Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Б. И. Рабинович

(Чкалов)

Вопрос о колебаниях жидкости в движущейся цистерне впервые был рассмотрен Г. Е. Павленко в 1936 г.[5].

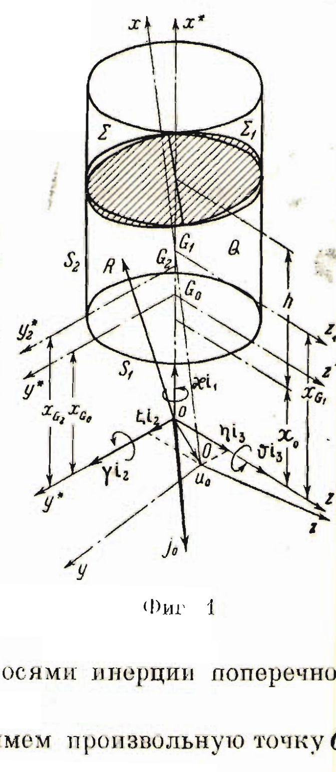
В 1950 г. Г. С. Нариманов предложил приближенные уравнения движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью, составленные на основе гипотезы, аналогичной гипотезе Релея, а затем более точные уравнения, с учетом бесконечного множества степеней свободы у жидкости[4]. Аналогичные уравнения были в дальнейшем независимо выведены Н. Н. Моисеевым[2,3]. В работе Г. С. Нариманова[4], а также и Н. Н. Моисеева[3] рассмотрены и некоторые задачи устойчивости для тела, частично заполненного жидкостью. Несколько раньше одна частная задача устойчивости была решена Л. Н. Сретенским[6].

В настоящей работе дается вывод уравнений возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, ось которой отклонена на малый угол от направления поля внешних массовых сил, методом, несколько отличным от примененного в работах [2,3,4].

В результате уравнения движения упрощаются за счет исчезновения некоторых сумм, содержащих бесконечное множество членов.

§ 1. Постановка задачи. Будем рассматривать твердое тело с одной цилиндрической полостью, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, находящееся в поле массовых сил, обладающих потенциалом.

Введем две системы координат (фиг. 1): абсолютную $O^*x^*y^*z^*$ и связанную $Oxyz$. Система координат $O^*x^*y^*z^*$ может совершать некоторое заданное невозмущенное движение, перемещение же $Oxyz$ относительно $O^*x^*y^*z^*$ определяет возмущенное движение. Ось O^*x^* параллельна образующей полости в невозмущенном движении и проходит через центры масс площадей поперечных сечений жидкости в направлении к свободной поверхности, а оси O^*y^* и O^*z^* совпадают с главными осями инерции поперечного сечения.



Фиг. 1

За начало системы координатных осей примем произвольную точку O^* на оси центров.

Введем далее вспомогательную систему координат $G^*x^*y^*z^*$ с началом в произвольной точке G^* в плоскости $O^*y^*z^*$, получающуюся из $O^*x^*y^*z^*$ путем параллельного переноса, и соответствующую связанную систему координат $Gxyz$.

Контур поперечного сечения полости будем считать произвольной кусочно-гладкой линией с уравнением $f(y, z) = 0$.

Введем следующие обозначения:

Q — объем, занятый жидкостью;
S_1 — поверхность дна;
Σ_1 — невозмущенная свободная поверхность;
Σ — проекция невозмущенной свободной поверхности на плоскость, нормальную к оси полости и отсекающую тот же объем Q;
S_2 — боковая поверхность цилиндра, ограниченного плоскостью дна и плоскостью Σ;
σ — полная поверхность объема Q;
ν — орт внешней нормали к поверхности σ;
S — площадь поперечного сечения жидкости;
C — контур, охватывающий S;
$\mathbf{s}$ — орт касательной к контуру C;
$\mathbf{R}$ — радиус-вектор произвольной точки объема Q в системе $O^*x^*y^*z^*$;
θ — угол наклона внешней нормали к контуру C к оси Oy;
x_0 — расстояние от начала координат до плоскости S_1;
x_{G_0} — расстояние от начала координат до центра масс тела с жидкостью, затвердевшей в невозмущенном состоянии;
$\mathbf{j}^\circ$ — вектор полного ускорения массовых сил невозмущенного движения;
ρ_0 — массовая плотность жидкости, μ — масса жидкости;
$\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты системы $O^*x^*y^*z^*$;
$\mathbf{u}_0$ — вектор перемещения точки O в возмущенном движении;
ω — вектор малого поворота системы $Oxyz$ относительно $O^*x^*y^*z^*$;
ω° — вектор малого поворота нормали к свободной поверхности относительно оси полости O^*x^* в невозмущенном движении:

$$\mathbf{u}_0 = \eta \mathbf{i}_2 + \zeta \mathbf{i}_3, \qquad \omega = \varkappa \mathbf{i}_1 + \gamma \mathbf{i}_2 + \vartheta \mathbf{i}_3, \qquad \omega^\circ = \gamma^\circ \mathbf{i}_2 + \vartheta^\circ \mathbf{i}_3$$

Заметим, что мы считаем равным нулю x — компонент вектора u_0, так как учет его дает тривиальный результат: жидкость движется как твердое тело.

Сформулируем основные допущения, которые принимаются обычно при решении такого рода задач.

1. Вектор $\mathbf{j}^\circ$ отклонен на малый угол от обратного направления оси O^*x^*.

2. Жидкость идеальная и несжимаемая.

3. Поле массовых сил невозмущенного движения потенциальное.

4. Перемещения и скорости всех частиц жидкости и стенок полости суть малые величины в том смысле, что можно пренебречь членами второго порядка по сравнению с линейными.

В соответствии с этими допущениями движение жидкости будет все время потенциальным в силу теоремы Лагранжа. Кроме того, граничные условия на S_1 и S_2 можно отнести к неподвижным стенкам, условие на свободной поверхности Σ_1 перенести на плоскость Σ и вектор $\mathbf{j}^\circ$ заменить его компонентом по оси $O^*x^*\mathbf{j}$, модуль которого обозначим j (остальные два компонента j^0 отнесем к невозмущенному движению).

§ 2. Граничные и начальные условия для потенциала смещений. Введем, пользуясь идеей, высказанной Д. Е. Охоцимским, вместо потенциала скоростей Ψ потенциал смещений Φ, связанный с первым:

$$d\Phi / dt = \Psi \tag{2.1}$$

где производная по t берется в абсолютной системе координат.

Очевидно, что для Φ имеют место уравнения

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi, \qquad \triangle\Phi = 0 \qquad \left(\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}, \triangle = \nabla^2\right) \tag{2.2}$$

Предположим, что построена система функций $\varphi_n(x, y, z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющих трехмерному уравнению Лапласа $\triangle\varphi_n(x, y, z) = 0$ и ортогональных на области Σ:

$$\iint_\Sigma \varphi_n\varphi_m dS = 0 \text{ при } n \neq m, \qquad \iint_\Sigma \varphi_n\varphi_m dS \neq 0 \text{ при } n = m \tag{2.3}$$

Потенциал смещений будем искать в следующем виде:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{5} u_k(t)\,\Phi_k(x, y, z) + \sum_{k=3}^{4} u_k^\circ(t)\,\Phi_k^\circ(x, y, z) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)\,\varphi_n(x, y, z) \tag{2.4}$$

где $r_n(t)$ — коэффициенты разложения гармонической функции, характеризующей форму возмущенной свободной поверхности жидкости, в обобщенный ряд Фурье по функциям $\varphi_n(x_0 + h, y, z)$, для которых примем нормировку

$$\frac{\partial\varphi_n(x_0 + h, y_f, z_f)}{\partial x} = 1 \tag{2.5}$$

при этом y_f, z_f — координаты произвольной точки f контура C, а через u_k, u_k° временно обозначены компоненты векторов $\mathbf{u}_0$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}^\circ$:

$$\eta = u_1, \ \zeta = u_2, \ \gamma = u_3, \ \vartheta = u_4, \ \varkappa = u_5, \ \gamma^\circ = u_3^\circ, \ \vartheta^\circ = u_4^\circ \tag{2.6}$$

Бесконечный ряд (2, 4) будем полагать сходящимся абсолютно и равномерно относительно x, y, z вместе со своими вторыми производными по x, y, z, t в области Q и на ограниченном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T$.

Граничные условия для Φ установим, исходя из того, что функции φ_n определяют волновые движения на поверхности жидкости, а Φ_k $(k = 1, 2, \ldots, 5)$ — движение жидкости, связанное с перемещением стенок, при котором свободная поверхность остается невозмущенной.

Имеем

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на } S_1 + S_2 \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \frac{\partial\Phi_k}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на } \Sigma \quad (k = 1, \ldots, 5) \tag{2.7}$$

Далее для Φ имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = (\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{R}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\omega} && \text{на } S_1 + S_2 \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \frac{\varphi_n}{\varphi_n^\circ} + \mathbf{R}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\omega}^\circ && \text{на } \Sigma, \qquad \varphi_n^\circ = \varphi_n(x_0 + h, y_f, z_f) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Начальные условия для функций u_k, r_n будут

$$\begin{aligned} &u_k(0) = u_{k0}, && u_k'(0) = \dot{u}_{k0} && (k = 1, \ldots, 5) \\ &r_n(0) = r_{n0}, && r_n'(0) = \dot{r}_{n0} && (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь r_{n0} и $\dot{r}_{n0}$— коэффициенты разложения функций, определяющих форму возмущенной свободной поверхности и распределение нормальных скоростей на ней при $t=0$, в обобщенные ряды Фурье по функциям φ_n:

$$\xi - \xi^\circ = f_1(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_{n0}\varphi_n(x_0 + h, y, z) \tag{2.10}$$

$$\frac{d(\xi - \xi^\circ)}{dt} = f_2(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{r}_{n0}\varphi_n(x_0 + h, y, z)$$

где $\xi^\circ = u_3^\circ z - u_4^\circ y$ — апликата невозмущенной свободной поверхности, а ξ — возмущенной.

Легко показать, что полная производная по времени от φ_n, взятая в системе координат $O^*x^*y^*z^*$, совпадает с точностью до малых первого порядка с локальной производной по времени в системе $Oxyz$. Функции f_1, f_2, φ_n, $\partial\varphi_n/\partial x$ ортогональны функции $\varphi_0 = c = \text{const}$ в силу уравнения сохранения массы и уравнения неразрывности, поэтому система функций $\varphi_n (n = 1, 2, \ldots)$, вообще говоря, не является полной, и к ней надо добавить функцию $\varphi_0 = c$. Однако в силу того, что выбранные оси Oy, Oz являются центральными для площади S, свободный член разложения по φ_n всех функций, которые встретятся ниже, равен нулю, и поэтому функцию φ_0 можно исключить из рассмотрения.

§ 3. Решение краевых задач для функций Φ_k и Φ_k°. Введем, следуя Н. Е. Жуковскому [1], новые гармонические функции F_3, F_4, F_5, определяемые уравнениями

$$F_3 = \Phi_3 + xz, \qquad F_4 = \Phi_4 - xy, \qquad \frac{\partial F_5}{\partial s} = -\frac{\partial \Phi_5}{\partial \nu}, \qquad \frac{\partial \Phi_5}{\partial s} = \frac{\partial F_5}{\partial \nu} \tag{3.1}$$

Решение краевой задачи для функций Φ_1 и Φ_2 очевидно:

$$\Phi_1 = y, \qquad \Phi_2 = z \tag{3.2}$$

Поэтому определению будут подлежать только функции F_3, F_4, F_5, φ_n, Φ_3°, Φ_4°. Граничные условия для них в силу (2.7), (2.8) и (3.1) таковы:

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = 2z, \qquad \frac{\partial F_4}{\partial x} = -2y \qquad \text{при } x = x_0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = z, \qquad \frac{\partial F_4}{\partial x} = -y \qquad \text{при } x = x_0 + h$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \nu} = 0, \qquad \frac{\partial F_4}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{при } f(y, z) = 0$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = 0 \qquad \text{при } x = x_0$$

$$\frac{\partial F_5}{dx} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\varphi_n}{\overset{\circ}{\varphi}_n} \qquad \text{при } x = x_0 + h$$

$$F_5 = \frac{y^2 + z^2}{2}, \qquad \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{при } f(y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_3^\circ}{\partial \nu} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_4^\circ}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{при } x = x_0 \text{ и } f(y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_3^\circ}{\partial x} = z \qquad \frac{\partial \Phi_4^\circ}{\partial x} = -y \qquad \text{при } x = x_0 + h$$

Функции φ_n имеют вид:

$$\varphi_n = \chi_n(x)\,\psi_n(y, z) \tag{3.4}$$

В этом выражении функции ψ_n ортогональны на области S и удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_n}{\partial y^2} + k_n^2\psi_n = 0 \tag{3.5}$$

граничному условию

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial\nu} = 0 \qquad \text{при } f(y, z) = 0 \tag{3.6}$$

и условию нормировки

$$\psi_n = 1 \qquad \text{при } y = y_f,\ z = z_f \tag{3.7}$$

Условие (3.6) определяет счетное множество собственных чисел k_n, соответствующих системе функций ψ_n, ортогональных на S. Обозначим норм этой системы через N_n:

$$N_n^2 = \iint\limits_S \psi_n^2\, dS \tag{3.8}$$

Так как $\Delta\varphi_n = 0$, то в силу уравнения (3.4) и граничных условий (3.3) функции $\chi_n(x)$ имеют вид:

$$\chi_n(x) = \frac{\operatorname{ch} k_n(x - x_0)}{k_n \operatorname{sh} k_n x}. \tag{3.9}$$

Пользуясь системой функций ψ_n, которую будем полагать известной, легко решить краевые задачи для функций F_3 и F_4. Представим для этого F_3 и F_4 в виде

$$\begin{aligned} F_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n\chi_n(x) + A_n^*\chi_n^*(x)]\,\psi_n(y, z) \\ F_4 &= \sum_{n=1}^{\infty} [B_n\chi_n(x) + B_n^*\chi_n^*(x)]\,\psi_n(y, z) \end{aligned} \tag{3.10}$$

где A_n, B_n, A_n^*, B_n^* — неопределенные пока постоянные, а

$$\chi_n^*(x) = -\frac{\operatorname{ch} k_n(x - x_0 - h)}{k_n \operatorname{sh} k_n h} \tag{3.11}$$

Используя граничные условия для F_3 и F_4 при $x = x_0$ и $x = x_0 + h$, получим

$$\begin{aligned} z &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\psi_n(y, z), \qquad A_n^* = 2A_n, \\ y &= -\sum_{n=1}^{\infty} B_n\psi_n(y, z), \qquad B_n^* = 2B_n \end{aligned} \tag{3.12}$$

т. е. A_n и B_n — коэффициенты разложений функций z и $-y$ в обобщенные ряды Фурье по функциям ψ_n:

$$A_n = \frac{C_n}{N_n^2}, \qquad B_n = -\frac{D_n}{N_n^2} \tag{3.13}$$

где

$$C_n = \iint\limits_S z\psi_n(y, z)\, dS, \qquad D_n = \iint\limits_S y\psi_n(y, z)\, dS \tag{3.14}$$

В результате найдем окончательно:

$$F_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{N_n^2} K_n(x) \psi_n(y, z), \qquad F_4 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{N_n^2} K_n(x) \psi_n(y, z) \tag{3.15}$$

где

$$K_n(x) = 2\chi_n^*(x) + \chi_n(x) = \frac{\operatorname{ch} k_n(x - x_0) - 2\operatorname{ch} k_n(x - x_0 - h)}{k_n \operatorname{sh} k_n h} \tag{3.16}$$

Определение функции F_5 сводится к решению задачи Дирихле для области S.

Эту функцию в дальнейшем будем считать известной и введем по аналогии с (3.14) обозначение

$$E_n = \iint\limits_S \Phi_5(y, z) \psi_n(y, z) \, dS \tag{3.17}$$

Применяя к функциям y, z, Φ_5 и ψ_n формулу Грина на плоскости и используя уравнение (3.5) и граничное условие (3.6), приведем выражения для C_n, D_n и E_n к следующему виду:

$$C_n = \frac{1}{k_n^2} \oint\limits_C \psi_n \frac{\partial z}{\partial \nu} ds = -\frac{1}{k_n^2} \oint\limits_C \psi_n \frac{\partial y}{\partial s} ds = \frac{1}{k_n^2} \oint\limits_C y \frac{\partial \psi_n}{\partial s} ds$$

$$D_n = \frac{1}{k_n^2} \oint\limits_C \psi_n \frac{\partial y}{\partial \nu} ds = \frac{1}{k_n^2} \oint\limits_C \psi_n \frac{\partial z}{\partial s} ds = -\frac{1}{k_n^2} \oint\limits_C z \frac{\partial \psi_n}{\partial s} ds \tag{3.18}$$

$$E_n = \frac{1}{k_n^2} \oint\limits_C \psi_n \frac{\partial \Phi_5}{\partial \nu} ds = -\frac{1}{k_n^2} \oint\limits_C \psi_n \frac{\partial F_5}{\partial s} ds = \frac{1}{2k_n^2} \oint\limits_C (y^2 + z^2) \frac{\partial \psi_n}{\partial s} ds$$

Функции Φ_3° и Φ_4° определяются тем же методом, что и F_3 и F_4:

$$\begin{aligned} \Phi_3^\circ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{N_n^2} \chi_n(x) \psi_n(y, z) \\ \Phi_4^\circ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{N_n^2} \chi_n(x) \psi_n(y, z) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Приведем в заключение некоторые нужные для дальнейшего соотношения, вытекающие из определения C_n и D_n как коэффициентов Фурье:

$$\begin{gathered} J_y = \iint\limits_S z^2 \, dS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{N_n^2}, \qquad J_z = \iint\limits_S y^2 \, dS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n^2}{N_n^2} \\ S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 C_n^2}{N_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 D_n^2}{N_n^2} \end{gathered} \tag{3.20}$$

§ 4. Общие формулы для главного вектора и главного момента сил, действующих со стороны жидкости. Силы, действующие на тело в возмущенном движении, распадаются на гидростатические и гидродинамические. Главный вектор гидростатических сил в возмущенном движении равен нулю (т. к. «статический» поворот свободной поверхности

$\xi = \xi^\circ$ отнесен к невозмущенному движению), а главный момент определяется выражением

$$\mathbf{M}_0^{(s)} = j\rho_0 \left[\mathbf{i}_2 (J_y + L) u_3 + \mathbf{i}_3 (J_z + L) u_4\right] \tag{4.1}$$

где J_y, J_z — экваториальные моменты инерции площади S относительно осей Oy и Oz, а L — статический момент объема Q относительно плоскости Oyz:

$$L = \frac{\mu}{\rho_0}\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \tag{4.2}$$

Главный вектор системы гидродинамических сил $\mathbf{P}_0^{(d)}$ и главный момент относительно точки O^* $\mathbf{M}_0^{(d)}$ определяются на основе теорем количества движения и моментов количества движения, из которых получим

$$\mathbf{P}_0^{(d)} = -\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{K}_0}{\partial t} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{K}_0 \tag{4.3}$$

$$\mathbf{M}_0^{(d)} = -\frac{d\mathbf{W}_0}{dt} + \delta\mathbf{M}_0^{(d)} = -\frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial t} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{W}_0 - \dot{\mathbf{u}}_0 \times \mathbf{K}_0 + \delta\mathbf{M}_0^{(d)} \tag{4.4}$$

где $\delta\mathbf{M}_0^{(d)}$ — момент силы μj относительно точки O^*, связанный с деформацией свободной поверхности жидкости в системе координат $O^*x^*y^*z^*$, а $\mathbf{K}_0$ и $\mathbf{W}_0$ — количество движения и момент количества движения жидкости в объеме Q в той же системе координат:

$$\delta\mathbf{M}_0^{(d)} = \iint_{\Sigma} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\, dS, \qquad \mathbf{K}_0 = \rho_0 \iiint_{Q} \dot{\mathbf{u}}\, dQ, \qquad \mathbf{W}_0 = \rho \iiint_{Q} (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{u}})\, dQ \tag{4.5}$$

В первой из формул использовано динамическое граничное условие на свободной поверхности жидкости $p = \text{const}$. Производная d/dt в (4.4) берется относительно системы координат $O^*x^*y^*z^*$, а $\partial/\partial t$ — относительно $Oxyz$. Пренебрегая величинами второго порядка малости и используя формулы (2.1), (2.2), (2.4) и обобщенную формулу Остроградского-Гаусса

$$\iiint_{Q} L(\nabla)\, dQ = \oiint_{\sigma} L(\boldsymbol{\nu})\, d\sigma \tag{4.6}$$

где L — некоторый линейный однородный оператор, получим

$$\mathbf{P}_0^{(d)} = -\rho_0 \sum_{k=1}^{5} \ddot{u}_k \oiint_{\sigma} \Phi_k \boldsymbol{\nu}\, d\sigma - \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{r}_n \oiint_{\sigma} \varphi_n \boldsymbol{\nu}\, d\sigma - \rho_0 \sum_{k=3}^{4} \ddot{u}_k^\circ \oiint_{\sigma} \Phi_k^\circ \boldsymbol{\nu}\, d\sigma$$

$$\mathbf{M}_0^{(d)} = -\rho_0 \sum_{k=1}^{5} \ddot{u}_k \iint_{S_1+S_2} \Phi_k (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu})\, d\sigma - \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{r}_n \iint_{S_1+S_2} \varphi_n (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu})\, d\sigma -$$

$$- \rho_0 \sum_{k=3}^{4} \ddot{u}_k^\circ \iint_{S_1+S_2} \Phi_k^\circ (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu})\, d\sigma \tag{4.7}$$

Главный вектор $\mathbf{P}_0$ и главный момент $\mathbf{M}_0$ системы сил, действующих со стороны жидкости на тело в возмущенном движении, приведенные в точке O^*, выражаются формулами

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0^{(d)}, \qquad \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0^{(s)} + \mathbf{M}_0^{(d)} \tag{4.8}$$

Составляющие этих векторов по осям системы координат $O^*x^*y^*z^*$ можно после некоторых преобразований выражений (4.1) и (4.7) привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} P_{0y} &= -\left(\mu_{11}\ddot{u}_1 + \mu_{14}\ddot{u}_4 + \lambda_{14}{}^{\circ}\ddot{u}_4{}^{\circ} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{1n}\ddot{r}_n\right) \\ P_{0z} &= -\left(\mu_{22}\ddot{u}_2 + \mu_{23}\ddot{u}_3 + \lambda_{23}{}^{\circ}\ddot{u}_3{}^{\circ} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{2n}\ddot{r}_n\right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} M_{0y} &= -\left(\sum_{k=3}^{5}\mu_{3k}\ddot{u}_k + \sum_{k=3}^{4}\lambda_{3k}{}^{\circ}\ddot{u}_k{}^{\circ} + j\mu_{23}u_3 + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{3n}\ddot{r}_n\right) \\ M_{0z} &= -\left(\sum_{k=3}^{5}\mu_{4k}\ddot{u}_k + \sum_{k=3}^{4}\lambda_{4k}{}^{\circ}\ddot{u}_k{}^{\circ} - j\mu_{14}u_4 + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{4n}\ddot{r}_n\right) \\ M_{0x} &= -\left(\sum_{k=3}^{5}\mu_{5k}\ddot{u}_k + \sum_{k=3}^{4}\lambda_{5k}{}^{\circ}\ddot{u}_k{}^{\circ} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{5n}\ddot{r}_n\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{lk} &= \rho_0 \iint\limits_{\sigma} \Phi_k \frac{\partial \Phi_l}{\partial \nu} d\sigma \qquad (l, k = 1, \ldots, 5) \\ \lambda_{lk}{}^{\circ} &= \rho_0 \iint\limits_{\sigma} \Phi_k{}^{\circ} \frac{\partial \Phi_l}{\partial \nu} d\sigma \qquad (l = 1, \ldots, 5;\ k = 3, 4) \\ \lambda_{ln} &= \rho_0 \iint\limits_{\sigma} \varphi_n \frac{\partial \Phi_l}{\partial \nu} d\sigma \qquad (l = 1, \ldots, 5;\ n = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Пользуясь формулой Грина

$$\iiint\limits_{Q} (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dQ = \iint\limits_{\sigma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right) d\sigma$$

легко доказать, что $\mu_{kl} = \mu_{lk}$, т. е. симметрию коэффициентов μ_{lk} относительно индексов l и k, а также справедливость следующих формул для $\lambda_{lk}{}^{\circ}$ и λ_{ln} $(l = 1 \div 5,\ k = 3, 4,\ n = 1, 2, \ldots)$

$$\lambda_{lk}^{\circ} = \rho_0 \iint\limits_{\Sigma} \Phi_l \frac{\partial \Phi_k{}^{\circ}}{\partial x} dS, \qquad \lambda_{ln} = \rho_0 \iint\limits_{\Sigma} \Phi_l \psi_n dS \qquad \left(\begin{matrix} l = 1, \ldots, 5 \\ k = 3, 4,\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}\right) \tag{4.12}$$

Вычисляя интегралы по поверхности, найдем следующие выражения:

для коэффициентов μ_{kl} (4.13)

$$\mu_{11} = \mu_{22} = \mu, \qquad \mu_{41} = \mu_{14} = \rho_0 (J_z + L), \qquad \mu_{23} = \mu_{32} = -\rho_0 (J_y + L)$$

$$\mu_{33} = \overset{\circ}{J}_{yy} + 2\rho_0 (x_0 - h) J_y + \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n C_n{}^2}{N_n{}^2},$$

$$\mu_{44} = \overset{\circ}{J}_{zz} + 2\rho_0 (x_0 - h) J_z + \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n D_n{}^2}{N_n{}^2},$$

$$\mu_{34} = \mu_{43} = -\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n D_n H_n}{N_n{}^2}, \qquad \mu_{35} = \mu_{53} = -\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}_nE_n}{N_n{}^2}$$

$$\mu_{45} = \mu_{54} = \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n E_n}{N_n{}^2}, \qquad \mu_{55} = \rho_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n{}^2 E_n{}^2}{N_n{}^2}$$

для коэффициентов $\lambda_{in}\lambda_{ik}$

$$\lambda_{1n} = \rho_0 D_n, \qquad \lambda_{2n} = \rho_0 C_n, \qquad \lambda_{3n} = -\rho_0 C_n R_n$$

$$\lambda_{4n} = \rho_0 D_n R_n, \qquad \lambda_{5n} = \rho_0 E_n \tag{4.14}$$

$$\overset{\circ}{\lambda}_{14} = -\rho_0 J_z, \qquad \overset{\circ}{\lambda}_{23} = \rho_0 J_y$$

$$\overset{\circ}{\lambda}_{33} = -\rho_0\left[(x_0+h)J_y + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n C_n^2}{N_n^2}\right], \qquad \overset{\circ}{\lambda}_{43} = \overset{\circ}{\lambda}_{34} = \rho\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n C_n D_n}{N_n^2}$$

$$\overset{\circ}{\lambda}_{44} = -\rho_0\left[(x_0+h)J_z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n D_n^2}{N_n^2}\right] \tag{4.15}$$

$$\overset{\circ}{\lambda}_{53} = -\mu_{53} = \rho_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n E_n}{N_n^2}, \qquad \overset{\circ}{\lambda}_{54} = -\mu_{54} = -\rho_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n E_n}{N_n^2}$$

где $\overset{\circ}{J}_{yy}$ и $\overset{\circ}{J}_{zz}$ — моменты инерции затвердевшей жидкости относительно осей Oy и Oz

$$H_n = \frac{5\,\mathrm{ch}\,k_n h - 4}{k_n\,\mathrm{sh}\,k_n h}, \qquad R_n = x_0 + h + \frac{2-\mathrm{ch}\,k_n h}{k_n\,\mathrm{sh}\,k_n h}, \qquad K_n = \frac{2-\mathrm{ch}\,k_n h}{k_n\,\mathrm{sh}\,k_n h} \tag{4.16}$$

От точки O^* легко перейти к новому произвольному центру приведения G^* с координатами $-y_0$, $-z_0$ относительно O^*.

При этом коэффициенты μ_{lk} изменяются как компоненты тензора статических моментов и моментов инерции эквивалентного твердого тела (то же относится и к $\overset{\circ}{\lambda}_{53}$ и $\overset{\circ}{\lambda}_{54}$), что же касается коэффициентов λ_{ln}, то λ_{5n} переходят в

$$\lambda_{5n} + y_0\lambda_{2n} - z_0\lambda_{1n}$$

а остальные коэффициенты λ_{ln} $(l = 1, \ldots, 4)$ остаются неизменными, как и $\overset{\circ}{\lambda}_{lk}$ $(l = 1, \ldots, 4)$.

§ 5. Составление дифференциальных уравнений возмущенного движения. Применяя теоремы количества движения и моментов количества движения в системе координат $G^*x^*y^*z^*$, начало которой совпадает с проекцией на плоскость $O^*y^*z^*$ центра масс системы тело — жидкость, затвердевшая в невозмущенном движении, получим, сохраняя прежние обозначения, для коэффициентов μ_{lk}, $\overset{\circ}{\lambda}_{lk}$ и λ_{ln}, преобразованных к системе $G\,xyz$:

$$(\mu^\circ + \mu)\ddot{u}_1 + (\overset{\circ}{\mu}_{14} + \mu_{14})\ddot{u}_4 + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{1n}\ddot{r}_n = P_{Gy} - \overset{\circ}{\lambda}_{14}\ddot{\vartheta}^\circ$$

$$(\mu^\circ + \mu)\ddot{u}_2 + (\overset{\circ}{\mu}_{23} + \mu_{23})\ddot{u}_3 + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{2n}\ddot{r}_n = P_{Gz} - \overset{\circ}{\lambda}_{23}\ddot{\gamma}^\circ$$

$$\sum_{k=1}^{5}(\overset{\circ}{\mu}_{3k} + \mu_{3k})\ddot{u}_k + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{3n}\ddot{r}_n + j(\overset{\circ}{\mu}_{23} + \mu_{23})u_3 = M_{Gy} - \overset{\circ}{\lambda}_{33}\ddot{\gamma}^\circ - \overset{\circ}{\lambda}_{34}\ddot{\vartheta}^\circ \tag{5.1}$$

$$\sum_{k=1}^{5}(\overset{\circ}{\mu}_{4k} + \mu_{4k})\ddot{u}_k + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{4n}\ddot{r}_n - j(\overset{\circ}{\mu}_{14} + \mu_{14})u_4 = M_{Gz} - \overset{\circ}{\lambda}_{43}\ddot{\gamma}^\circ - \overset{\circ}{\lambda}_{44}\ddot{\vartheta}^\circ$$

$$\sum_{k=3}^{5}(\overset{\circ}{\mu}_{5k} + \mu_{5k})\ddot{u}_k + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{5n}\ddot{r}_n = M_{Gx} - \overset{\circ}{\lambda}_{53}\ddot{\gamma}^\circ - \overset{\circ}{\lambda}_{54}\ddot{\vartheta}^\circ$$

где коэффициенты с верхним индексом в виде кружочка соответствуют твердому телу, причем в силу специального выбора точки G^*

$$\mu_{42}^{\circ} + \mu_{42} = \mu_{24}^{\circ} + \mu_{24} = 0, \qquad \mu_{31}^{\circ} + \mu_{31} = \mu_{13}^{\circ} + \mu_{13} = 0 \tag{5.2}$$

Величины P_{Gy}, P_{Gz}, M_{Gx}, M_{Gy}, M_{Gz}, стоящие в правой части (5.1), суть внешние силы и моменты, действующие на тело в возмущенном движении, приведенные к точке G^*.

Система уравнений (5.1) не является замкнутой; дополнительное соотношение между параметрами u_k и r_n дает динамическое граничное условие на свободной поверхности в системе координат $O^*x^*y^*z^*$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + j\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \xi^{\circ}\right) = 0 \qquad \text{при } x = x_0 + h \tag{5.3}$$

выражающее постоянство давления на ней.

Подставляя в (5.3) выражение (2.4) для потенциала смещений и учитывая формулу (3.9) и граничные условия (2.7) и (2.8), получим

$$\sum_{k=1}^{5} \ddot{u}_k \Phi_k(x_0 + h, y, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(y, z)}{k_n \operatorname{th} k_n h} (\ddot{r}_n + \sigma_n^2 r_n) = 0 \tag{5.4}$$

где

$$\sigma_n^2 = jk_n \operatorname{th} k_n h \tag{5.5}$$

квадрат n-й частоты собственных колебаний жидкости в неподвижной полости.

Разлагая функции $\Phi_k(x_0 + h, y, z)$ в обобщенные ряды Фурье по функциям $\psi_n(y, z)$ и сравнивая коэффициенты, соответствующие одному и тому же индексу n, найдем

$$\mu_n \ddot{r}_n + c_n r_n + \sum_{k=1}^{5} \lambda_{nk} \ddot{u}_k + \sum_{k=3}^{4} \lambda_{nk}^{*} \dot{\dot{u}}_k^{\circ} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.6}$$

где

$$\mu_n = \frac{\rho_0 N_n^2}{k_n \operatorname{th} k_n h}, \quad c_n = j\rho_0 N_n^2, \quad \lambda_{n3}^{*} = \frac{\rho_0 C_n}{k_n \operatorname{th} k_n h}, \quad \lambda_{n4}^{*} = -\frac{\rho_0 D_n}{k_n \operatorname{th} k_n h}, \quad \lambda_{nk} = \lambda_{kn} \tag{5.7}$$

Все эти коэффициенты, кроме $\lambda_{n5} = \lambda_{5n}$, инвариантны относительно преобразований системы координат $Oxyz$, не связанных с ее поворотом.

Перейдем к канонической системе координат $G_1^*G_2^*x^*y_2^*z_1^*$, получающейся параллельным переносом осей G^*y^* и G^*z^* в положение $G_2^*y_2^*$ и $G_1^*z_1^*$, при котором начало координат смещается вдоль оси G^*x^*, и к соответствующей связанной системе, определив координаты точек G_1 и G_2 равенствами

$$\mu_{14}^{\circ} + \mu_{14} = 0, \qquad \mu_{23}^{\circ} + \mu_{23} = 0 \tag{5.8}$$

или

$$x_{G_1} - x_{G_0} = \frac{\rho_0 J_z}{\mu^{\circ} + \mu}, \qquad x_{G_2} - x_{G_0} = \frac{\rho_0 J_y}{\mu^{\circ} + \mu} \tag{5.9}$$

где $\mu^{\circ} + \mu$ — масса тела вместе с затвердевшей жидкостью.

Возвращаясь к первоначальным обозначениям η, ζ, γ, ϑ, $\varkappa$ и вводя обычные символы для компонентов тензора моментов инерции, получим в силу (5.1), (5.6) и (5.9) общую систему уравнений возмущенного движения в следующем виде:

$$(\mu^\circ + \mu)\ddot{\eta} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}\ddot{r}_n = P_{G_1 y} - \overset{\circ}{\lambda}_{14}\ddot{\vartheta}^\circ \tag{5.10}$$

$$(\mu^\circ + \mu)\ddot{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n}\ddot{r}_n = P_{G_1 z} - \overset{\circ}{\lambda}_{23}\ddot{\gamma}^\circ$$

$$(\overset{\circ}{J}_{yy} + J_{yy})\ddot{\gamma} - (\overset{\circ}{J}_{yz} + J_{yz})\ddot{\vartheta} - (\overset{\circ}{J}_{yx} + J_{yx})\ddot{\varkappa} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{3n}\ddot{r}_n = M_{G_1 y} - \overset{\circ}{\lambda}_{33}\ddot{\gamma}^\circ - \overset{\circ}{\lambda}_{34}\ddot{\vartheta}^\circ$$

$$(\overset{\circ}{J}_{zz} + J_{zz})\ddot{\vartheta} - (\overset{\circ}{J}_{zy} + J_{zy})\ddot{\gamma} - (\overset{\circ}{J}_{zx} + J_{zx})\ddot{\varkappa} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{4n}\ddot{r}_n = M_{G_1 z} - \overset{\circ}{\lambda}_{43}\ddot{\gamma}^\circ - \overset{\circ}{\lambda}_{44}\ddot{\vartheta}^\circ$$

$$(\overset{\circ}{J}_{xx} + J_{xx})\ddot{\varkappa} - (\overset{\circ}{J}_{xy} + J_{xy})\ddot{\gamma} - (\overset{\circ}{J}_{xz} + J_{xz})\ddot{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{5n}\ddot{r}_n = M_{Gx} - \overset{\circ}{\lambda}_{53}\ddot{\gamma}^\circ - \overset{\circ}{\lambda}_{54}\ddot{\vartheta}^\circ$$

$$\mu_n\ddot{r}_n + c_n r_n + \lambda_{n1}\ddot{\eta} + \lambda_{n2}\ddot{\zeta} + \lambda_{n3}\ddot{\gamma} + \lambda_{n4}\ddot{\vartheta} + \lambda_{n5}\ddot{\varkappa} = -\overset{*}{\lambda}_{n3}\ddot{\gamma}^\circ - \overset{*}{\lambda}_{n4}\ddot{\vartheta}^\circ$$

где компоненты тензора моментов инерции эквивалентного твердого тела преобразованы к системе координат $G_1G_2xy_2z_1$ так же, как и правые части в уравнениях (5.10) (коэффициенты λ_{ln} и $\overset{\circ}{\lambda}_{lk}$, при $l \neq k$ при этом не изменяются). Величины $\ddot{\gamma}^\circ$ и $\ddot{\vartheta}^\circ$ — известные функции времени, поскольку функции $\gamma^\circ(t)$ и $\vartheta^\circ(t)$ определяются уравнениями невозмущенного движения (при мгновенной стабилизации зеркала жидкости нормально к вектору $\mathbf{j}^\circ$ в каждый момент времени).

Уравнения (5.10) отличаются от уравнений Г. С. Нариманова [4] и Н. Н. Моисеева [2,3] отсутствием бесконечных сумм со слагаемыми, пропорциональными $r_n(t)$, и членов, пропорциональных ϑ и γ, правыми частями и, наконец, иными значениями компонентов тензора $J_{\alpha\beta}$ ($\alpha,\beta = x, y, z$). Можно показать путем элементарных, но довольно громоздких преобразований, что одни уравнения эквивалентны другим.

Рассмотрим важный в практическом отношении случай, когда твердое тело имеет две плоскости симметрии, которые являются плоскостями симметрии и для полости.

В этом случае система функций ψ_n распадается на три ортогональные подсистемы ψ , ψ_{np}, ψ_{nq}, и уравнения (5.10) переходят в следующие:

$$(\mu^\circ + \mu)\ddot{\eta} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}\ddot{r}_n = P_{G_1 y} - \overset{\circ}{\lambda}_{14}\ddot{\vartheta}^\circ$$

$$(\overset{\circ}{J}_{zz} + J_{zz})\ddot{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{4n}\ddot{r}_n = M_{G_1 z} - \overset{\circ}{\lambda}_{44}\ddot{\vartheta}^\circ \tag{5.11}$$

$$\mu_{nr}\ddot{r}_n + c_{nr}r_n + \lambda_{n1}\ddot{\eta} + \lambda_{n4}\ddot{\vartheta} = -\overset{*}{\lambda}_{n4}\ddot{\vartheta}^\circ$$

$$
\begin{aligned}
&(\mu^\circ + \mu)\ddot{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n}\ddot{p}_n = P_{G_2 z} - \overset{\circ}{\lambda}_{23}\ddot{\gamma}^\circ \\
&(\overset{\circ}{J}_{yy} + J_{yy})\ddot{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{3n}\ddot{p}_n = M_{G_2 y} - \overset{\circ}{\lambda}_{33}\ddot{\gamma}^\circ \\
&\mu_{np}\ddot{p}_n + c_{np}p_n + \lambda_{n2}\ddot{\zeta} + \lambda_{n3}\ddot{\gamma} = -\overset{*}{\lambda}_{n3}\ddot{\gamma}
\end{aligned}
\qquad (5.12)
$$

$$
\begin{aligned}
&(\overset{\circ}{J}_{xx} + J_{xx})\ddot{\varkappa} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{5n}\ddot{q}_n = M_{Gx} \\
&\mu_{nq}\ddot{q}_n + c_{nq}q_n + \lambda_{n5}\ddot{\varkappa} = 0
\end{aligned}
\qquad (5.13)
$$

Здесь r_n, p_n, q_n — обобщенные координаты, соответствующие волнам на свободной поверхности при движении в плоскостях $G^*x^*y^*$ и $G^*x^*z^*$ и при вращении вокруг оси G^*x^* соответственно.

Индексы r, p, q соответствуют подсистемам функций ψ_{nr}, ψ_{np}, ψ_{nq}.

Начальные условия для уравнений (5.11), (5.12), (5.13) заключаются в задании значений параметров η, ζ, ϑ, γ, $\varkappa$, r_n, p_n, q_n и их первых производных по времени при $t = 0$. Очевидно, что уравнения (5.10) — (5.13) легко обобщаются на случай любого количества цилиндрических полостей.

Поступила 15 III 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной капельной жидкостью. Избр. соч., т. I. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
2. Моисеев Н. Н. Движение тела, имеющего полости, частично заполненные идеальной капельной жидкостью. ДАН СССР, т. 85, № 4, 1952.
3. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободные поверхности. Матем. сборник, 32 (74), № 1, 1953. Изд. АН СССР.
4. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. Изд. НИИ, 1952.
5. Павленко Г. Е. Качка судов. Гостехиздат, 1936.
6. Сретенский Л. Н. Колебания жидкости в подвижном сосуде. Известия АН СССР, ОТН, № 10, 1951. Изд. АН СССР.