Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ФОРМАХ УСТОЙЧИВЫХ ПОЛУСВОДОВ И СВОДОВ

В. В. Соколовский

(Москва)

В настоящей работе исследовано плоское предельное равновесие связной среды со свободными контурами, которое сопровождается кривыми разрыва. Рассмотрено предельное равновесие полусводов и сводов, возникающее от собственного веса, и дан прием определения кривых разрыва и свободных контуров. Окончательные результаты найдены численно, а в некоторых частных случаях даны в замкнутой форме.

§ 1. Полусводы и своды в связной среде. Рассмотрим сначала связную среду *, которая наряду со сцеплением обладает внутренним трением, и установим для такой среды предельные формы устойчивых полусводов и сводов.

Плоское предельное равновесие связной среды с объемным весом γ, коэффициентом сцепления k и углом внутреннего трения ρ, как известно[1], описывается дифференциальными уравнениями равновесия (ось y направлена вниз)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma \tag{1.1}$$

и условием предельного состояния

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{\sin^2\rho}{4}(\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2, \qquad H = k \operatorname{ctg} \rho \tag{1.2}$$

причем для компонент напряжения принято правило знаков, обычное в теории сыпучих тел: положительные нормальные напряжения вызывают сжатие, а отрицательные нормальные напряжения — растяжение.

Эту систему уравнений удобно преобразовывать путем перехода от компонент напряжения к новым переменным σ и φ по формулам

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \sigma(1 \pm \sin\rho\cos 2\varphi) - H, \qquad \tau_{xy} = \sigma\sin\rho\sin 2\varphi \tag{1.3}$$

в которых φ — угол между наибольшим главным нормальным напряжением и осью x.

Вносяв дифференциальные уравнения равновесия (1.1) выражения

* Применяемое здесь название «связная среда», в отличие от обычного «сыпучая среда», должно подчеркивать то обстоятельство, что сцепление всегда существует ($k \neq 0$), а внутреннее трение может иногда отсутствовать ($\rho = 0$).

(1.3), найдем

$$(1+\sin\rho\cos 2\varphi)\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\sin\rho\sin 2\varphi\,\frac{\partial\sigma}{\partial y}-2\sigma\sin\rho\left[\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=0$$
$$\sin\rho\sin 2\varphi\,\frac{\partial\sigma}{\partial x}+(1-\sin\rho\,\cos\,2\varphi)\frac{\partial\sigma}{\partial y}+2\sigma\sin\rho\left[\cos 2\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\sin 2\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=\gamma \qquad (1.4)$$

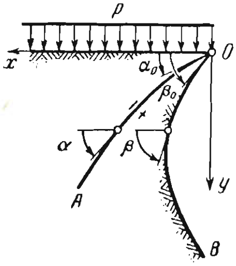
или после некоторых преобразований будем иметь

$$\left[\frac{\partial\sigma}{\partial x}\mp 2\sigma\,\operatorname{tg}\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]+\operatorname{tg}(\varphi\mp\mu)\left[\frac{\partial\sigma}{\partial y}\mp 2\sigma\,\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=\gamma\,[\operatorname{tg}(\varphi\mp\mu)\mp\operatorname{tg}\rho] \quad (1.5)$$

Полученная система уравнений принадлежит к гиперболическому типу и имеет два вещественных семейства характеристик, которые определяются известными дифференциальными уравнениями

$$dy=dx\,\operatorname{tg}(\varphi\mp\mu),\qquad d\sigma\mp 2\sigma\,\operatorname{tg}\rho\,d\varphi=\gamma\,(dy\mp\operatorname{tg}\rho\,dx) \qquad (1.6)$$

Характеристики на плоскости xy образуют два семейства линий, пересекающихся между собой под одинаковыми углами $2\mu={}^1/_2\pi-\rho$ и наклоненных к оси x под углами $\varphi\mp\mu$. Они совпадают с линиями скольжения, которые имеют большое значение в теории предельного равновесия.



Фиг. 1

Займемся определением поля напряжений и предельного контура устойчивого полусвода, переходящего в нижней части в откос, предполагая, что вдоль горизонтальной границы — положительной полуоси x задано равномерно распределенное нормальное давление $\sigma_y=p$ (фиг. 1).

Будем рассматривать небольшие значения давления p, когда предельное равновесие полусвода сопровождается кривой разрыва OA, на которой хотя и сохраняется равновесие, но нет полной непрерывности напряжений.

Условимся через α и β обозначать углы между осью x и касательными к кривым OA и OB, а через α_0 и β_0 их значения в верхней точке O.

В области xOA имеет место простейшее поле напряжений, определяемое величинами

$$\sigma=\sigma(y)=\frac{\gamma y+p+H}{1+\sin\rho},\qquad \varphi=\tfrac{1}{2}\pi \qquad (1.7)$$

или компонентами напряжения

$$\sigma_x+H=(\gamma y+p+H)\,\frac{1-\sin\rho}{1+\sin\rho},\qquad \sigma_y=\gamma y+p,\qquad \tau_{xy}=0,$$

а сетка характеристик состоит из двух семейств параллельных прямых:

$$y=\pm x\operatorname{ctg}\mu+\mathrm{const}$$

Остановимся теперь на граничных условиях вдоль кривых OA и OB, применяя систему координат tn, повернутую по отношению к системе xy на угол ε. Легко показать, что

$$\left.\begin{matrix}\sigma_t\\ \sigma_n\end{matrix}\right\}=\sigma\,[1\pm\sin\rho\cos 2\,(\varphi-\varepsilon)]-H,\qquad \tau_{tn}=\sigma\sin\rho\sin 2\,(\varphi-\varepsilon) \quad (1.8)$$

Прежде всего ясно, что вдоль кривой OA, которая образует с осью x переменный угол α, компоненты напряжения σ_n и τ_{tn} должны быть непрерывны, а компонента σ_t может иметь конечный разрыв. Следовательно, из уравнений (1.7) и (1.8) при $\varepsilon = \alpha$ получим

$$\sigma[1 - \sin\rho\cos 2(\varphi - \alpha)] = \sigma(y)(1 + \sin\rho\cos 2\alpha)$$

$$\sigma\sin 2(\varphi - \alpha) = \sigma(y)\sin 2\alpha$$

и скачок компоненты напряжения

$$\sigma_t^+ - \sigma_t^- = 2\sigma\sin\rho\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\alpha} = 4\sigma\sin\rho\frac{\cos\varphi\cos(2\alpha - \varphi)}{1 + \sin\rho\cos 2\alpha} \geqslant 0$$

Отсюда, после простых преобразований, следуют соотношения

$$\sin(2\alpha - \varphi) = \sin\rho\sin\varphi, \qquad \cos(2\alpha - \varphi) \geqslant 0,$$

устанавливающие, что

$$0 \leqslant 2\alpha - \varphi \leqslant \tfrac{1}{2}\pi$$

Кроме того будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \sigma = \sigma(y)\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\varphi - \alpha)} = \sigma(y)\frac{1 + \sin\rho\cos 2\alpha}{1 - \sin\rho\cos 2(\varphi - \alpha)} \tag{1.9}$$

Далее, очевидно, что вдоль кривой OB компоненты напряжения $\sigma_n = \tau_{tn} = 0$, а компонента $\sigma_t > \sigma_n$. Поэтому на основании приведенных выше уравнений (1.8) при $\varepsilon = \beta$, найдем

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\beta, \qquad \varphi = \beta, \qquad \sigma = \frac{H}{1 - \sin\rho} \tag{1.10}$$

В области AOB поле напряжений уже не будет простейшим и может быть найдено путем численного решения уравнений характеристик (1.6) по приведенным выше граничным данным (1.9) и (1.10) вдоль кривых OA и OB.

Значения углов $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ в верхней точке O выражаются через заданное давление p. Действительно, полагая $\alpha = \alpha_0$ и $\varphi = \beta_0$, получим

$$\sin(2\alpha_0 - \beta_0) = \sin\rho\sin\beta_0, \qquad 0 \leqslant 2\alpha_0 - \beta_0 \leqslant \tfrac{1}{2}\pi \tag{1.11}$$

а приравнивая величины σ взятые при $y = 0$ по прежним формулам (1.9) и (1.10), найдем зависимость между давлением p и углом β_0 в виде

$$p + H = H\frac{1 + \sin\rho}{1 - \sin\rho}\,\frac{\sin 2(\beta_0 - \alpha_0)}{\sin 2\alpha_0} = H\left[\frac{\sin\rho\cos\beta_0 - \sqrt{1 - \sin^2\rho\sin^2\beta_0}}{1 - \sin\rho}\right]^2 \tag{1.12}$$

Значения α_0, β_0 и p изменяются в пределах

$$0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \tfrac{1}{2}\pi - \mu, \qquad 0 \leqslant \beta_0 \leqslant \tfrac{1}{2}\pi, \qquad 0 \leqslant p \leqslant P = \frac{2H\sin\rho}{1 - \sin\rho}$$

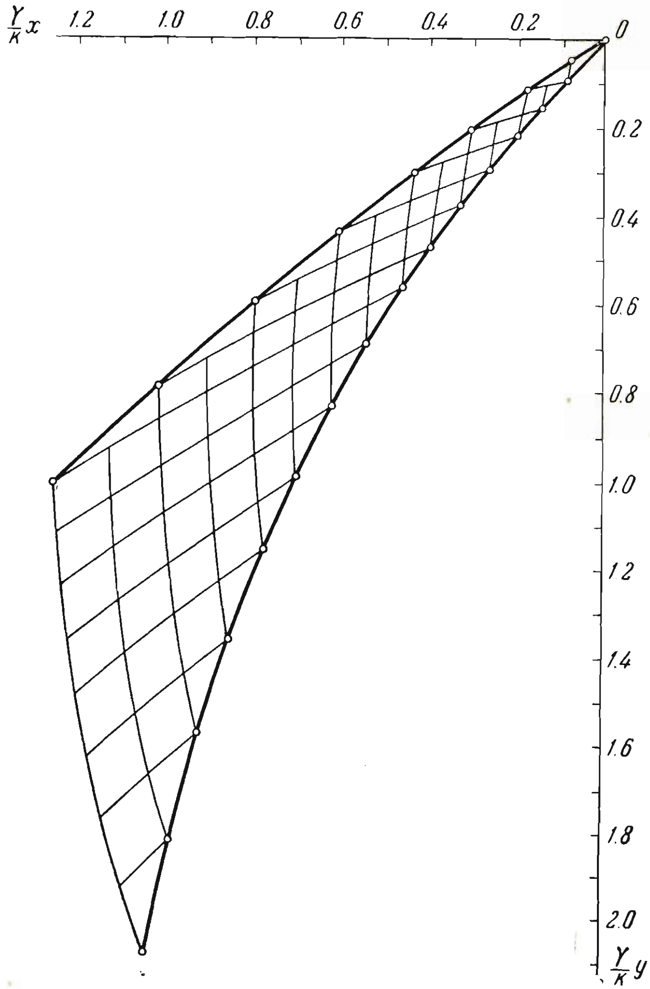
причем $\beta_0 = 0$ соответствует $p = 0$, а $\beta_0 = {}^1/_2\pi$ отвечает $p = P$.

Нетрудно показать, что при малых значениях углов α_0 и β_0 вместо (1.11) и (1.12) приближенно имеют место такие формулы:

$$\alpha_0 = (1 + \sin\rho)\frac{\beta_0}{2}, \qquad p = H\sin\rho\,\beta_0^2 = k\cos\rho\,\beta_0^2$$

Отсюда следует, что при фиксированных p и k углы α_0 и β_0 возрастают с увеличением угла внутреннего трения ρ.

Заметим, что при $\gamma = 0$ искомые кривые OA и OB становятся прямыми, а полусвод переходит в невесомый остроугольный клин из связной среды, уже рассмотренный Г. С. Шапиро [2] в несколько иной форме.



Фиг. 2

Углы $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ наклона указанных прямых OA и OB к оси x определяются теми же формулами (1.11) и (1.12), а при малых значениях — соответствующими приближенными формулами, впервые полученными Р. Шилдом [3].

Действие собственного веса полностью изменяет вид предельного равновесия связной среды. Кривая OA искривляется, так что при движении от точки O угол α увеличивается от $\alpha = \alpha_0$ до $\alpha = {}^1/_2\pi - \mu$ на бесконечности; при этом величина скачка компоненты напряжения σ_t постепенно убывает до нуля. Контур OB искривляется еще более значительно, так что при движении от точки O угол β увеличивается от $\beta = \beta_0$ до $\beta = \pi - \rho$ на бесконечности.

Особенно сильно сказывается влияние собственного веса при отсутствии нормального давления, когда $p = 0$; невесомый клин вырождается при этом в горизонтальную полупрямую — положительную полуось x, а весомый полусвод имеет лишь горизонтальную касательную в одной точке O.

В качестве примера проведено решение задачи для $\rho = {}^1/_6\,\pi$, $\beta_0 = {}^1/_4\,\pi$ обычными [1] методами численного интегрирования уравнений (1.6). Построена сетка характеристик — линий скольжения (фиг. 2); найдены безразмерные координаты $\gamma x / k$ и $\gamma y / k$ точек кривой разрыва:

$\gamma x / k = 0.08$	0.18	0.30	0.43	0.60	0.79	1.01	1.25
$\gamma y / k = 0.05$	0.12	0.21	0.30	0.44	0.59	0.79	1.01

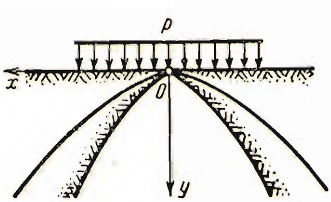
и точек искомого контура:

$\gamma x / k = 0.00$	0.09	0.14	0.20	0.27	0.33	0.40	0.46
$\gamma y / k = 0.00$	0.09	0.15	0.22	0.29	0.38	0.47	0.56
$\gamma x / k = 0.54$	0.62	0.70	0.78	0.86	0.93	1.00	1.05
$\gamma y / k = 0.70$	0.83	0.99	1.16	1.36	1.57	1.82	2.09

Заметим, что при $p = P$ углы

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{1}{2}\pi - \mu, \qquad \beta_0 = \frac{1}{2}\pi$$

а кривая разрыва вырождается в прямую, наклоненную к оси x под углом ${}^1/_2\,\pi - \mu$, т. е. переходит в характеристику, на которой нет разрывов. При этом нависающая часть отсутствует и остается лишь откос, имеющий в точке O вертикальную касательную.



Фиг. 3

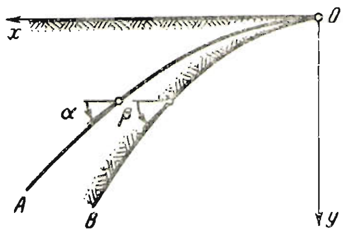
Приведенные выше рассуждения могут быть полностью применены к нахождению поля напряжений и предельного контура устойчивого свода, предполагая, что вдоль горизонтальной границы — оси x задано равномерно распределенное нормальное давление $\sigma_y = p$, поскольку такой свод состоит из двух одинаковых полусводов, симметричных относительно оси y (фиг. 3).

Подобный свод можно считать за свод обрушения, который образуется над выработкой при небольшой глубине ее заложения от горизонтальной границы. При этом действие вышележащего слоя связной среды высотой h следует рассматривать как равномерно распределенное нормальное давление $\sigma_y = p = \gamma h$, приложенное вдоль оси x.

Такой свод при очень малых глубинах заложения может замениться двумя отдельными полусводами, нависающими над выработкой.

§ 2. Некоторые приближенные решения. Построим приближенные решения в двух частных случаях, обладающих известными специфическими свойствами.

Начнем со случая, когда нормальное давление $p = 0$ и, следовательно, контур полусвода в верхней точке O имеет горизонтальную касательную (фиг. 4). Покажем, как построить приближенное решение около точки O в замкнутой форме. Положим



Фиг. 4

$$\sigma = \sigma_0 - S, \qquad \varphi = \Phi, \qquad \sigma_0 = \frac{H}{1 - \sin\rho} \tag{2.1}$$

и будем считать S, Φ и x, y малыми величинами; порядок малости x и y различен, так что y/x — мало.

Внесем в уравнения (1.4) величины (2.1), а затем, оценивая порядок различных членов, отбросим те из них, которые малы по сравнению с остальными. Приближенно получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \qquad (1 - \sin\rho)\frac{\partial S}{\partial y} = 2\sigma_0 \sin\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \gamma$$

Эти уравнения имеют такие интегралы:

$$\Phi = \Phi(x), \qquad (1 - \sin\rho) S = [2\sigma_0 \sin\rho \Phi'(x) - \gamma]\, y + f(x) \tag{2.2}$$

содержащие две произвольные функции от x.

Условия (1.9) вдоль кривой OA, определяемой уравнением $y = y_1(x)$, могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha = (1 + \sin\rho)\frac{\Phi}{2}, \qquad S = \frac{H \sin\rho \Phi^2 - \gamma y_1}{1 - \sin\rho} \tag{2.3}$$

а условия (1.10) вдоль кривой OB, даваемой уравнением $y = y_2(x)$, могут быть написаны так:

$$\frac{dy_2}{dx} = \beta = \Phi, \qquad S = 0 \tag{2.4}$$

Интегралы (2.2), после определения произвольных функций $\Phi(x)$ и $f(x)$ из условий (2.3) и (2.4), позволяют найти уравнения кривых OA и OB, а также функции Φ и S. Прежде всего нетрудно получить следующее уравнение:

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{2}{1 + \sin\rho}\frac{dy_1}{dx}$$

которое вместе с граничным условием $y_1 = y_2$ при $x = 0$ устанавливает, что

$$y_2 = \frac{2y_1}{1 + \sin\rho}, \qquad \beta = \frac{2\alpha}{1 + \sin\rho}$$

Далее легко найти

$$S = \frac{2\sigma_0 \sin\rho \Phi'(x) - \gamma}{1 - \sin\rho}\,[y - y_2(x)]$$

а также получить следующее уравнение:

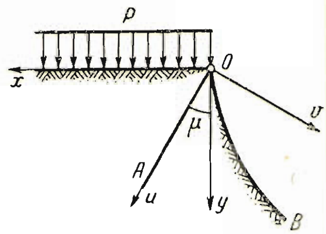
$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\alpha^2}{y_1} = \frac{\gamma(1 + \sin\rho)}{2H \sin\rho}$$

которое на основании условия $dy_1 = \alpha\, dx$ принимает такой вид:

$$\frac{d\alpha^2}{dy_1} + \frac{2\alpha^2}{y_1} = \frac{\gamma\,(1+\sin\rho)}{H\sin\rho}$$

Это уравнение может быть без труда проинтегрировано:

$$\alpha^2 = \frac{\gamma\,(1+\sin\rho)}{3H\sin\rho}\left(y_1 + \frac{C}{y_1{}^2}\right)$$



Фиг. 5

причем вследствие граничного условия $\Phi = 0$ при $y_1 = 0$ присутствующая здесь произвольная постоянная $C = 0$. Уравнение

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha = \sqrt{\frac{\gamma\,(1+\sin\rho)}{3H\sin\rho}\, y_1}$$

должно быть проинтегрировано с учетом граничного условия $y_1 = 0$ при $x = 0$.

Окончательно найдем уравнения кривых OA и OB в виде

$$y = \frac{\gamma(1+\sin\rho)x^2}{12H\sin\rho}, \qquad y = \frac{\gamma x^2}{6H\sin\rho} \tag{2.5}$$

а также получим искомые функции

$$\Phi = \frac{\gamma x}{3H\sin\rho}, \qquad S = \frac{\gamma\,(1-3\sin\rho)}{3\,(1-\sin\rho)^2}\left[\frac{\gamma x^2}{6H\sin\rho} - y\right] \tag{2.6}$$

которые приближенно верны около верхней точки O.

Приведем также углы наклона кривых OA и OB к оси x вблизи верхней точки O. Приближенно имеем

$$\alpha = \frac{\gamma(1+\sin\rho)x}{6H\sin\rho} = \frac{\gamma(1+\sin\rho)x}{6k\cos\rho}, \qquad \beta = \frac{\gamma x}{3H\sin\rho} = \frac{\gamma x}{3k\cos\rho}$$

Отсюда видно, что при фиксированных γ и k углы α и β возрастают с увеличением угла внутреннего трения ρ.

Найденное уравнение (2.5) устанавливает также предельный контур устойчивого свода, предполагая, что прямолинейная граница — ось x свободна от напряжений.

Перейдем теперь к случаю, когда нормальное давление $p = P$, контур полусвода имеет в верхней точке O вертикальную касательную (фиг. 5), а полусвод переходит в откос. Покажем как найти приближенное решение около точки O опять-таки в замкнутой форме.

Обратим внимание, что кривая разрыва заменяется прямой OA, наклоненной к оси x под углом $^1/_2\,\pi - \mu$, т. е. переходит в характеристику. Простейшее поле напряжений в области xOA на основании (1.7) при $p = P$ определяется величинами

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\gamma y}{1+\sin\rho}, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\pi, \qquad \sigma_0 = \frac{H}{1-\sin\rho}$$

Наряду с системой координат xy здесь удобно применять систему uv, повернутую относительно xy на угол $^1/_2\pi - \mu$, имея в виду, что

$$u = x\sin\mu + y\cos\mu, \qquad v = y\sin\mu - x\cos\mu$$

или обратно

$$x = u\sin\mu - v\cos\mu, \qquad y = v\sin\mu + u\cos\mu$$

Применительно к системе координат uv, уравнения (1.5) могут быть представлены так

$$-\operatorname{tg}\varphi\left[\frac{\partial\sigma}{\partial u}-2\sigma\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right]+\left[\frac{\partial\sigma}{\partial v}-2\sigma\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right]=\frac{\gamma\cos(\varphi+\mu)}{\cos\rho\cos\varphi}$$

$$\operatorname{ctg}(\varphi-\rho)\left[\frac{\partial\sigma}{\partial u}+2\sigma\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right]+\left[\frac{\partial\sigma}{\partial v}+2\sigma\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right]=\frac{\gamma\cos(\varphi-\mu)}{\cos\rho\sin(\varphi-\rho)}$$

Покажем теперь, как найти приближенное решение около прямой характеристики OA. Положим (2.7)

$$\sigma=\sigma_0+\frac{\gamma y}{1+\sin\rho}-S=\sigma_0+\frac{\gamma(u\cos\mu+v\sin\mu)}{2\cos^2\mu}-S,\qquad \varphi=\tfrac{1}{2}\pi+\Phi$$

и будем считать S, Φ и v малыми величинами.

Подставим в предыдущие уравнения величины (2.7), а затем, оценивая порядок различных членов, отбросим те из них, которые малы по сравнению с остальными. Приближенно будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial v}-2\sigma(u)\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\Phi}{\partial v}=0 \tag{2.8}$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial u}+2\sigma(u)\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right]+\left[\frac{\partial S}{\partial v}+2\sigma(u)\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right]\Phi=-\gamma\frac{\operatorname{tg}\rho}{\cos\mu}\Phi$$

Здесь и далее для удобства принято следующее обозначение:

$$\sigma(u)=\sigma_0+\frac{\gamma u}{2\cos\mu}=\frac{\gamma(u+u_0)}{2\cos\mu},\qquad u_0=\frac{2\sigma_0}{\gamma}\cos\mu$$

Первое уравнение вместе с граничными условиями $\Phi=S=0$ при $v=0$ имеет интеграл

$$S=2\sigma(u)\operatorname{tg}\rho\,\Phi \tag{2.9}$$

а второе уравнение может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\frac{\Phi}{u+u_0}=0$$

Интеграл этого уравнения содержит произвольную функцию F и имеет вид:

$$v+(u+u_0)\Phi\ln\Phi=F[(u+u_0)\Phi] \tag{2.10}$$

причем граничное условие $\Phi=0$ при $v=0$ устанавливает, что $F(0)=0$.

Условия (1.10) вдоль кривой OB могут быть представлены так:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\Phi},\qquad S=\frac{\gamma y}{1+\sin\rho} \tag{2.11}$$

Интегралы (2.9) и (2.10) и условия (2.11) дают возможность найти уравнение кривой OB, а также функции Φ и S. Ограничимся определением контура, для чего составим два уравнения:

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\Phi}=\frac{(u+u_0)\sin\rho}{y\sin\mu}$$

Отсюда, принимая обозначение

$$y_0=\frac{u_0}{\cos\mu}=\frac{2H}{\gamma(1-\sin\rho)}$$

легко получить

$$y\frac{dy}{dx}+\operatorname{tg}\rho\,(1+\sin\rho)\,(y+y_0+x\operatorname{tg}\mu)=0$$

или приближенно следующее уравнение:

$$\frac{dy}{dx}+\operatorname{tg}\rho\,(1+\sin\,\rho)\left(1+\frac{y_0}{y}\right)=0$$

Оно должно быть проинтегрировано с учетом граничных условий $y=0$ при $x=0$. Окончательно будем иметь следующее уравнение:

$$x=-\frac{\operatorname{ctg}\rho}{1+\sin\rho}\left[y-y_0\ln\left(1+\frac{y}{y_0}\right)\right]\approx-\frac{\gamma}{4k}\frac{1-\sin\rho}{1+\sin\rho}y^2$$

или такое уравнение:

$$y^2=-\frac{4k}{\gamma}\frac{1+\sin\rho}{1-\sin\rho}\,x \tag{2.12}$$

которое приближенно устанавливает контур откоса около верхней точки O.

Вернемся теперь к интегралу (2.10) в частном случае идеально-сыпучей среды ($k=0$), который исключался в предыдущих рассуждениях, и будем предполагать, что в рассматриваемой задаче отсутствует характерная длина l. Так как при этом величина

$$\frac{F(u\,\Phi)}{u}=\frac{F(l\,\bar{u}\,\Phi)}{l\bar{u}}\qquad (u=l\bar{u})$$

не должна зависеть от l, то указанная произвольная функция

$$F\,(u\Phi)=Cu\Phi$$

а интеграл (2.10) принимает вид

$$v=u\Phi\,(C-\ln\Phi)$$

Это соотношение было получено Т. Карманом [3] как интеграл системы уравнений предельного равновесия для весомого клина из идеально-сыпучей среды, в котором величины всех компонент напряжения пропорциональны расстояниям от вершины клина.

§ 3. Полусводы и своды в идеально-связной среде. Обратимся теперь к так называемой идеально-связной среде, которая обладает сцеплением, но лишена внутреннего трения, и установим для такой среды предельные формы устойчивых полусводов и сводов.

Плоское предельное равновесие идеально-связной среды с объемным весом γ и коэффициентом сцепления k описывается теми же дифференциальными уравнениями равновесия (1.1) и условием предельного состояния

$$\tfrac{1}{4}\,(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau_{xy}{}^2=k^2$$

следующим из (1.2) при $\rho=0$.

Такую систему уравнений удобно изучать путем перехода к новым переменным s и φ, связанным с компонентами напряжения так:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\}=s\pm k\cos2\varphi,\qquad \tau_{xy}=k\sin2\varphi \tag{3.1}$$

Подставляя в дифференциальные уравнения равновесия (1.1) выражения (3.1), найдем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial s}{\partial x} - 2k\left[\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = 0 \\ &\frac{\partial s}{\partial y} + 2k\left[\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = \gamma \end{aligned} \tag{3.2}$$

или, после простых преобразований, получим

$$\left[\frac{\partial s}{\partial x} \mp 2k \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + \operatorname{tg}\left(\varphi \mp \tfrac{1}{4}\pi\right)\left[\frac{\partial s}{\partial y} \mp 2k\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \gamma\right] = 0 \tag{3.3}$$

Эта система уравнений также принадлежит к гиперболическому типу и имеет два вещественных семейства характеристик. После замены $\sigma = s + H$ и предельного перехода

$$\rho \to 0, \qquad \sigma \operatorname{tg} \rho = (s + H) \operatorname{tg} \rho \to k$$

вместо (1.6) будем иметь

$$dy = dx \operatorname{tg}(\varphi \mp \tfrac{1}{4}\pi), \qquad \frac{s - \gamma y}{2k} \mp \varphi = \text{const} \tag{3.4}$$

Характеристики — линии скольжения составляют теперь два ортогональных свойства и наклонены к оси x под углами $\varphi \mp {}^1/_4\,\pi$.

Займемся опять-таки нахождением поля напряжений и предельного контура устойчивого полусвода, переходящего в нижней части в откос, считая, что вдоль горизонтальной границы — положительной полуоси x — задано равномерно распределенное нормальное давление $\sigma_y = p$.

Будем попрежнему через α и β обозначать углы между осью x и касательными к кривым OA и OB, а через α_0 и β_0 — их значения в верхней точке O.

В области xOA образуется простейшее поле напряжений, даваемое величинами

$$s = \gamma y + p - k, \qquad \varphi = \tfrac{1}{2}\pi \tag{3.5}$$

или компонентами напряжения

$$\sigma_x = \gamma y + p - 2k, \qquad \sigma_y = \gamma y + p, \qquad \tau_{xy} = 0$$

а сетка характеристик составлена двумя ортогональными семействами параллельных прямых: $y = \pm x + \text{const}$.

Остановимся теперь на граничных условиях вдоль кривых OA и OB, используя систему координат tn, повернутую по отношению к системе xy на угол ε. Можно показать, что

$$\left.\begin{matrix}\sigma_t \\ \sigma_n\end{matrix}\right\} = s \pm k\cos 2(\varphi - \varepsilon), \qquad \tau_{tn} = k \sin 2(\varphi - \varepsilon) \tag{3.6}$$

Прежде всего ясно, что вдоль кривой OA, которая наклонена к оси x под переменным углом α, компоненты напряжения σ_n и τ_{tn} непрерывны, а компонента σ_t имеет конечный разрый. Поэтому из уравнений (3.5) и (3.6) при $\varepsilon = \beta$ получим

$$\frac{s}{k} - \cos 2(\varphi - \alpha) = \frac{\gamma y + p}{k} - 1 + \cos 2\alpha$$

$$\sin 2(\varphi - \alpha) = \sin 2\alpha$$

и скачок компоненты напряжения

$$\sigma_t^+ - \sigma_t^- = 4k \cos\varphi \cos(2\alpha - \varphi) \geqslant 0$$

Отсюда следуют соотношения

$$\sin(2\alpha - \varphi) = 0, \qquad \cos(2\alpha - \varphi) \geqslant 0$$

устанавливающие, что

$$2\alpha = \varphi, \qquad \sigma_t^+ - \sigma_t^- = 4k\cos 2\alpha$$

Таким образом будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \varphi = 2\alpha, \qquad s = \gamma y + p + k(2\cos 2\alpha - 1) \qquad (3.7)$$

Далее очевидно, что вдоль кривой OB компоненты напряжения $\sigma_n = \tau_{tn} = 0$, а компонента $\sigma_t > \sigma_n$. Итак, на основании данных выше уравнений (3.6) при $\varepsilon = \beta$ найдем

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\beta, \qquad \varphi = \beta, \qquad s = k \qquad (3.8)$$

В области AOB поле напряжений может быть получено путем численного решения уравнений характеристик (3.4) по граничным данным (3.7) и (3.8) вдоль кривых OA и OB, которые уже были приведены выше.

Значения углов $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ в верхней точке O могут быть выражены через заданное давление p. Действительно, полагая $\alpha = \alpha_0$ и $\varphi = \beta_0$, получим

$$2\alpha_0 = \beta_0 \qquad (3.9)$$

а приравнивая величины s, взятые при $y = 0$ по предыдущим формулам (3.7) и (3.8), установим зависимость между давлением p и углом β_0 в виде

$$p = 2k(1 - \cos\beta_0) \qquad (3.10)$$

Значения α_0, β_0 и p изменяются в пределах

$$0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \tfrac{1}{4}\pi, \qquad 0 \leqslant \beta_0 \leqslant \tfrac{1}{2}\pi, \qquad 0 \leqslant p \leqslant 2k$$

причем $\beta_0 = 0$ соответствует $p = 0$, а $\beta_0 = {}^1/_2\,\pi$ отвечает $p = 2k$.

Заметим, что при $\gamma = 0$ искомые кривые OA и OB превращаются в прямые, а полусвод переходит в невесомый остроугольный клин из идеально-связной среды. Углы $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ наклона этих прямых OA и OB к оси x даются теми же формулами (3.9) и (3.10), впервые полученными В. Прагером [4].

Действие собственного веса существенным образом изменяет вид предельного равновесия идеально-связной среды. Кривая OA и контур OB искривляются так, что при движении от точки O углы α и β увеличиваются от $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ до $\alpha = {}^1/_4\,\pi$ и $\beta = \pi$ на бесконечности; при этом величина скачка компоненты σ_t постепенно уменьшается до нуля.

В качестве примера выполнено решение задачи для $\beta_0 = {}^1/_4\,\pi$ обычными методами численного интегрирования уравнений (3.4). Построена сетка характеристик — линий скольжения (фиг. 6); получены безразмерные координаты $\gamma x / k$ и $\gamma y / k$ точек кривой разрыва:

$\gamma x / k =$	0.05	0.12	0.22	0.33	0.48	0.65	0.86	1.09
$\gamma y / k =$	0.02	0.05	0.10	0.14	0.22	0.30	0.40	0.53

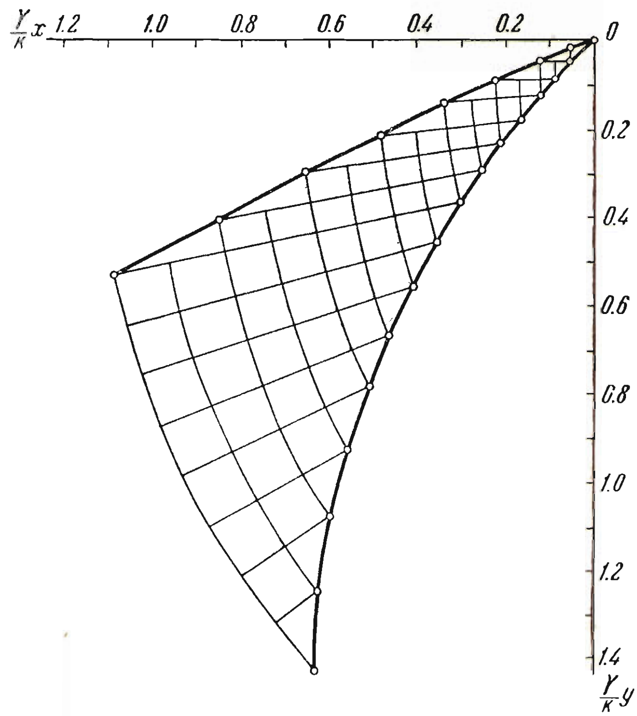
и точек искомого контура:

$\gamma x / k =$	0.00	0.05	0.09	0.12	0.17	0.21	0.26	0.30
$\gamma k / k =$	0.00	0.05	0.09	0.13	0.18	0.24	0.30	0.36
$\gamma x / k =$	0.36	0.41	0.47	0.51	0.56	0.60	0.63	0.64
$\gamma y / k =$	0.46	0.55	0.67	0.78	0.93	1.08	1.25	1.43

Заметим, что при $p = 2k$ углы

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{1}{4}\pi, \qquad \beta_0 = \frac{1}{2}\pi$$

а кривая разрыва OA вырождается в прямую, наклоненную к оси x под углом $^1/_4\pi$, т. е. в характеристику, на которой нет разрывов. При этом нависающая часть пропадает и остается лишь предельный откос с вертикальной касательной в точке O.



Фиг. 6

Контур такого откоса, как известно [1], определяется простым уравнением

$$x = \frac{2k}{\gamma} \ln \cos\left(\frac{\gamma y}{2k}\right) \qquad \text{или} \qquad y = \frac{2k}{\gamma} \arccos\left[\exp\left(\frac{\gamma x}{2k}\right)\right]$$

Около верхней точки O последнее уравнение приближенно может быть представлено так:

$$y^2 = -\frac{4k}{\gamma}x$$

В отношении определения предельных контуров устойчивых сводов следует отметить, что здесь остаются в силе все рассуждения конца § 1.

Остановимся на приближенных решениях в двух частных случаях, разобранных в § 2, и получим соответствующие формулы путем замены $\sigma = s + H$ и предельного перехода $\rho \to 0$, $u_0 \to \infty$.

В частном случае, когда давление $p = 0$ и контур в верхней точке O имеет горизонтальную касательную, выражения (2.1) принимают более простой вид:

$$s = k - S, \qquad \varphi = \Phi \tag{3.11}$$

а интегралы (2.2) напишутся так:

$$\Phi = \Phi(x), \qquad S = [2k\Phi'(x) - \gamma]\, y + f(x) \tag{3.12}$$

При этом условия (2.3) вдоль кривой OA, определяемой уравнением $y = y_1(x)$, будут

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha = \frac{\Phi}{2}, \qquad S = k\Phi^2 - \gamma y_1$$

а условия (2.4) вдоль кривой OB, даваемой уравнением $y = y_2(x)$, останутся прежними:

$$\frac{dy_2}{dx} = \beta = \Phi, \qquad S = 0$$

Последующие рассуждения ничем не отличаются от приведенных в § 2, так, что

$$y_2 = 2y_1, \qquad S = [2k\Phi'(x) - \gamma]\,[y - y_2(x)]$$

Вместо (2.5) теперь получим уравнения

$$y = \frac{\gamma x^2}{12k}, \qquad y = \frac{\gamma x^2}{6k} \tag{3.13}$$

а вместо (2.6) будем иметь выражения

$$\Phi = \frac{\gamma x}{3k}, \qquad S = \frac{\gamma}{3}\left(\frac{\gamma x^2}{6k} - y\right) \tag{3.14}$$

которые определяют кривые OA и OB и напряженное состояние полусвода около верхней точки O.

Приведем также углы наклона кривых OA и OB к оси x вблизи точки O. Приближенно имеем

$$\alpha = \frac{\gamma x}{6k}, \qquad \beta = \frac{\gamma x}{3k}$$

Эти углы меньше, чем соответствующие углы при наличии внутреннего трения, т. е. когда $\rho \neq 0$.

В другом частном случае, когда давление $p = 2k$ и контур имеет в верхней точке O вертикальную касательную, выражения (2.7) принимают такой вид:

$$s = k + \gamma y - S, \qquad \varphi = \tfrac{1}{2}\pi + \Phi \tag{3.15}$$

а интегралы (2.9) и (2.10) будут

$$S = 2k\Phi, \qquad v = u\Phi + F(\Phi)$$

При этом условия (2.11) вдоль кривой OB несколько упрощаются

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\Phi}, \qquad S = \gamma y$$

и дают возможность получить

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2k}{\gamma y} = 0$$

Вместо (2.12) теперь имеет место уравнение

$$y^2 = -\frac{4k}{\gamma}\, x \tag{3.16}$$

которое устанавливает контур откоса около верхней точки O. Это приближенное уравнение уже было получено выше непосредственно из точного уравнения.

В заключение отметим, что в предыдущих рассуждениях совсем не обязательно, чтобы граница связной среды была горизонтальной прямой; она может быть также наклонной прямой или даже кривой.

Поступила 25 X 1955

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Издание первое. Изд. АН СССР, 1942. Издание второе. Гостехиздат, 1954.
2. Шапиро Г. С. О предельном равновесии сыпучего клина и о разрывном решении статики сыпучей среды. ПММ, т. XVI, вып. 2, 1952.
3. Schield R. T. Stress and velocity fields in soil mechanics. Journal of Matematics and Physics, Vol. XXXIII, № 2, 1954.
4. Kármán T. Ueber elastische Grenzzustände. Verhandlungen des zweiten Internationalen Kongresses für technische Mechanik. Zürich, 1927.
5. Prager W. Discontinuos solutions in the theory of plasticity. Courant Anniversary, Volume, 1948.