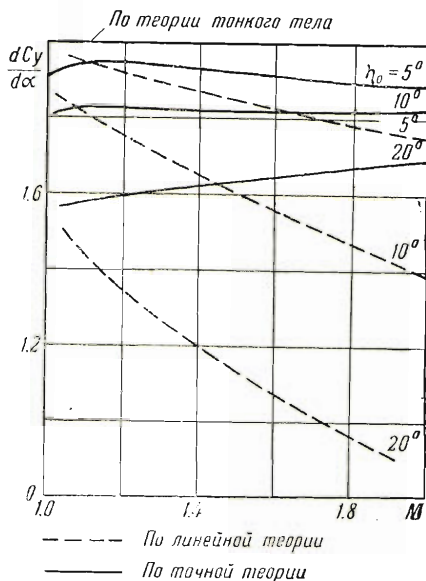
Теория тонкого тела дает лишь первый член этого разложения. Таким образом, пользуясь конформными отображениями, мы смогли учесть следующий член разложения по толщине (или размаху). Пользуясь связью между течениями у конуса и крыла, устанавливаемой конформным преобразованием (3.1), легко найдем связь между подъемной силой крыла и эквивалентного конуса:

$$C_{y_{кр}}^\alpha = \pi \operatorname{ctg} \chi C_{y_{конуса}}^\alpha \left(\frac{\operatorname{ctg} \chi}{2}\right) \quad (3.6)$$

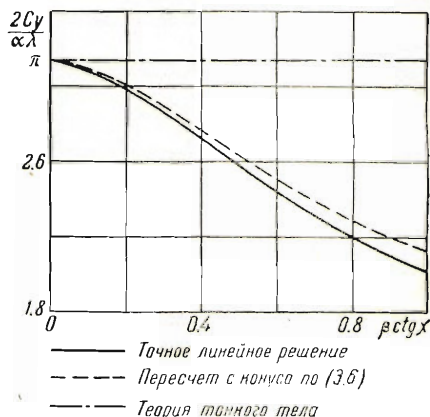
т. е. между подъемной силой крыла с углом раствора $2 \operatorname{ctg} \chi$ и подъем-

ной силой конуса с углом раствора $\text{ctg} \chi$ существует простая связь в пределах первых двух членов разложения в ряд по углу раствора конуса. При этом значение C_v^α конуса следует брать по линейной теории с точными граничными условиями не теле.

На фиг. 4 и 5 приведены значения подъемной силы соответственно для крыла и конуса.



Фиг. 4



Фиг. 5

На первый взгляд получается противоречие между поведением решений для конуса и крыла — для конуса теория тонкого тела гораздо лучше совпадает с точной (по толщине конуса) теорией, чем линейная теория; в то же время для крыла решение, полученное пересчетом результата линейной теории для конуса по формуле (3.6), гораздо лучше совпадает с точным (по отношению к удлинению крыла) линеаризированным решением, чем результат теории тонкого тела.

Однако это кажущееся противоречие легко объясняется приведенным выше анализом. Для конуса конечной (хотя и малой) толщины линейная теория добавляет по сравнению с теорией тонкого тела члены, порядок которых не ухватывается линейной теорией и поэтому носящих случайный характер. Наоборот, в случае крыла (т. е. при расчете тела без толщины) решение линеаризованной задачи для конуса под углом атаки и отображение (3.1) позволяют найти следующий член разложения в ряд по удлинению крыла, зависящий от числа M набегающего потока.

Поступила 7 IV 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Dyke. First- and Second - Oder Theory of Supersonic Flow Past Bodies of Revolution. JAS, vol 18, № 3, 1951.