Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В. В. Румянцев

(Москва)

Перманентные вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой были открыты в 1894 г. Б. К. Млодзеевским[1] и О. Штауде[2]; последнему принадлежит подробное исследование этих вращений. Вначале задача об отыскании условий их устойчивости при заданном распределении масс казалась почти безнадежно трудной[3]. Однако в 1920 г. Р. Граммель получил путем рассмотрения линеаризованных уравнений возмущенного движения тяжелого твердого тела условия устойчивости перманентных вращений[3,4]. Ввиду сложности полученных условий имелось мало надежды на выделение на конусе перманентных осей областей устойчивости, вследствие чего Граммель «обратил» постановку задачи. Он предложил искать не направляющие косинусы устойчивых перманентных вращений при заданном распределении масс, а, наоборот, исходя из определенного положения оси вращения в твердом теле и из заданных отношений моментов инерции тела к его весу, разыскивать такие положения центра тяжести тела, при которых возможны устойчивые перманентные вращения вокруг заданной оси. В такой постановке Граммель проанализировал полученные им условия устойчивости для общего случая несимметричного гироскопа при произвольном направлении оси вращения, а также для случая, когда ось вращения лежит в одной из главных плоскостей инерции твердого тела для неподвижной точки. Кроме того, Граммель подробно исследовал устойчивость главной оси инерции для случая, когда на ней расположен центр тяжести тела.

В 1945 г. О. Боттема[5] применил полученные Граммелем условия к исследованию устойчивости перманентных вращений в случае нахождения центра тяжести на одной из главных осей инерции.

Отметим, что тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой представляет собой консервативную механическую систему, устойчивость которой возможна только в критическом по Ляпунову случае. Полученные Граммелем условия являются лишь необходимыми условиями устойчивости перманентных вращений, что очевидно на основании одной теоремы Ляпунова[6].

Следует указать, что необходимые условия устойчивости вращения твердого тела вокруг главной оси инерции, проходящей через центр тяжести тела, были получены в 1882 г. Н. Е. Жуковским[7] для несимметричного гироскопа, а также для гироскопа Лагранжа.

Достаточные условия устойчивости вращения твердого тела вокруг главной оси инерции, несущей центр тяжести тела, получены Н. Г. Четаевым[8,9] для случая Лагранжа.

В данной работе путем построения по методу Н. Г. Четаева[9] функций Ляпунова указываются некоторые достаточные условия устойчивости перманентных вращений как для общего случая, при произвольном распределении масс твердого тела, так и для ряда частных случаев. Анализ этих условий позволяет в наглядной форме выделить на конусе перманентных осей области устойчивости; задача при этом решается в прямой постановке. Разумеется, нетрудно приложить полученные достаточные условия устойчивости и для случая обращения по Граммелю постановки задачи.

1. Конус перманентных осей. Пусть $Ox_1y_1z_1$ — неподвижная система осей координат с вертикально вверх направленной осью Oz_1, а $Oxyz$ — подвижная система осей координат, неизменным образом связанная с твердым телом, оси которой направлены по главным осям инерции твердого тела для неподвижной точки O. Движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой описывается системой шести уравнений Эйлера-Пуассона:

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = P\,(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3) \qquad (1.1)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \qquad \begin{pmatrix} pqr, & ABC \\ xyz, & 1,2,3 \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

где A, B, C обозначают главные моменты инерции тела для точки O, $P = Mg$ — вес тела, x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести тела, p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости тела на подвижные оси координат, γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси Oz_1 относительно подвижных осей x, y, z. Здесь и в дальнейшем в скобках указываются буквы и индексы, круговой перестановкой которых получаются невыписанные уравнения.

Уравнения движения (1.1), (1.2) в общем случае допускают три первых интеграла:

$$\begin{gathered} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P\,(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = h \\ Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = k, \qquad \gamma_1{}^2 + \gamma_2{}^2 + \gamma_3{}^2 = 1 \end{gathered} \qquad (1.3)$$

Б. К. Млодзеевский[1] установил, что перманентными осями вращения, т. е. осями, занимающими неизменное положение в теле и в пространстве, могут быть или главные оси инерции, расположенные горизонтально (случай физического маятника), или целое множество вертикальных осей, причем в последнем случае мгновенная угловая скорость тела является постоянной и по величине. Вращения твердого тела вокруг вертикальных перманентных осей были подробно изучены Штауде[2]. Приведем некоторые из его результатов, которые в дальнейшем нам понадобятся. Если положить $\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_2 = \beta$, $\gamma_3 = \gamma$, где α, β, γ — постоянные, удовлетворяющие, разумеется, условию $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, то уравнения (1.2) можно привести к виду

$$\frac{p}{\alpha} = \frac{q}{\beta} = \frac{r}{\gamma} = \omega \qquad (1.4)$$

где угловая скорость $\omega = \text{const}$.

Уравнения (1.1) принимают при этом следующий вид:

$$\begin{aligned} (B - C)\,\beta\gamma\omega^2 &= P\,(y_0\gamma - z_0\beta) \\ (C - A)\,\gamma\alpha\omega^2 &= P\,(z_0\alpha - x_0\gamma) \\ (A - B)\,\alpha\beta\omega^2 &= P\,(x_0\beta - y_0\alpha) \end{aligned} \qquad (1.5)$$

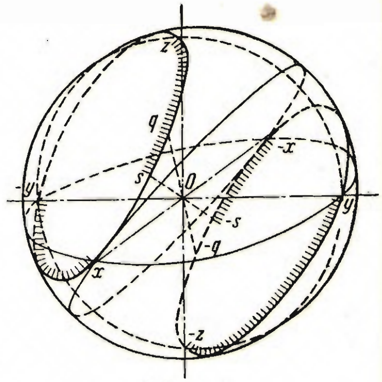
Если уравнения (1.5) умножить на x_0, y_0, z_0 соответственно и сложить, то получим уравнение конуса второго порядка (в текущих координатах α, β, γ)

Очевидно, что конус (1.6) в качестве образующих имеет главные оси инерции x, y, z, а также прямые, проведенные из начала координат в центр тяжести тела $S(x_0, y_0, z_0)$ и в точку $Q(x_0/A, y_0/B, z_0/C)$, чем вполне определяется.

Если предположить без уменьшения общности, что (1.7)

$$A > B > C, \qquad x_0 > 0, \qquad y_0 > 0, \qquad z_0 > 0$$

то легко видеть, что одна из полостей конуса (1.6), проходит через полуоси Ox, OS, OQ, Oz и $-Oy$, а вторая — через полуоси $-Ox$, $-OS$, $-OQ$, $-Oz$ и Oy.



Фиг. 1

Если из неподвижной точки, как из центра, провести сферу единичного радиуса, то геометрическое место точек пересечения конуса (1.6) с этой сферой представится в виде двух замкнутых ветвей некоторой сферической кривой, каждой точке которой соответствует одна из полуобразующих конуса (1.6), и, наоборот, каждой из полуобразующих конуса соответствует одна из точек сферической кривой.

Точки пересечения полуосей Ox, Oy, Oz, OS и OQ со сферой обозначим через x, y, z, s, q; диаметрально противоположные точки обозначим через $-x$, $-y$, $-z$, $-s$, $-q$ (фиг. 1).

Следует отметить, что перманентными осями могут быть лишь те из полуобразующих конуса (1.6), для которых уравнения (1.5) дают положительную величину для ω^2. Все такие полуобразующие, а также соответствующие им точки (α, β, γ) сферической кривой будем называть, следуя Штауде, допускаемыми условиями задачи, а остальные— недопускаемыми.

Из уравнений (1.5) при учете условий (1.7) следует, что допускаемыми являются все полуобразующие конуса (1.6), проходящие через любую из точек дуг $(x, -y)$ и (z, s) первой ветви и любую из точек дуг $(y, -z)$ и $(-s, -x)$ второй ветви сферической кривой. Координаты (α, β, γ) точек, принадлежащих указанным дугам сферической кривой, имеют соответственно следующие знаки: $(+, -, -)$; $(+, +, +)$; $(+, +, -)$; $(-, -, -)$.

Для каждой из перманентных осей уравнения (1.5) дают определенную конечную величину квадрата угловой скорости вращения ω^2, за исключением главных осей инерции x, y, z, для которых $\omega^2 = \infty$. Для полуобразующих $\pm OS$ имеем $\omega^2 = 0$, что соответствует равновесию тела, когда его центр тяжести занимает наивысшее или наинизшее положения.

В случаях, когда центр тяжести тела находится в одной из главных плоскостей инерции или на одной из главных осей инерции, или когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, конус (1.6) вырождается в пару плоскостей, либо перестает существовать.

Пусть, например, центр тяжести тела расположен в главной плоскости инерции Oxy, т. е. $z_0 = 0$. Из уравнения (1.6) при этом следует, что конус перманентных осей распадается на плоскость Oxy ($\gamma=0$) и плоскость

$$T(\alpha, \beta) \equiv (B-C)\beta x_0 + (C-A)\alpha y_0 = 0 \tag{1.8}$$

проходящую через третью главную ось инерции z.

Сферическая кривая (1.6) в данном случае состоит из двух окружностей большого круга, ортогональных друг к другу и пересекающихся между собой в точках $\pm k$.

Если предположить для определенности, что

$$C > A > B, \qquad x_0 > 0, \qquad y_0 > 0, \qquad z_0 = 0 \tag{1.9}$$

то нетрудно видеть, что допускаемыми являются все точки (α, β, γ) полуокружности (z, k, $-z$) (для которой $\alpha<0$, $\beta<0, -1\leqslant\gamma\leqslant 1$), расположенной в плоскости (1.8), и дуги (s, y), ($-x$, $-s$), ($-y$, x) окружности $\gamma=0$, для которых соответственно $\alpha>0$, $\beta>0$; $\alpha<0$, $\beta<0$; $\alpha>0$, $\beta<0$.

Из уравнений (1.5) при учете условий (1.9) для каждой перманентной оси находим определенную конечную величину ω^2, за исключением главных осей инерции, для которых $\omega^2=\infty$.

Для осей $\pm OS$ имеем $\omega^2=0$.

В случае, когда центр тяжести тела находится на главной оси инерции, конус перманентных осей распадается на две главные плоскости инерции. Пусть, например,

$$C > A > B, \qquad x_0 > 0, \qquad y_0 = z_0 = 0 \tag{1.10}$$

Нетрудно видеть, что при $y_0 \to 0$ плоскость (1.8) переходит в главную плоскость инерции Oxz ($\beta=0$). При этом допускаемые в случае (1.9) дуги (s, y) и ($-y$, x) окружности $\gamma=0$ сливаются в допускаемую полуокружность (y, x, $-y$), а дуга ($-x$, $-s$) стягивается в точку $-x$; в плоскости Oxz допускаемой является полуокружность (z, $-x$, z), для которой $\alpha<0$; $\beta=0, -1\leqslant\gamma\leqslant 1$. В этом случае для главных осей инерции y, z попрежнему $\omega^2=\infty$, тогда как для главной оси инерции x, несущей центр тяжести тела, угловая скорость вращения ω становится произвольной.

Рассмотрим также случай, когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения. Пусть, например, $A \gtreqless B = C$, а центр тяжести занимает произвольное положение в теле.

Без ограничения общности можно положить в этом случае $x_0>0$, $y_0>0$, $z_0=0$; конус перманентных осей (1.6) распадается при этом на две главные плоскости инерции: Oyz ($\alpha=0$) и Oxy ($\gamma=0$). Легко видеть, что для всех осей, расположенных в плоскости $\alpha=0$, $\omega^2=\infty$; в плоскости Oxy допускаемыми являются оси, проходящие через любую из точек дуг (x, s), (y, $-x$), ($-s$, $-y$) в случае $B>A$, или через любую из точек дуг (x, $-y$), (s, y), ($-x$, $-s$) в случае $A>B$.

Если $x_0=0$, $y_0>0$, $z_0=0$, то допускаемыми являются оси, расположенные в плоскости $\gamma=0$, направляющие косинусы β которых удовлетворяют условию $(A-B)\beta<0$.

Если $x_0>0$, $y_0=z_0=0$, то конус перманентных осей (1.6) перестает существовать; допускаемой является любая из осей, направляющие косинусы которых удовлетворяют условию $(A-B)\alpha>0$.

2. Исследование устойчивости перманентных вращений. 1°. Исследуем устойчивость перманентных вращений в случае произвольного распределения масс тела. Без уменьшения общности можно предполагать что выполняются условия (1.7). Рассмотрим какую-нибудь из допускаемых полуобразующих (α, β, γ) конуса (1.6), отличную от главных осей инерции, которая, будучи направлена вертикально вверх, может служить перманентной осью вращения с постоянной угловой скоростью ω, определяемой одним из уравнений (1.5). Проекции угловой скорости на оси координат будут при этом равны:

$$p_0 = \alpha\omega, \qquad q_0 = \beta\omega, \qquad r_0 = \gamma\omega \tag{2.1}$$

Устойчивость перманентных вращений исследуем по отношению к переменным p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3, полагая в возмущенном движении

$$\begin{gathered} p = p_0 + \xi_1 \qquad q = q_0 + \xi_2, \qquad r = r_0 + \xi_3 \\ \gamma_1 = \alpha + \eta_1, \qquad \gamma_2 = \beta + \eta_2, \qquad \gamma_3 = \gamma + \eta_3 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Подставляя величины (2.2) в уравнения (1.1) и (1.2) и учитывая равенства (1.4) и (1.5), получаем уравнения возмущенного движения твердого тела:

$$A\frac{d\xi_1}{dt} + (C - B)(r_0\xi_2 + q_0\xi_3 + \xi_2\xi_3) = P(z_0\eta_2 - y_0\eta_3) \tag{2.3}$$

$$\begin{pmatrix} pqr, & ABC \\ xyz, & 1,2,3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = r_0\eta_2 + \beta\xi_3 + \xi_3\eta_2 - (q_0\eta_3 + \gamma\xi_2 + \xi_2\eta_3) \tag{2.4}$$

Легко видеть, что уравнения (2.3) — (2.4) обладают следующими первыми интегралами:

$$\begin{aligned} V_1 = {} & A(\xi_1^2 + 2p_0\xi_1) + B(\xi_2^2 + 2q_0\xi_2) + C(\xi_3^2 + 2r_0\xi_3) + \\ & + 2P(x_0\eta_1 + y_0\eta_2 + z_0\eta_3) = \text{const} \\ V_2 = {} & A(p_0\eta_1 + \alpha\xi_1 + \xi_1\eta_1) + B(q_0\eta_2 + \beta\xi_2 + \xi_2\eta_2) + \\ & + C(r_0\eta_3 + \gamma\xi_3 + \xi_3\eta_3) = \text{const} \\ V_3 = {} & \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3) = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Функцию Ляпунова построим по методу Н. Г. Четаева в форме связки интегралов (2.5):

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + \lambda V_3 + \tfrac{1}{4}\mu V_3^2 = \tag{2.6}$$

$$= A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 - 2\omega(A\xi_1\eta_1 + B\xi_2\eta_2 + C\xi_3\eta_3) + 2\mu(\alpha\beta\eta_1\eta_2 + \alpha\gamma\eta_1\eta_3 +$$

$$+ \beta\gamma\eta_2\eta_3) + (\lambda + \mu\alpha^2)\eta_1^2 + (\lambda + \mu\beta^2)\eta_2^2 + (\lambda + \mu\gamma^2)\eta_3^2 + \tfrac{1}{4}\mu f(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

где постоянная

$$\lambda = A\omega^2 - P\frac{x_0}{\alpha} = B\omega^2 - P\frac{y_0}{\beta} = C\omega^2 - \frac{Pz_0}{\gamma} \tag{2.7}$$

что справедливо в силу уравнений (1.5)

$$f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)[\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 4(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3)],$$

μ — произвольная постоянная.

Очевидно, что функция V будет определенно-положительной функцией переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3, если таковой будет квадратичная часть функции V, т. е. квадратичная форма $V - {}^1/_4 \mu f(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Согласно критерию Сильвестра необходимыми и достаточными условиями положительной знакоопределенности последней являются неравенства

$$1)\qquad \lambda - A\omega^2 + \mu\alpha^2 > 0$$

$$2)\qquad (\lambda - A\omega^2)(\lambda - B\omega^2) + \mu[\alpha^2(\lambda - B\omega^2) + \beta^2(\lambda - A\omega^2)] > 0$$

$$\begin{aligned}3)\qquad & \lambda^3 - (A + B + C)\,\omega^2\lambda^2 + (BC + AC + AB)\,\omega^4\lambda - \\ & - ABC\omega^6 + \mu[\lambda^2 - A\omega^2(\beta^2 + \gamma^2)\lambda - B\omega^2(\alpha^2 + \gamma^2)\lambda - \\ & - C\omega^2(\alpha^2 + \beta^2)\lambda + (BC\alpha^2 + AC\beta^2 + AB\gamma^2)\,\omega^4] > 0\end{aligned}$$

Заменяя в этих неравенствах постоянную λ одним из выражений (2.7) и подставляя вместо ω^2 величину, определяемую любым из уравнений (1.5), приведем их к виду:

$$\begin{aligned}1)\qquad & \mu\alpha^2 - P\frac{x_0}{\alpha} > 0 \\ 2)\qquad & P\frac{x_0 y_0}{\alpha\beta} - \mu\left(\frac{x_0}{\alpha}\beta^2 + \frac{y_0}{\beta}\alpha^2\right) > 0 \\ 3)\qquad & \mu\left(\frac{y_0 z_0}{\beta\gamma}\alpha^2 + \frac{x_0 z_0}{\alpha\gamma}\beta^2 + \frac{x_0 y_0}{\alpha\beta}\gamma^2\right) - P\frac{x_0 y_0 z_0}{\alpha\beta\gamma} > 0\end{aligned} \qquad (2.8)$$

При выполнении условий (2.8) функция V будет знакоопределенным интегралом уравнений возмущенного движения тяжелого твердого тела и, по теореме Ляпунова об устойчивости, невозмущенное движение (2.1) будет устойчивым по отношению к переменным p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3.

Проанализируем достаточные условия устойчивости (2.8). Если положить $\mu = 0$, то они сведутся к неравенствам

$$-\frac{x_0}{\alpha} > 0, \qquad -\frac{y_0}{\beta} > 0, \qquad -\frac{z_0}{\gamma} > 0 \qquad (2.9)$$

При учете условий (1.7) очевидно, что условия (2.9) выполняются для всех точек допускаемой дуги $(-s, -x)$ сферической кривой (кроме точки $-x$) или, что то же, для всех полуобразующих конуса (1.6) перманентных осей, находящихся между полуобразующими $-OS$ и $-Ox$.

Отметим, что $\omega^2 = 0$ для полуобразующей $-OS$, что соответствует устойчивому равновесию тела, при котором его центр тяжести находится на вертикали ниже точки опоры O.

Будем считать теперь $\mu \neq 0$. Так как на всех допускаемых дугах, кроме только что рассмотренной дуги $(-s, -x)$, $\alpha > 0$, то очевидно, что первое из условий устойчивости (2.8) может быть удовлетворено лишь выбором некоторого значения $\mu > 0$.

При этом второе из условий (2.8) удовлетворяется выбором соответствующего положительного значения μ при условии

$$\frac{x_0}{\alpha}\beta^2 + \frac{y_0}{\beta}\alpha^2 < 0 \qquad (2.10)$$

Легко видеть, что это условие выполняется на некоторой части допускаемой дуги $(x, -y)$, примыкающей к точке x (в достаточно малой окрестности которой значения α близки к $+1$, а значения β отрицательны и близки к нулю).

Третье из условий (2.8) также удовлетворяется выбором некоторого положительного значения μ для точек (α, β, γ) дуги $(x, -y)$, координаты которых удовлетворяют условию

$$\left(\frac{x_0}{\alpha}\beta^2 + \frac{y_0}{\beta}\alpha^2\right)\frac{z_0}{\gamma} + \frac{x_0 y_0}{\alpha\beta}\gamma^2 > 0 \tag{2.11}$$

Очевидно, это условие выполняется на некоторой части дуги $(x, -y)$, примыкающей к точке x. Так как на этой дуге $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0$, то условие (2.10) заведомо выполняется, если выполнено условие (2.11).

Для выполнения каждого из трех условий (2.8) при значениях $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$, удовлетворяющих условию (2.11), требуется подобрать некоторые положительные значения произвольной постоянной μ, не ограниченные сверху. Поэтому если выбрать значение постоянной μ, равное наибольшему из этих трех ее значений, то условия (2.8) будут выполнены одновременно.

Рассмотрим еще одну функцию Ляпунова:

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + \lambda V_3 + A\frac{\omega}{\alpha}\xi_1 V_3 = A\xi_1{}^2 + B\xi_2{}^2 + C\xi_3{}^2 - 2\omega(B\xi_2\eta_2 + C\xi_3\eta_3) +$$

$$+ 2A\frac{\omega}{\alpha}\xi_1(\beta\eta_2 + \gamma\eta_3) + \lambda(\eta_1{}^2 + \eta_2{}^2 + \eta_3{}^2) + A\frac{\omega}{\alpha}\xi_1(\eta_1{}^2 + \eta_2{}^2 + \eta_3{}^2) \tag{2.12}$$

производная по времени от которой, взятая в силу уравнений возмущенного движения (2.3) — (2.4),

$$V' = A\frac{\omega}{\alpha}\xi_1' V_3 = 0$$

вследствие равенства нулю постоянной третьего из интегралов (2.5). Постоянная λ здесь также определяется уравнениями (2.7). Условиями положительной знакоопределенности квадратичной формы, фигурирующей в правой части равенства (2.12), являются неравенства

$$1)\quad \lambda > 0, \qquad 2)\quad \lambda - B\omega^2 > 0, \qquad 3)\quad \lambda - C\omega^2 > 0$$

$$4)\quad (\lambda - B\omega^2)(\lambda - C\omega^2) - A\frac{\omega^2}{\alpha^2}[(\lambda - B\omega^2)\gamma^2 + (\lambda - C\omega^2)\beta^2] > 0$$

Заменив в этих неравенствах постоянную λ одним из выражений (2.7) и подставив вместо ω^2 величину, определяемую любым из уравнений (1.5), получим следующие достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (2.1):

$$\begin{gathered}1)\quad B\frac{x_0}{\alpha} - A\frac{y_0}{\beta} > 0, \qquad 2)\quad -\frac{y_0}{\beta} > 0, \qquad 3)\quad -\frac{z_0}{\gamma} > 0 \\ 4)\quad \frac{1}{\beta\gamma}\left[y_0 z_0\alpha^2 + \frac{A}{B-C}(y_0\gamma - z_0\beta)\left(\frac{y_0}{\beta}\gamma^2 + \frac{z_0}{\gamma}\beta^2\right)\right] > 0\end{gathered} \tag{2.13}$$

Очевидно, что первые три из этих неравенств выполняются для всех точек допускаемой дуги $(x, -y)$, в то время как четвертое из условий (2.13) выполняется лишь для некоторой части этой дуги, примыкающей к точке x. Можно отметить также, что если провести плоскость

$$S(\beta, \gamma) \equiv y_0\gamma - z_0\beta = 0 \tag{2.14}$$

проходящую через центр тяжести тела и ось Ox, то четвертое из условий (2.13) выполняется, несомненно, для всех точек дуги $(x, -y)$, расположенных с той стороны от плоскости (2.14), для которой $S(\beta, \gamma) \leqslant 0$.

Таким образом, установлено, что устойчивыми перманентными вращениями являются вращения вокруг полуобразующих конуса (1.6), проходящих через любую точку допускаемой дуги $(-s, \ -x)$ сферической кривой, а также через те точки $(\alpha, \ \beta, \ \gamma)$ допускаемой дуги $(x, -y)$, для которых выполняются или условие (2.11), или четвертое из условий (2.13).

В некоторых случаях может оказаться полезным использование достаточных условий неустойчивости перманентных вращений, получаемых рассмотрением первого приближения уравнений возмущенного движения (2.3)—(2.4). Определяющее уравнение последних имеет вид [3,4]

$$\sigma^2 (g_0 \sigma^4 + g_1 \sigma^2 + g_2) = 0$$

где

$$g_0 = ABC, \quad g_1 = (ABC - \mathop{S} AB_1C_1\alpha^2)\,\omega^2 - P \mathop{S} A(B + C)\,x_0\alpha$$

$$\begin{gathered} g_2 = -\omega^4 \mathop{S} AB_1C_1\alpha^2 + P\omega^2 \mathop{S} [AB_1\alpha(x_0\alpha^2 + x_0\gamma^2 + y_0\alpha\beta) - \\ - AC_1\alpha(x_0\alpha^2 + x_0\beta^2 + z_0\alpha\gamma) + 2A_1B_1\gamma^2(x_0\alpha + y_0\beta)] + \\ + P^2(Ax_0\alpha + By_0\beta + Cz_0\gamma)(x_0\alpha + y_0\beta + z_0\gamma) \end{gathered} \tag{2.15}$$

Символ $\mathop{S}$ означает здесь суммирование трех членов, получаемых из находящегося под знаком суммы круговой перестановкой букв A, B, C; A_1, B_1, C_1; α, β, γ; x_0, y_0, z_0, причем

$$A_1 = B - C, \qquad B_1 = C - A, \qquad C_1 = A - B \tag{2.16}$$

При выполнении одного из неравенств

$$g_1 < 0, \qquad g_2 < 0, \qquad g_1^2 - 4g_0g_2 < 0 \tag{2.17}$$

среди корней определяющего уравнения найдутся корни с положительными вещественными частями. В этом случае согласно одной теореме Ляпунова [6] невозмущенное движение (2.1) будет неустойчивым.

Не останавливаясь на анализе условий (2.17) для общего случая (1.7), отметим только, что для прямой OS

$$\frac{\alpha}{x_0} = \frac{\beta}{y_0} = \frac{\gamma}{z_0}$$

которая может быть перманентной осью лишь при $\omega = 0$, первое из условий (2.17) выполняется, если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. По непрерывности можно полагать, что это условие будет выполняться также в некоторой окрестности полуобразующей OS конуса (1.6), т. е. на допускаемой дуге (s, z) сферической кривой существует некоторая область неустойчивости.

2°. При помощи построенной в п. 1° функции Ляпунова (2.6) можно исследовать устойчивость перманентных вращений также в случаях, когда центр тяжести расположен в теле не произвольно, а в главной плоскости инерции или на главной оси инерции тела для неподвижной точки O.

Пусть, например, центр тяжести тела расположен в одной из главных плоскостей инерции; предположим для определенности, что

$$x_0 > 0, \qquad y_0 > 0, \qquad z_0 = 0$$

В этом случае, как указано выше, конус (1.6) перманентных осей распадается на плоскость Oxy и плоскость (1.8). Исследуем сначала устойчивость перманентных вращений вокруг осей, отличных от главных осей инерции и расположенных в плоскости (1.8):

$$T(\alpha, \beta) \equiv A_1\beta x_0 + B_1\alpha y_0 = 0$$

Проекции угловой скорости вращения на оси координат определяются при этом формулами (2.1), в которых α и β удовлетворяют уравнению (1.8), $-1 \leqslant \gamma \leqslant 1$, а ω определяется любым из уравнений (1.5), в которых следует положить теперь $z_0 = 0$.

Обратимся снова к функции (2.6). Первые два из условий знакоопределенности (2.8) этой функции сохраняют свой вид и при $z_0 = 0$, а третье переходит в неравенство

$$\mu \frac{x_0 y_0}{\alpha\beta} \gamma^2 > 0$$

Очевидно, что эти условия выполняются при любом значении $\mu > 0$, если $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\gamma \neq 0$, что имеет место при условии $C > A > B$ для любой из допускаемых перманентных осей, расположенных в плоскости $T(\alpha, \beta) = 0$, за исключением лишь оси, для которой $\gamma = 0$. Следовательно, вращения вокруг указанных осей устойчивы.

Можно указать и неустойчивые перманентные вращения.

Рассмотрим, например, второе из условий неустойчивости (2.17). Используя третье из уравнений (1.5), путем несложных выкладок можно убедиться, что при $z_0 = 0$ это условие принимает вид:

$$g_2 \equiv [-A_1 B_1 C\omega^2 + 3A_1 B_1 P(x_0\alpha + y_0\beta)]\,\omega^2\gamma^2 + P^2(A_1\beta x_0 + B_1\alpha y_0) \times$$

$$\times \left[3(x_0\beta - y_0\alpha) - \frac{1}{C_1}\left(Ay_0 \frac{\alpha}{\beta^2} + Bx_0 \frac{\beta}{\alpha^2}\right) + \frac{1}{C_1}\left(A \frac{x_0}{\beta} + B \frac{y_0}{\alpha}\right)\gamma^2\right] < 0 \qquad (2.18)$$

Для всех осей, расположенных в плоскости

$$T(\alpha, \beta) \equiv A_1\beta x_0 + B_1\alpha y_0$$

за исключением лишь оси, для которой $\gamma = 0$, неравенство (2.18) принимает вид:

$$A_1 B_1 \left[3(x_0\alpha + y_0\beta) - \frac{C}{C_1} \frac{x_0\beta - y_0\alpha}{\alpha\beta}\right] < 0$$

Нетрудно видеть, что это условие в случае $A > B > C$ сводится к неравенству

$$3(x_0\alpha + y_0\beta) > \frac{C}{A - B} \frac{x_0\beta - y_0\alpha}{\alpha\beta} \qquad (2.19)$$

а в случае $B > C > A$ — к противоположному неравенству

$$3(x_0\alpha + y_0\beta) < \frac{C}{A - B} \frac{x_0\beta - y_0\alpha}{\alpha\beta} \qquad (2.20)$$

Таким образом установлено, что перманентные вращения вокруг всех допускаемых осей, расположенных в плоскости $T(\alpha, \beta) = 0$ (за исключением лишь главной оси инерции z и оси, для которой $\gamma = 0$), являются устойчивыми, если центр тяжести тела находится в плоскости, проходящей через среднюю и большую оси эллипсоида инерции для неподвижной точки O, и неустойчивыми, если центр тяжести тела находится в плоскости, проходящей через малую и среднюю [или большую] оси эллипсоида инерции, и при этом выполняется условие (2.19) [или (2.20)].

Отметим, что для случая $B > C > A$ условие (2.20) выполняется, очевидно, если имеет место неравенство

$$A_1 x_0^2 \geqslant B_1 y_0^2$$

В качестве примера можно указать, что это условие выполняется для тяжелого твердого тела, распределение масс которого удовлетворяет условиям Гесса-Аппельрота [10]

$$B(C-A)y_0^2 - A(B-C)x_0^2 = 0, \qquad z_0 = 0 \tag{2.21}$$

или условиям, рассмотренным в диссертации А. А. Богоявленского[1],

$$(B-C)x_0^2 - (C-A)y_0^2 = 0, \qquad z_0 = 0 \tag{2.22}$$

Следовательно, в этих случаях перманентные вращения вокруг осей, расположенных в плоскости $T(\alpha, \beta) = 0$, являются неустойчивыми.

Перейдем к рассмотрению устойчивости перманентных вращений вокруг осей, расположенных в плоскости Oxy и отличных от главных осей инерции. Проекции угловой скорости вращения на оси координат определяются при этом формулами (2.1), в которых α и β удовлетворяют условию $\alpha^2+\beta^2=1$, $\gamma=0$, а ω определяется третьим из уравнений (1.5). Снова рассмотрим функцию (2.6), в которой следует положить теперь $\gamma=0$, а

$$\lambda = A\omega^2 - P\frac{x_0}{\alpha} = B\omega^2 - P\frac{y_0}{\beta}$$

Условия положительной знакоопределенности функции V имеют при этом следующий вид:

$$(1)\quad \frac{1}{C_1\alpha\beta}(A_1\beta x_0 + B_1\alpha y_0) > 0, \qquad (2)\quad \mu\alpha^2 - P\frac{x_0}{\alpha} > 0$$
$$(3)\quad P\frac{x_0 y_0}{\alpha\beta} - \mu\left(x_0\frac{\beta^2}{\alpha} + y_0\frac{\alpha^2}{\beta}\right) > 0 \tag{2.23}$$

Нетрудно видеть, что первое из этих условий выполняется на допускаемых дугах:

$(x, -y)$,	$(-s, -x)$,	(y, k)	если $A > B > C$
$(-y, -s)$,	(k, y)		если $B > C > A$
	$(-s, k)$		если $C > A > B$

тогда как второе и третье из условий (2.23) выполняются при любом неотрицательном значении μ, если $\alpha < 0$ и $\beta < 0$, а также при некотором положительном значении μ, если выполняется условие (2.10).

Следовательно, устойчивыми перманентными вращениями являются вращения вокруг осей, проходящих через любую точку (за исключением точек $-x$, $-y$) допускаемых дуг: $(-s, -x)$ в случае $A>B>C$, $(-y, -s)$ в случае $B>C>A$, $(-s, k)$ в случае $C>A>B$, а также через те точки допускаемых дуг $(x, -y)$ в случае $A>B>C$ и (y, k) в случае $B>C>A$, координаты α и β которых удовлетворяют условию (2.10).

Можно отметить, что это условие для точек дуги $(x, -y)$ в случае $A>B>C$ можно переписать в виде неравенства

$$\frac{x_0}{y_0} < -\frac{\alpha^3}{\beta^3} \tag{2.24}$$

а для точек дуги (y, k) в случае $B>C>A$ в виде неравенства, противоположного (2.24).

---

[1] На тему «Некоторые необходимые условия существования однозначных решений в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки» (рукопись). Институт механики АН СССР, 1950 г.

Нетрудно видеть, что если в плоскости Oxy провести прямую

$$S_1(\alpha, \beta) \equiv x_0\alpha + y_0\beta = 0$$

ортогональную прямой, проходящей через центр тяжести тела, и обозначить через s_1 точку пересечения прямой $S_1(\alpha, \beta) = 0$ с дугой $(x, -y)$ окружности $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, то условие (2.10) будет выполняться для всех точек дуги (x, s_1) в случае $A > B > C$, если $x_0 < y_0$, и всех точек дуги $(y, -s_1)$ в случае $B > C > A$, если $x_0 > y_0$. Так, например, для твердого тела в случае $B > C > A$, распределение масс которого удовлетворяет условиям (2.22), точки k и $-s_1$ совпадают друг с другом, и если

$$C - A > B - C \qquad (x_0 > y_0)$$

то перманентные вращения вокруг оси, проходящей через любую из точек дуги (y, k), кроме точки y, являются устойчивыми. Для твердого тела, распределение масс которого удовлетворяет условиям (2.21), перманентные вращения вокруг указанных осей также будут устойчивыми, если $AB_1{}^2 > A_1{}^2B$.

В случае эллипсоида вращения, когда $B = C \gtreqless A$, при помощи достаточных условий устойчивости (2.23) легко установить, что устойчивыми перманентными вращениями являются вращения вокруг осей, проходящих через любую точку (за исключением точек $\pm x$, $-y$) допускаемых дуг $(-x, -s)$ при $A > B$ и $(-s, -y)$ при $B > A$, а также через те точки дуги $(x, -y)$ в случае $A > B$, для координат которых справедливо неравенство (2.24).

3°. Исследуем устойчивость перманентных вращений в случае, когда центр тяжести тела расположен на одной из главных осей инерции для неподвижной точки. Пусть, например,

$$x_0 > 0, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = 0 \tag{2.25}$$

В этом случае конус (1.6) перманентных осей распадается на две главные плоскости инерции Oxy и Oxz, пересекающиеся вдоль главной оси инерции x, проходящей через центр тяжести тела.

Рассмотрим устойчивость перманентных вращений вокруг осей, расположенных в плоскости Oxz $(\beta = 0)$ и отличных от главных осей инерции.

Проекции угловой скорости вращения на оси координат определяются при этом формулами (2.1), в которых следует положить $\beta = 0$, а ω определяется вторым из уравнений (1.5).

Рассмотрим функцию Ляпунова (2.6), в которой следует положить теперь $\beta = 0$, а $\lambda = A\omega^2 - Px_0/\alpha = C\omega^2$.

Условия знакоопределенности этой функции легко приводятся к следующему виду (при $\mu > 0$):

$$(1) \qquad (C - A)\,\omega^2\gamma^2 > 0, \qquad (2) \qquad C > B$$

Следовательно, если $C > A$ и $C > B$, то перманентные вращения вокруг осей, расположенных в плоскости Oxz, устойчивы.

Можно указать также неустойчивые вращения. В самом деле, в случае (2.25) второе из условий неустойчивости (2.17) сводится к неравенству

$$(B - C)\left[3(C - A)\alpha + C\frac{1}{\alpha}\right] < 0 \tag{2.26}$$

Очевидно, это условие выполняется в случаях:

(1) когда $B > C > A$ для всех допускаемых осей ($\alpha < 0$), расположенных в плоскости Oxz;

(2) когда $A > C > B$ для допускаемых осей ($\alpha > 0$), косинусы углов α которых с осью Ox удовлетворяют неравенству

$$\alpha^2 < \frac{C}{3(A-C)} = \alpha_1^2 \tag{2.27}$$

(3) когда $A > C$ и $B > C$ для допускаемых осей ($\alpha > 0$), косинусы углов α которых с осью Ox удовлетворяют неравенству

$$\alpha^2 > \alpha_1{}^2 \tag{2.28}$$

Итак, доказано, что в случае (2.25) перманентные вращения вокруг осей, расположенных в плоскости Oxz, являются:

устойчивыми, если ось x, проходящая через центр тяжести тела, является большой или средней осью, а ось z — малой осью эллипсоида инерции;

неустойчивыми, если оси x и z являются соответственно большой и средней осями эллипсоида инерции, или если оси x и z являются соответственно малой и средней осями эллипсоида инерции и для направляющего косинуса α перманентной оси выполняется неравенство (2.27), или если оси x и z являются соответственно малой (или средней) и большой осями эллипсоида инерции и для направляющего косинуса α перманентной оси выполняется неравенство (2.28).

Для устойчивости или неустойчивости перманентных вращений вокруг допускаемых осей, расположенных в плоскости Oxy, результаты аналогичны только что сформулированным и получаются из них перестановкой обозначений осей z и y и моментов инерции C и B.

Рассмотрим устойчивость перманентных вращений в случае, когда эллипсоид инерции для неподвижной точки тела является эллипсоидом вращения. Пусть, например,

$$B = C, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 > 0, \qquad z_0 = 0 \tag{2.29}$$

Конус перманентных осей распадается на две главные плоскости инерции Oxy и Oyz, причем для осей, расположенных в плоскости Oyz, угловая скорость перманентного вращения $\omega = \infty$.

Для исследования устойчивости перманентных вращений вокруг осей, расположенных в плоскости Oxy, воспользуемся функцией Ляпунова (2.6), в которой следует теперь положить $\gamma = 0$ и $\lambda = A\omega^2 = B\omega^2 - Py_0/\beta$.

Условия положительной знакоопределенности этой функции имеют вид:

$$(1) \quad \lambda - C\omega^2 > 0, \qquad (2) \quad \mu\alpha^2(\lambda - B\omega^2) > 0,$$
$$(3) \quad \mu\alpha^2 + \lambda - A\omega^2 > 0$$

Очевидно, эти условия выполняются при любом $\mu > 0$, если $A > B = C$; при этом косинус угла β между перманентной осью и осью Oy будет отрицательным.

Рассмотрим теперь второе из условий неустойчивости (2.17). При выполнении условий (2.29) и при $B > A$, когда $\beta > 0$, оно сводится к неравенству

$$\beta^2 > \frac{A}{3(B-A)} = \beta_1{}^2 \tag{2.30}$$

Следовательно, перманентные вращения вокруг допускаемых осей, расположенных в плоскости Oxy, при условиях (2.29):

устойчивы, если $A > B$;

неустойчивы, если $B > A$ и при этом выполняется неравенство (2.30).

Нам остается исследовать устойчивость вращения вокруг главной оси инерции x, проходящей через центр тяжести тела, которая может быть перманентной вертикальной осью при любой угловой скорости вращения ω.

При этом в отличие от условий (2.25) мы будем предполагать, что $x_0 \gtrless 0$, $y_0 = z_0 = 0$.

Для рассмотрения устойчивости невозмущенного движения

$$p_0 = \omega, \qquad \alpha = 1, \qquad q_0 = r_0 = 0, \qquad \beta = \gamma = 0$$

воспользуемся функцией Ляпунова (2.6), в которой следует учесть сделанные предположения и положить $\lambda = A\omega^2 - Px_0$.

Условия положительной знакоопределенности функции V приводятся при этом к виду:

$$(1) \quad \mu > Px_0, \qquad (2) \quad (A - B)\,\omega^2 > Px_0, \qquad (3) \quad (A - C)\,\omega^2 > Px_0 \tag{2.31}$$

Первому из этих условий всегда можно удовлетворить выбором соответствующего значения μ. Остается удовлетворить двум другим условиям. Рассмотрим возможные случаи [4].

1. *Короткоосный гироскоп*; $A > B > C$. Если $x_0 < 0$, то условия (2.31) удовлетворяются при любом значении ω. Следовательно, короткоосный висящий гироскоп устойчив при любой угловой скорости вращения.

Очевидно, это утверждение остается справедливым и для случая эллипсоида вращения, когда $A = B \geqslant C$ или $A \geqslant B = C$.

Если $x_0 > 0$, то условия (2.31) удовлетворяются при

$$\omega^2 > \frac{Px_0}{A - B} \equiv \omega_1^2 \tag{2.32}$$

Следовательно, при угловой скорости вращения $\omega > \omega_1$ короткоосный выпрямленный гироскоп устойчив. Это утверждение справедливо и для гироскопа Лагранжа, когда $B = C$.

2. *Длинноосный гироскоп*; $B > C > A$. Условия (2.31) выполняются при этом лишь в случае $x_0 < 0$, если $\omega^2 < \omega_1^2$. Таким образом, длинноосный висящий гироскоп устойчив, если его угловая скорость $\omega < \omega_1$ это же справедливо и для случая эллипсоида вращения, когда $B = C > A$ или $B > C = A$.

3. *Среднеосный гироскоп*; $C > A \geqslant B$. Условия (2.31) выполняются при этом лишь в случае

$$x_0 < 0, \qquad \text{если} \quad \omega^2 < \frac{Px_0}{A - C} \equiv \omega_2^2 \tag{2.33}$$

Так как необходимое условие [4] устойчивости в этом случае также имеет вид (2.33), то среднеосный висящий гироскоп устойчив лишь в случае, когда величина его угловой скорости удовлетворяет условию (2.33).

Отметим, что аналогичные достаточные условия устойчивости вращения тела вокруг главной оси инерции получены также в работе [11] при помощи функции Ляпунова вида (2.12).

4°. Проиллюстрируем полученные в п. 3 результаты на примерах рассмотрения перманентных вращений тяжелых твердых тел, распределение масс которых подчинено заданным условиям, соответствующим некоторым известным случаям интегрирования уравнений движения [12].

1. *Условия С. В. Ковалевской*: $B = C = 2A$, $x_0 = z_0 = 0$, $y_0 > 0$.

Перманентные вращения вокруг допускаемых осей ($\beta > 0$), расположенных в плоскости Oxy, неустойчивы, если величина косинуса угла β между перманентной осью и осью Oy удовлетворяет неравенству (2.30):

$$\beta^2 > \beta_1^2 = \frac{1}{3}$$

Известно, что вращение гироскопа Ковалевской вокруг главной оси инерции, несущей центр тяжести, устойчиво только в случае[13], когда центр тяжести расположен на вертикали ниже точки опоры ($\beta = -1$).

2. *Условия Д. К. Бобылева—В. А. Стеклова*: $A = 2B$, $y_0 = z_0 = 0$, $x_0 > 0$. Рассмотрим возможные подслучаи.

(а) $C > A = 2B$. Вращения вокруг допускаемых осей ($\alpha < 0$), расположенных в плоскости Oxz, устойчивы, а вращения вокруг осей ($\alpha > 0$), расположенных в плоскости Oxy, неустойчивы, если величина косинуса α угла между перманентной осью и осью Ox удовлетворяет неравенству

$$\alpha^2 > \alpha_2^2 = \frac{1}{3} \qquad \left(\alpha_2^2 = \frac{B}{3(A-B)}\right)$$

Вращения вокруг оси $-Ox$ ($\alpha = -1$) устойчивы лишь при $\omega < \omega_2$, где $\omega_2^2 = Px_0 / (C - A)$, вращения вокруг оси Ox ($\alpha = 1$) неустойчивы [4].

(б) $A > C > B$. Вращения вокруг перманентных осей ($\alpha > 0$) неустойчивы, если для косинусов α осей, расположенных в плоскости Oxz, выполняется условие $\alpha^2 < \alpha_1^2$, а в плоскости Oxy — условие $\alpha^2 > \alpha_2^2 = 1/3$.

Вращения вокруг оси $-Ox$ ($\alpha = -1$) устойчивы при любой величине угловой скорости, а вокруг оси Ox ($\alpha = 1$) — при $\omega > \omega_2$.

3. *Условия В. А. Стеклова*: $B > A > 2C$, $x_0 > 0$, $y_0 = z_0 = 0$. Перманентные вращения вокруг осей, расположенных в плоскости Oxy, устойчивы, а в плоскости Oxz — неустойчивы, если $\alpha^2 > \alpha_1^2$.

Вращения вокруг оси $-Ox$ ($\alpha = -1$) устойчивы лишь при $\omega < \omega_1$, вращения вокруг оси Ox ($\alpha = 1$) неустойчивы [4].

П. А. Кузьмин [14] заметил, что при некоторых начальных условиях можно получить решение, похожее на решение в случае В. А. Стеклова, но при иных ограничениях на моменты инерции тела, а именно: $2B > A > 2C$, $A > B$.

Легко видеть, что при этом перманентные вращения неустойчивы, если для соответствующих осей, расположенных в плоскости Oxz, выполняется условие $\alpha^2 > \alpha_1^2$, а в плоскости Oxy — условие $\alpha^2 < \alpha_2^2$.

Вращения вокруг оси $-Ox$ ($\alpha = -1$) устойчивы при произвольной угловой скорости, а вокруг оси Ox ($\alpha = 1$) — при $\omega > \omega_1$.

4. *Условия Д. Н. Горячева*: $AC = 8(B - C)(A - 2B)$, $x_0 > 0$, $y_0 = z_0 = 0$. Рассмотрим возможные подслучаи.

(а) $C > A > B$; $2B > A$. Перманентные вращения вокруг допускаемых осей, расположенных в плоскости Oxz, устойчивы, а в плоскости Oxy — неустойчивы, если $\alpha^2 > \alpha_2^2$. Вращения вокруг оси $-Ox$ ($\alpha = -1$) устойчивы лишь при $\omega < \omega_2$.

(б) $C > B > A$. Перманентные вращения вокруг осей, расположенных в плоскости Oxz, устойчивы, а в плоскости Oxy — неустойчивы. Вращения вокруг оси $-Ox$ $(\alpha = -1)$ устойчивы, если $\omega < \omega_1$.

Аналогично можно было бы рассмотреть устойчивость перманентных вращений твердого тела, распределение масс которого удовлетворяет *условиям Н. Ковалевского* [15]:

$$AC = 9(B - C)(A - 2B), \qquad x_0 > 0, \qquad y_0 = z_0 = 0$$

Например, в случае $2B > A > C > B$ вращения неустойчивы, если для соответствующих осей, расположенных в плоскости Oxz, выполняется условие $\alpha^2 < \alpha_1^2$, а в плоскости Oxy — условие $\alpha^2 > \alpha_2^2$.

Вращения вокруг оси $-Ox$ $(\alpha = -1)$ устойчивы при любой угловой скорости; вокруг оси $Ox\,(\alpha = 1)$ — при $\omega > \omega_2$.

5°. *Условия С. А. Чаплыгина*: $x_0 > 0$, $y_0 = z_0 = 0$.

$$0.6 > \frac{C}{A} > 0.5965, \qquad 1.5 < \frac{B}{A} < 1.5965 \qquad (B > A > C).$$

Перманентные вращения вокруг допускаемых осей, расположенных в плоскости Oxy, устойчивы, а в плоскости Oxz — неустойчивы при $\alpha^2 > \alpha_1^2$.

Перманентные вращения вокруг оси $-Ox$ $(\alpha = -1)$ устойчивы лишь при $\omega < \omega_1$, вращения вокруг оси Ox $(\alpha = 1)$ неустойчивы [4].

6. *Условия Д. Н. Горячева—С. А. Чаплыгина*: $B = C = 4A$, $y_0 > 0$, $x_0 = z_0 = 0$. Перманентные вращения вокруг допускаемых осей, расположенных в плоскости Oxy, неустойчивы, если величина β косинуса угла между рассматриваемой осью и осью Oy удовлетворяет условию $\beta^2 > \beta_1^2 = 1/9$.

Вращения вокруг оси $-Oy$ $(\beta = -1)$ устойчивы при любой угловой скорости.

Следует подчеркнуть, что в приведенных выше примерах мы рассматривали лишь условия, налагаемые на распределение масс твердого тела, не касаясь вопроса о выборе начальных условий, соответствующих тому или иному из частных случаев интегрирования уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Последние в некоторых частных случаях (например, в случае Горячева-Чаплыгина) исключают перманентные вращения тела вокруг вертикали.

Поступила 27 IX 1955

ЛИТЕРАТУРА

Rauth

1. М л о д з е е в с к и й Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. VII, 1894.
2. S t a u d e O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen. Punkt. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 113, S. 318—334, 1894.
3. G r a m m e l R. Die Stabilität der Staudeschen Kreiselbewegungen, Mathematische Zeitschrift, Bd. 6, 1920.
4. Г р а м м е л ь Р. Гироскоп, его теория и применения, т. I, ИЛ, 1952.

5. Bottema O. De stabiliteit van de tolbewegingen van Staude. Proceedings Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, vol. XLVIII, p. 316—325, dec. 1945.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
7. Жуковский Н. Е. О прочности движения. Собр. соч., т. I. ОГИЗ, 1948.
8. Четаев Н. Г. О достаточных условиях устойчивости вращательных движений снаряда. ПММ, т. VII, 1943.
9. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
10. Суслов Г. К. Теоретическая механика. ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.
11. Скимель В. Н. К задачам устойчивости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, ПММ, т. XX, в 1, 1956.
12. Кузьмин П. А. Частные виды движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки (в трудах русских ученых). Труды КАИ, т. XXVII, 1953.
13. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.
14. Кузьмин П. А. Дополнение к случаю В. А. Стеклова движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, т. XVI, вып. 2, 1952.
15. Kowalewski N., Eine neue particulare Lösung der Differentialgeichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Ann., Bd. 65, 1908.