

УДАР О СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

И. Т. Егоров

(Ленинград)

При ударе твердого тела о плоскую поверхность жидкости на смоченной поверхности тела возникает резкое повышение давления, которое распространяется в обе среды со скоростью звука.

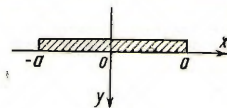
Ниже предполагается случай, когда скорость распространения звука в теле, падающем на поверхность жидкости, может считаться бесопечно большой по сравнению со скоростью распространения звука в жидкости, т. е. будем считать, что падающее тело является абсолютно твердым. В этом случае вся относительная скорость движения, имеющая место в начале удара, воспринимается жидкостью. Возникающие при этом гидродинамические давления распространяются от поверхности соприкосновения внутрь жидкости со скоростью звука в виде волн сжатия и разрежения и постепенно затухают. После того как ударные давления рассеиваются, достигают все более удаленных от тела областей жидкости и становятся равными нулю, в ней остаются гидродинамические давления, соответствующие движению тела после удара [1].

Пренебрегая силами вязкости, а также учитывая, что движение жидкости начинается из состояния покоя, в силу теоремы Томсона, можно считать движение идеальной сжимаемой жидкости в процессе удара потенциальным.

Рассматривается случай удара о поверхность сжимаемой жидкости плоской пластинки бесконечного размаха или же тела, погружающаяся часть поверхности которого может быть аппроксимирована плоскостью. В работе рассматривается первая фаза явления удара о поверхность жидкости, предшествующая появлению каверны, так как именно в этот период величины гидродинамических давлений достигают наибольших значений. Наблюдения за падением тел на поверхность жидкости показывают, что свободная поверхность жидкости в этот период почти совершенно спокойна, если не учитывать небольшой подъем вблизи границ поверхности удара.

§ 1. Рассмотрим движение жидкости в системе координат Oxy , жестко связанной с твердым телом (фиг. 1). В выбранной системе координат для потенциала скоростей движения φ в случае плоской задачи имеем следующее линейризованное уравнение [2]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \left(c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \right) \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь c —скорость звука. Граничные условия в рассматриваемом случае будут:

на свободной поверхности жидкости

$$\varphi = 0 \quad \text{при } |x| > a, \quad y = 0 \quad (1.2)$$

на поверхности пластины

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y' \quad \text{при } |x| < a, \quad y = 0 \quad (1.3)$$

К этим условиям для однозначного определения решения добавим еще условие в бесконечности. Воспользуемся принципом излучения, вы-

ражающим условие невозможности распространения возмущений из бесконечности внутрь потока; иначе говоря, волны, возникающие при ударе, расходятся в бесконечности [2]:

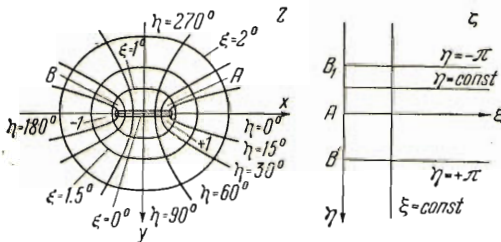
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + i v \varphi \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} |\sqrt{r} \varphi| = \text{const} \quad (1.4)$$

Введем также неподвижную систему координат $O_1 x_1 y_1$, ось $O_1 x_1$ расположим на свободной поверхности, ось $O_1 y_1$ направим внутрь жидкости.

В момент начала удара движение пластины определяется условиями:

$$y_1 = 0, \quad y_1' = v \quad \text{при } t = 0 \quad (1.5)$$

§ 2. Функцию $\varphi(x, y, t)$ можно продолжить на верхнюю полуплоскость и получить функцию $\varphi(x, y, t)$, аналитическую во всей плоскости за исключением отрезка $|x| \leq a, y = 0$, причем $\varphi(x, y, t) = -\varphi(x, -y, t)$.



Фиг. 2

Будем искать частный интеграл уравнения (1.1) в виде

$$\varphi(x, y, t) = \psi(x, y) e^{-\beta t} \quad (2.1)$$

Подставляя выражение (2.1) в уравнение (1.1), получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\beta^2}{c^2} \psi = 0 \quad (2.2)$$

Полагая в этом уравнении $x = ax_1, y = ay_1$, его можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + v^2 \psi = 0 \quad \left(v^2 = -\frac{a^2 \beta^2}{c^2} \right) \quad (2.3)$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 у переменных x_1 и y_1 опускается. Функция $\psi(x, y)$ должна удовлетворять также граничным условиям

$$\psi = 0 \quad \text{при } |x| > 1, y = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = av \quad \text{при } |x| < 1, y = 0 \quad (2.4)$$

а также условиям принципа излучения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + i v \psi \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} |\sqrt{r} \psi| < \text{const} \quad \text{при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

Введем эллиптические координаты ξ и η (фиг. 2) при помощи равенств

$$x = \text{ch } \xi \cos \eta, \quad y = \text{sh } \xi \sin \eta \quad (2.6)$$

Это соответствует конформному преобразованию $z = \text{ch } \zeta$ плоскости $z = x + iy$ на плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. Из соотношения (2.6) следует

$$\frac{x^2}{\text{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{\text{sh}^2 \xi} = \cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1, \quad \frac{x^2}{\cos^2 \eta} - \frac{y^2}{\sin^2 \eta} = \text{ch}^2 \xi - \text{sh}^2 \xi = 1 \quad (2.7)$$

Линиям $\xi = \text{const}$ в плоскости ζ соответствует семейство софокусных эллипсов в плоскости z , а линиям $\eta = \text{const}$ соответствует семейство софокусных гипербол, ортогональных к семейству эллипсов. Легко видеть, что интересующий нас отрезок $|x| < 1$ представляет вырожденный эллипс $\xi = 0, |\eta| < \pi$. Участку координатной оси $x > 1$ соответствует

вырожденная гипербола $\eta = 0$, $\xi > 0$, а $x < -1$ — вырожденная гипербола $\eta = \pm \pi$, $\xi > 0$.

Уравнение (2.3) после подстановки (2.6) при помощи соотношения Ламэ^[5]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) \left| \frac{dz}{d\xi} \right|^2 \quad (2.8)$$

можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + v^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) \psi = 0 \quad (2.9)$$

Предполагая его решение в виде $\psi(\xi, \eta) = F(\xi)G(\eta)$, после подстановки в (2.9) для функций F и G получим уравнения Матье

$$\frac{d^2 G}{d\eta^2} + (\alpha - 2\theta_* \cos 2\eta) G = 0, \quad \frac{d^2 F}{d\xi^2} - (\alpha - 2\theta_* \operatorname{ch} 2\xi) F = 0 \quad (2.10)$$

Здесь

$$\theta_* = \frac{1}{4} v^2, \quad \theta_* = -\theta, \quad \theta = \frac{a^2 \beta^2}{4C^2} \quad (\alpha - \text{постоянная разделения}) \quad (2.11)$$

Вследствие того что α может принимать любое значение, то для однозначности решения в плоскости z функция $G(\eta)$ должна быть периодической с периодом 2π . Этим условием определяется множество собственных значений $\alpha_{2n+1}(\theta_*)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Соответствующее семейство фундаментальных функций образует полную ортогональную систему.

Функция $F(\xi)$ должна выражаться через модифицированные функции Матье, удовлетворяющие принципу излучения. В соответствии со сказанным будем искать потенциал $\psi(\xi, \eta)$ в виде разложения по нечетным функциям Матье нечетного индекса

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \operatorname{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi, -\theta) \operatorname{se}_{2n+1}(\eta, -\theta) \quad (2.12)$$

Здесь $\operatorname{se}_{2n+1}(\eta, -\theta)$ — нечетная периодическая функция Матье, являющаяся решением первого рода первого уравнения (2.10) и выражающаяся через тригонометрические функции в виде ряда

$$\operatorname{se}_{2n+1}(\eta, -\theta) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{2n+1} \sin(2r+1)\eta \quad (2.13)$$

где A_{2r+1}^{2n+1} — коэффициенты разложения — функции от θ . Функция $\operatorname{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi, -\theta)$ представляет собой комбинированную функцию Матье, выражающуюся через произведение функций Бесселя от мнимого аргумента в виде следующего ряда:

$$\operatorname{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi, -\theta) = \frac{2ip_{2n+1}}{\pi A_1^{2n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{2n+1} [I_r(v_1) K_{r+1}(v_2) + I_{r+1}(v_1) K_r(v_2)] \quad (2.14)$$

Здесь

$$P'_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{k A_1^{2n+1}} \operatorname{ce}_{2n+1}(0, \theta) \operatorname{se}'_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\pi, \theta\right), \quad v_1 = ke^{-\xi}, \quad v_2 = ke^{\xi}, \quad k^2 = \theta$$

$\operatorname{ce}_{2n+1}(\xi, 0)$ — четная периодическая функция Матье, $I_m(v_1)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента, $K_m(v_2)$ — функция Макдональда.

Функция $\text{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi, -\theta)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$\text{Ne}_{2n+1}^{(1)} \sim P_{2n+1}' \frac{e^{-v}}{\sqrt{2\pi v}} \quad (2.15)$$

где $v = 2k \text{ch } \xi$, откуда видно, что при $\xi \rightarrow \infty$ функция (2.15) монотонно стремится к нулю. Из этого непосредственно следует, что построенное выражение потенциала (2.12) удовлетворяет принципу излучения.

Функция потенциала (2.12) удовлетворяет первому граничному условию (2.4), так как при $\eta = 0$ и $\eta = \pm\pi$ функция $\text{se}_{2n+1}(\eta, -\theta)$ обращается в нуль.

Для определения произвольной постоянной интегрирования a_{2n+1} воспользуемся вторым граничным условием (2.4), которое в эллиптической системе координат запишется в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = av \sin \eta \quad \text{при } |\eta| < \pi, \xi = 0 \quad (2.16)$$

Подчиняя выражение потенциала (2.12) условию (2.16), получим

$$av \sin \eta = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \text{Ne}_{2n+1}^{(1)'}(0, -\theta) \text{se}_{2n+1}(\eta, -\theta) \quad (|\eta| < \pi) \quad (2.17)$$

Здесь

$$\text{Ne}_{2n+1}^{(1)'}(0, -\theta) = \left[\frac{\partial \text{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi, -\theta)}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} \quad (2.18)$$

Умножая полученное уравнение на $\text{se}_{2n+1}(\eta, -\theta) d\eta$ и интегрируя от $-\pi$ до $+\pi$, найдем

$$av \int_{-\pi}^{\pi} \text{se}_{2n+1}(\eta, -\theta) \sin \eta d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \text{Ne}_{2n+1}^{(1)'}(0, -\theta) \int_{-\pi}^{\pi} \text{se}_{2n+1}^2(\eta, -\theta) d\eta \quad (2.19)$$

В силу ортогональности функций Матье

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{se}_{2n+1}(\eta, -\theta) \sin \eta d\eta = (-1)^n A_1^{2n+1} \pi$$

Согласно второму условию нормирования функций Матье [4]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{se}_{2n+1}^2(\eta, -\theta) d\eta = \pi$$

Подставляя найденные значения интегралов в уравнение (2.12) и решая его относительно a_{2n+1} , получим

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{A_1^{2n+1}}{\text{Ne}_{2n+1}^{(1)'}(0, -\theta)} av \quad (2.20)$$

Подставляя, в свою очередь, (2.20) в (2.12), найдем

$$\psi(\xi, \eta) = av \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_1^{2n+1} \frac{\text{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi, -\theta)}{\text{Ne}_{2n+1}^{(1)'}(0, -\theta)} \text{se}_{2n+1}(\eta, -\theta) \quad (2.21)$$

Учитывая формулу (2.1), потенциал скоростей рассматриваемого движения жидкости представим в виде

$$\varphi(\xi, \eta, t) = a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_1^{2n+1} \frac{\text{Ne}_{2n+1}^{(1)}(\xi, -\theta)}{\text{Ne}_{2n+1}^{(1)'}(0, -\theta)} \text{se}_{2n+1}(\eta, -\theta) v e^{-\beta t} \quad (2.22)$$

Выражение (2.22) является частным интегралом волнового уравнения (1.1), удовлетворяющим поставленным начальным и граничным условиям.

§ 3. Полученные данные о потоке жидкости позволяют перейти к определению гидродинамических сил. С этой целью воспользуемся интегралом Лагранжа. Пренебрегая весомостью и квадратами величин абсолютной скорости жидкости, можно найти суммарное значение гидродинамических сил на единицу ширины пластины. Интегрируя давление $p - p_0 = -\rho_0 \partial \varphi / \partial t$ по длине пластины, получим

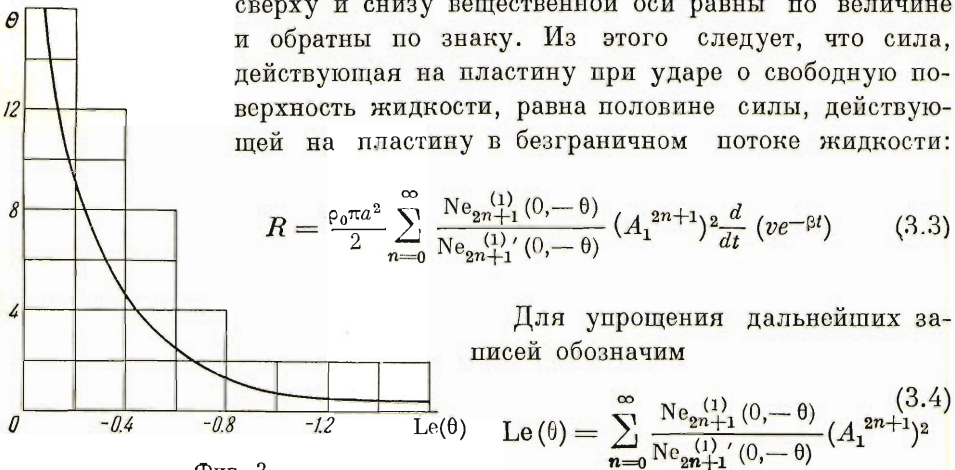
$$R^* = -\rho_0 \int_{-a}^a \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx \Big|_{y=0} \quad \text{или} \quad R^* = \rho_0 a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \sin \eta d\eta \Big|_{\xi=0} \quad (3.1)$$

$$R^* = \rho_0 \pi a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ne_{2n+1}^{(1)}(0, -\theta)}{Ne_{2n+1}^{(1)'}(0, -\theta)} (A_1^{2n+1})^2 \frac{d}{dt} (ve^{-\beta t}) \quad (3.2)$$

Формула (3.2) выведена для случая движения пластины в безграничной жидкости. Но согласно принципу симметрии значения φ и $\partial \varphi / \partial t$ сверху и снизу вещественной оси равны по величине и обратны по знаку. Из этого следует, что сила, действующая на пластину при ударе о свободную поверхность жидкости, равна половине силы, действующей на пластину в безграничном потоке жидкости:

$$R = \frac{\rho_0 \pi a^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ne_{2n+1}^{(1)}(0, -\theta)}{Ne_{2n+1}^{(1)'}(0, -\theta)} (A_1^{2n+1})^2 \frac{d}{dt} (ve^{-\beta t}) \quad (3.3)$$

Для упрощения дальнейших записей обозначим



Фиг. 3

График функции $Le(\theta)$ приведен на фиг. 3. Заметим, что

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} Le(\theta) = -\infty \quad \text{при} \quad \theta \rightarrow 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow -\infty} Le(\theta) = 0 \quad \text{при} \quad \theta \rightarrow -\infty$$

Причем в первом пределе при $\theta \rightarrow 0$ (что соответствует переходу к несжимаемой жидкости $c = \infty$) функция $Le(\theta) \rightarrow \infty$ как k^{-2} .

Выполняя в формуле (3.3) дифференцирование и подставляя (3.4), получим для определения силы удара следующее выражение:

$$R = -\frac{1}{2} \rho_0 \pi a^2 \beta Le(\theta) y' \quad (y' = ve^{-\beta t}) \quad (3.5)$$

Здесь y' — скорость движения пластины в процессе удара.

Для определения параметра β подставим (3.5) в уравнение движения пластины, которое в случае невесомого удара имеет вид $my'' = -R$. В результате получим трансцендентное уравнение

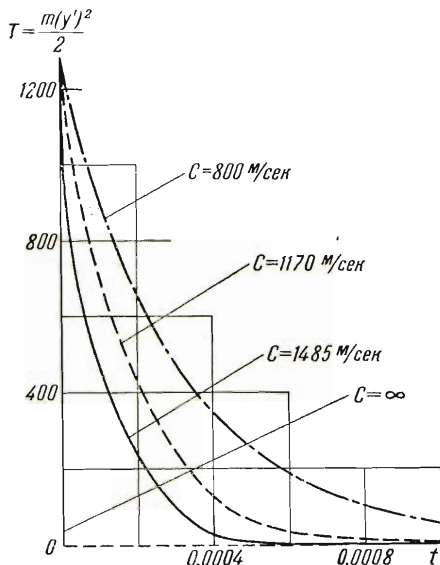
$$m = -\frac{1}{2} \rho_0 \pi a^2 Le(\theta) \quad (3.6)$$

из которого для заданных m , a и ρ_0 , пользуясь графиком функции $Le(\theta)$

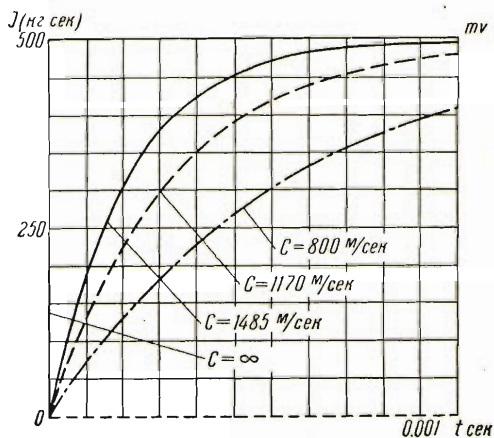
(фиг. 3), нетрудно определить значение θ , а следовательно, и параметра β [см. (2.11)]. Учитывая (3.6), выражение для силы R получим в виде: $R = m\beta v e^{-\beta t}$; интегрируя это выражение, получим

$$J = \int_0^t R dt = mv(1 - e^{-\beta t}) \quad (3.7)$$

Эта зависимость позволяет определить количество движения жидкости для любого момента времени первой фазы удара. Пользуясь формулой (3.5), можно определить также кинетическую энергию пластины. На фиг. 4 приведено $T = T(t)$ изменение во времени кинетической



Фиг. 4



Фиг. 5

энергии пластины ($m = 100$ кг сек² м⁻¹, $a = 1.10$ м, $v = 5.0$ м/сек⁻¹) при ударе о воду ($c = 1485$ м сек⁻¹, $\rho_0 = 102$ кг сек² м⁻⁴), об этиловый спирт ($c = 1170$ м сек⁻¹, $\rho_0 = 79$ кг сек² м⁻⁴) и о пентан ($c = 800$ м сек⁻¹, $\rho_0 = 64$ кг сек² м⁻⁴). На фиг. 5 для этих же случаев приведен график изменения количества движения пластины в процессе удара.

Поступила 13 X 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Изд. ИЛ, М., 1949.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гос. изд. техн.-теор. литературы М., 1950.
3. Хаскинд М. Д. Акустические излучения колеблющихся тел в сжимаемой жидкости. Журнал экспериментальной и теоретической физики, вып. 7, 1946.
4. Мак-Лахлан Н. Теория и приложение функций Матье. Изд. ИЛ, М., 1953.
5. Уйттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. II. Гос. изд. техн.-теор. литературы, 1934.