Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

Д. Е. Охоцимский

(Москва)

Н. Е. Жуковским[1] подробно обследована задача о движении твердого тела с полостями, заполненными жидкостью целиком. Показано, что в случае односвязных полостей вся система может быть заменена некоторым эквивалентным твердым телом, имеющим массу, равную массе системы, и некоторый момент инерции. Величина момента инерции рассчитана для ряда полостей различных форм.

При частичном заполнении полостей эквивалентного твердого тела ввести нельзя, однако для некоторых частных видов движения (действие импульсивных сил, гармонические колебания) можно ввести инерционные характеристики системы, аналогичные массе и моменту инерции, и использовать их для составления уравнений движения и анализа поведения системы под действием внешних сил.

Ниже даны результаты такого исследования для полостей частного вида в виде кругового цилиндра и двух концентрических цилиндров. Дано определение потенциала скоростей. Показано существование трех независимых инерционных характеристик, и дан метод их расчета. Введено понятие центра инерции системы и доказана справедливость теоремы, аналогичной теореме Штейнера. Указан метод составления уравнений движения. Даны анализ и физическое истолкование зависимости инерционных характеристик от формы полости и от характера движения.

Статья написана в 1950 г.[1]. К ней сделано некоторое дополнение, а именно введено рассмотрение полости из двух концентрических цилиндров, а также проведено более полное исследование инерционных характеристик.

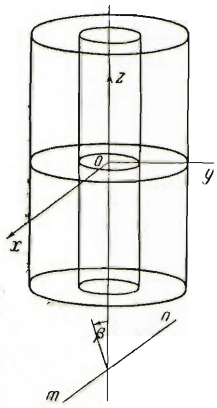
§ 1. Определение потенциала скоростей внутри полости между двумя круговыми цилиндрами. Рассмотрим сосуд, имеющий форму полости между двумя концентрическими круговыми цилиндрами, заполненный тяжелой идеальной несжимаемой жидкостью (фиг. 1). Пусть h — глубина жидкости, a — радиус внешнего цилиндра, ka — радиус внутреннего цилиндра ($0 \leqslant k < 1$). Расположим начало координат в середине свободной поверхности. Оси Ox и Oy пусть лежат в горизонтальной плоскости, ось Oz — направлена вертикально вверх.

Ограничимся линейной постановкой и будем исследовать движение жидкости, которое возникнет, если сообщить сосуду некоторое движение вблизи исходного положения. Это движение может, в частности, сводиться к малым колебаниям вокруг неподвижной оси. Для решения задачи в общем случае движения сосуда достаточно уметь решать задачи об определении движения жидкости, например, при вращении сосуда вокруг оси Ox и при поступательном движении вдоль оси Oy.

---

[1] Доложено на семинаре по механике при Математическом институте АН СССР 14 ноября 1950 г.

Будем предполагать, что при движении сосуда система координат $Oxyz$ остается неподвижной. Движение в этой системе координат назовем абсолютным. Абсолютное движение жидкости будем предполагать безвихревым. Если движение началось из состояния покоя, то это следует из принятых допущений об отсутствии трения и о характере массовых сил.



Фиг. 1

Пусть φ — потенциал абсолютных скоростей. Условие несжимаемости дает

$$\triangle\varphi = 0 \tag{1.1}$$

Граничные условия будут на внешней и на внутренней стенках полости:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]_{r=a} = v_{r1}, \qquad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]_{r=ka} = v_{r2} \tag{1.2}$$

и на дне полости:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=-h} = v_z \tag{1.3}$$

где v_{r1}, v_{r2}, v_z — проекции скоростей точек граничной поверхности на нормаль к ее исходному положению.

Во всей массе жидкости справедлив интеграл

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - gz \tag{1.4}$$

где ρ — плотность жидкости, p — давление, p_0 — давление на свободной поверхности, g — напряжение массовой силы, действующей вдоль отрицательного направления оси Oz. В частности, это может быть ускорение силы тяжести. Формула (1.4) дает условие на свободной поверхности

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{z=0} + g\zeta = 0 \tag{1.5}$$

где $\zeta(x, y)$ — уравнение свободной поверхности.

Величину ζ можно рассматривать как смещение вдоль оси Oz частицы, находившейся первоначально в плоскости $z = 0$. Будем искать потенциал в виде суммы двух потенциалов:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \tag{1.6}$$

Предположим, что рассмотренный сосуд ограничен сверху плоским дном, находящимся от свободной поверхности на расстоянии, равном глубине жидкости, и что жидкость заполняет такой сосуд целиком. Потенциал абсолютного движения в этом случае возьмем в качестве потенциала φ_1. В нижней части сосуда он будет удовлетворять условиям на стенках и на дне сосуда, однако условие в плоскости $z = 0$ будет, вообще говоря, не выполнено. Потенциал φ_2 выберем таким образом, чтобы он удовлетворял нулевым условиям на стенках и на дне сосуда и в сумме с φ_1 обеспечивал выполнение условия в плоскости $z = 0$.

Потенциал φ_2 определяет волновое движение жидкости в неподвижном сосуде, вызванное неравномерностью давлений, возникающих в плоскости $z = 0$ при движении с потенциалом φ_1.

Следуя работе [1], ищем потенциал φ_1 в виде

$$\varphi_1 = \dot{\beta}(F - yz) + v_0 y \tag{1.7}$$

где $\dot{\beta}$ — угловая скорость вращения сосуда вокруг оси Ox, v_0 — скорость середины свободной поверхности в ее движении вместе с сосудом в направлении оси Oy.

Функция $F(x, y, z)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

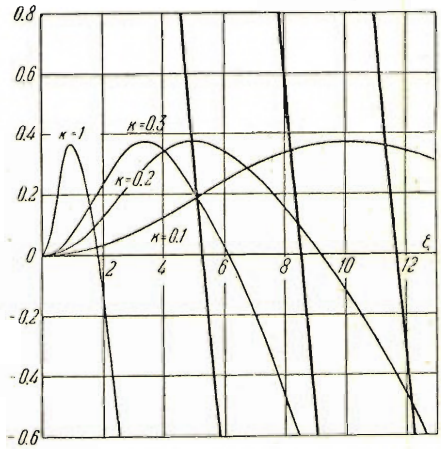
$$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \eta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right) \tag{1.8}$$

условиям на наружных и внутренних стенках сосуда

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \qquad \text{при } r = a,\ r = ka \tag{1.9}$$

и условию

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2y \qquad \text{при } z = \pm h \tag{1.10}$$



Фиг. 2

на верхнем и нижнем дне. Решение ищем в виде линейной комбинации членов вида

$$F = Z(z)\,H(\eta)\,R(r) \tag{1.11}$$

Разделяя переменные, получим следующие уравнения: (1.12)

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0,\quad \frac{d^2 H}{d\eta^2} + m^2 H = 0,\quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0$$

где $\lambda^2 > 0$. Из условия четности $Z(z)$ имеем

$$Z(z) = \operatorname{sh}(\lambda z) \tag{1.13}$$

Имеем также

$$H(\eta) = \sin(m\eta + \varepsilon), \qquad R(r) = J_m(\lambda r) + \gamma N_m(\lambda r) \tag{1.14}$$

В силу периодичности $H(\eta)$ число m должно быть целым. Величины ε и γ — постоянные, J_m и N_m — бесселевы функции первого и второго рода порядка m. Для определения функции F достаточно взять $m = 1$, $\varepsilon = 0$. Постоянные λ и γ определим из граничных условий на стенках сосуда. Обозначим

$$f(\zeta) = \frac{J_1'(\zeta)}{N_1'(\zeta)} \tag{1.15}$$

где штрих означает производную по ζ. Ищем корни уравнения

$$f(\zeta) = f(k\zeta) \tag{1.16}$$

Функция $f(\zeta)$ представлена на фиг. 2 $(k = 1)$. Там же дана $f(k\zeta)$ для $k = 0.1$, $k = 0.2$ и $k = 0.3$. При $k = 0$ кривая сливается с осью абсцисс.

Уравнение (1.16) имеет бесчисленное множество корней ζ_n. Соответствующие значения γ_n равны

$$\gamma_n = -f(\zeta_n) \tag{1.17}$$

В таблице приведены значения корней ζ_n и величин γ_n для $n = 1 \div 5$ и $k = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3$.

	n	ζ_n	γ_n	a_n	b_n	d_n
$k = 0$	1	1.8412	—	1.718	—	0.4184
	2	5.331	—	—2.889	—	0.03648
	3	8.536	0	3.659	0	0.01391
	4	11.71	—	—4.286	—	0.00734
	5	14.86	—	4.831	—	0.00446
$k = 0.1$	1	1.8036	—0.02562	1.703	—0.04362	0.4126
	2	5.137	—0.1902	—2.786	0.5298	0.04251
	3	8.199	—0.3460	3.389	—1.1725	0.01117
	4	11.36	—0.3581	—3.976	1.4239	0.01024
	5	14.63	—0.2366	4.664	—1.1035	0.00342
$k = 0.2$	1	1.7053	—0.09038	1.657	—0.1498	0.3995
	2	4.962	—0.3728	—2.611	0.9734	0.05837
	3	8.433	—0.1023	3.617	—0.3700	0.00916
	4	12.16	+0.4844	—3.932	—1.9048	0.01184
$k = 0.3$	1	1.582	—0.1665	1.593	—0.2652	0.3899
	2	5.138	—0.1893	—2.786	0.5273	0.0727
	3	9.307	+0.9544	2.765	2.6387	0.00718
	4	13.69	—2.350	1.815	—4.2650	0.01160

Функции R_n, отвечающие корням уравнения (1.16), удобно пронормировать, приняв, например, равными единице их значения при $r = a$. Получим

$$R_n\left(\frac{r}{a}\right) = a_n J_1\left(\zeta_n \frac{r}{a}\right) + b_n N_1\left(\zeta_n \frac{r}{a}\right)$$
$$a_n = \frac{1}{J_1(\zeta_n) + \gamma_n N_1(\zeta_n)}, \qquad b_n = a_n \gamma_n \tag{1.18}$$

В частном случае при $k = 0$ имеем $\gamma_n = 0$ и

$$R_n\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{J_1(\zeta_n r / a)}{J_1(\zeta_n)} \tag{1.19}$$

Значения коэффициентов a_n и b_n приведены в таблице.

Функции R_n представлены на фиг. 3—5 для $n = 1, 2, 3$ и для $k = 0$, 0.1, 0.2, 0.3. Видим, что различие между кривыми, отвечающими одному и тому же n и разным k, относительно невелики и проявляются главным образом на первой полуволне от центра.

Напишем выражение для функции F в виде

$$F = \sin\eta \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh}\left(\zeta_n \frac{r}{a}\right) R_n\left(\frac{r}{a}\right) \tag{1.20}$$

Коэффициенты C_n выберем из условия (1.10) на верхнем и нижнем дне. Разложение y в ряд по функциям R_n будет

$$y = 2a \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} d_n R_n \left(\frac{r}{a}\right) \qquad d_n = \frac{1 - kR_n(k)}{(\zeta_n^2 - 1) - (k^2\zeta_n^2 - 1) R_n^2(k)} \tag{1.21}$$

В частном случае при $k = 0$ имеем

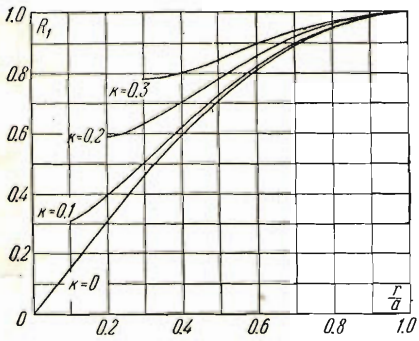
$$d_n = \frac{1}{\zeta_n^2 - 1}, \qquad y = 2a \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n^2 - 1} \frac{J_1(\zeta_n r / a)}{J_1(\zeta_n)} \tag{1.22}$$

Значения коэффициентов d_n даны в таблице.

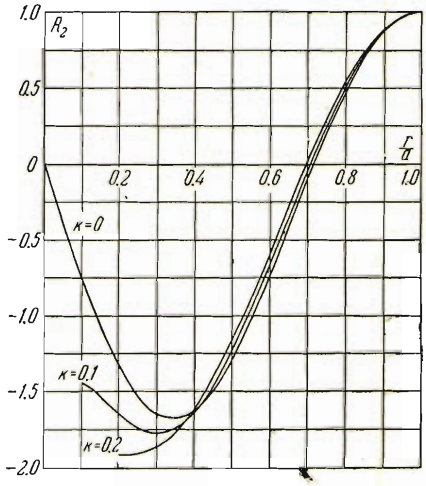
Использовав граничное условие, получим

$$F = 4a^2 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\zeta_n} \frac{\operatorname{sh}(\zeta_n z / a)}{\operatorname{ch}(\zeta_n h / a)} R_n \left(\frac{r}{a}\right) \tag{1.23}$$

Определим теперь потенциал волнового движения φ_2. Это есть гармоническая функция, удовлетворяющая на стенках условию $\partial\varphi_2 / \partial r = 0$ и на дне сосуда условию $\partial\varphi_2 / \partial z = 0$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Решение ищем в виде суммы выражений вида

$$\varphi_2 = f(t) Z(z) H(\eta) R(r) \tag{1.24}$$

где $f(t)$ — некоторая функция времени. Ясно, что при исследовании вынужденных волновых движений, возникающих при плоских движениях сосуда, можно выбрать $H(\eta)$ и $R(r)$ такими же, как и для функции F.

Графики на фиг. 3—5 дают форму волн для первых трех гармоник. Что касается зависимости от z, то мы удовлетворим условию на дне, положив

$$Z(z) = \operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{z+h}{a}\right) \tag{1.25}$$

С целью упрощения уравнений для определения функций, зависящих от времени, запишем потенциал φ_2 в виде

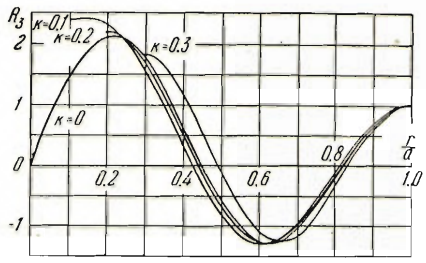
$$\varphi_2 = 2a^2 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\chi}_n(t) \frac{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{z+h}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{h}{a}\right)} d_n R_n \left(\frac{r}{a}\right) \tag{1.26}$$

где $\chi_n(t)$ — неопределенная функция времени. Точка означает дифференцирование по времени. Условие на поверхности перепишем в виде

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|_{z=0} + g\zeta_2 = -\left(\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|_{z=0} + g\zeta_1\right) \quad (1.27)$$

где ζ_1 и ζ_2 — смещения в движении с потенциалами φ_1 и φ_2:

$$\zeta_1 = \int_0^t \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right|_{z=0} dt, \qquad \zeta_2 = \int_0^t \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right|_{z=0} dt$$



Фиг. 5

Вычисляя левую и правую части формулы (1.27) и приравнивая коэффициенты, получим следующие уравнения для определения функций $\chi_n(t)$:

$$\ddot{\chi}_n + \omega_n^2\chi_n = -\frac{\dot{v}_0}{a} + \frac{g}{a}\left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch}(\zeta_n h/a)}\right)\beta, \qquad \omega_n^2 = \zeta_n \frac{g}{a}\operatorname{th}\left(\zeta_n \frac{h}{a}\right) \quad (1.28)$$

Окончательное выражение для потенциала абсолютных скоростей жидкости будет

$$\varphi = 2a^2 \sin\eta \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{z+h}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{h}{a}\right)}\dot{\chi}_n + \left(\frac{2}{\zeta_n}\frac{\operatorname{sh}\left(\zeta_n \frac{z}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{h}{a}\right)} - \frac{z}{a}\right)\dot{\beta} + \frac{v_0}{a}\right\} d_n R_n\left(\frac{r}{a}\right) \quad (1.29)$$

Отметим, что решения вида (1.24) дают возможность составить потенциалы, комбинацией которых можно представить любое волновое движение жидкости в сосуде рассматриваемой формы. Эти потенциалы имеют вид:

$$\varphi^\circ = F(t)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(m\eta)\operatorname{ch}\left(\zeta_n^m \frac{z+h}{a}\right) R_n^m\left(\frac{r}{a}\right) \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Здесь

$$R_n^m = \frac{J_m(\zeta_n^m r/a) + \gamma_n^m N_m(\zeta_n^m r/a)}{J_m(\zeta_n^m) + \gamma_n^m N_m(\zeta_n^m)} \quad (1.31)$$

Причем ζ_n^m — корни уравнения

$$\frac{J_m'(\zeta)}{N_m'(\zeta)} = \frac{J_m'(k\zeta)}{N_m'(k\zeta)} \quad (1.32)$$

а γ_n^m — значение отношения производных при $\zeta = \zeta_n^m$.

В рассматриваемом случае плоского движения сосуда все потенциалы, кроме тех, которые вошли в выражение для φ_2, будут удовлетворять по времени однородным уравнениям вида

$$\ddot{F} + \zeta_n^m \frac{g}{a}\operatorname{th}\left(\zeta_n^m \frac{h}{a}\right) F = 0 \quad (1.33)$$

и отвечать свободным колебаниям жидкости. Добавление любого из них к потенциалу φ не нарушит ни граничных условий, ни условий на свободной поверхности.

Если движение жидкости началось из состояния покоя, то потенциалы свободных колебаний будут тождественно равны нулю. Будем иметь также

$$\chi_n = \dot{\chi}_n = 0 \qquad \text{при } t = 0 \quad (1.34)$$

Эти условия будут начальными условиями для уравнений (1.28).

§ 2. Реакции на стенки. Эффективные моменты инерции и эффективные массы. При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси и при поступательном движении инерционность тела характеризуется моментом инерции I и массой m. «Сопротивление» тела для указанных видов движения будет даваться выражениями

$$-I\ddot{\beta},\ -m\ddot{\gamma} \tag{2.1}$$

где $\ddot{\beta}$ — угловое, а $\ddot{\gamma}$ — линейное ускорение.

Одним из важнейших результатов, полученных Н. Е. Жуковским в работе [1], является вывод, что тело с полостями, заполненными жидкостью целиком, может быть для односвязных полостей заменено некоторым эквивалентным твердым телом и под действием внешних сил будет двигаться так же, как это эквивалентное твердое тело. «Сопротивление» такой системы будет, следовательно, даваться выражением (2.1), где I будет равно моменту инерции эквивалентного твердого тела. Масса эквивалентного твердого тела оказывается равной массе всей системы.

В случае движения тела с полостями, заполненными жидкостью лишь частично, положение дел будет иным. Для определения давления в любой точке жидкости имеем

$$p - p_0 = -\rho\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right) - \rho g z \tag{2.2}$$

Правая часть, кроме гидростатического члена, содержит еще величины $\partial\varphi_1/\partial t$ и $\partial\varphi_2/\partial t$. Первая из них пропорциональна $\ddot{\beta}$, однако вторая, вообще говоря, непропорциональна.

Таким образом, при наличии свободной поверхности нельзя ввести эквивалентного твердого тела. Инерционность такой системы при вращении вокруг неподвижной оси и при поступательном движении не может быть, вообще говоря, сведена к величинам, аналогичным моменту инерции и массе и не зависящим ни от времени, ни от характера движения.

Тем не менее и при наличии свободной поверхности для определенных частных случаев движения реакции жидкости на стенки оказываются пропорциональными ускорению сосуда и можно ввести некоторые внешние инерционные характеристики системы — эффективные моменты инерции и эффективные массы, не зависящие от времени, но относящиеся, правда, лишь к данному, частному виду движения.

Ниже будут рассмотрены два таких частных случая: возникновение движения из состояния покоя и установившиеся гармонические колебания сосуда.

Вычислим результирующую силу и момент сил давления жидкости на стенки сосуда при вращении сосуда вокруг оси Ox и при поступательном движении вдоль оси Oy. Полученные формулы дадут возможность определить силы и моменты в общем случае пространственного движения сосуда.

Расчет сил, моментов и инерционных характеристик произведем для случая $k = 0$, т. е. для наиболее интересного случая сосуда в виде кругового цилиндра. Формулы, полученные выше для потенциала скоростей, позволяют совершенно аналогично произвести расчет и в случае $k \neq 0$. Значительная часть выводов, полученных для цилиндрической полости, для более общего случая останется в силе.

Приведем силы гидростатического давления, возникающие при повороте вокруг оси Ox, к началу координат. Для результирующей имеем $Q_x = Q_y = 0$, $Q_z = -mg$, для момента получим $L_y = L_z = 0$; момент L_x можно вычислить непосредственно, однако проще поступить иначе.

Силы давления на сосуд в нашем случае будут равны и противоположны силам давления на сосуд при погружении его в жидкость.

Известно, однако, что для кругового цилиндра, погруженного вертикально, существует метацентр, расположенный выше середины цилиндра на расстоянии

$$d = \frac{I_x}{V} = \frac{a^2}{4h}$$

где $I_x = {}^1/_4\pi a^4$ — момент площади поперечного сечения относительно оси Ox, а $V = \pi a^2 h$ — объем вытесненной жидкости, h — глубина погружения.

Откуда следует, что момент гидростатических сил относительно оси Ox равен

$$L_x = -mg\left(\frac{h}{2} - \frac{a^2}{4h}\right)\beta \tag{2.3}$$

При повороте вокруг горизонтальной оси, отстоящей от Ox на расстоянии L вниз, имеем

$$L_x = mg\left(L - \frac{h}{2} + \frac{a^2}{4h}\right)\beta \tag{2.4}$$

При исследовании движения сосуда целесообразно рассматривать силу Q_z и момент L_x как внешние силы. При расчете инерционных характеристик мы будем учитывать лишь первое слагаемое в правой части формулы (2.2), которое дает дополнительное давление, возникающее при движении сосуда. Проекции результирующей и момента будут

$$P_x = P_z = 0, \qquad M_y = M_z = 0$$

Для P_y и M_x имеем

$$P_y = -a\rho \int_{-h}^{0}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right)\sin\eta\, d\eta\, dz \tag{2.5}$$

$$M_x = a\rho \int_{-h}^{0}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right) z\sin\eta\, d\eta\, dz + \rho\int_{0}^{a}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right) r^2\sin\eta\, d\eta\, dr \tag{2.6}$$

При вычислении P_y интегрирование ведется по боковым стенкам исходного цилиндра. При вычислении M_x первый интеграл берется по боковым стенкам, второй — по дну исходного цилиндра.

При вращении вокруг оси Ox по аналогии со случаем затвердевшей жидкости напишем

$$P_y = -m_0\,\frac{1}{2}\,h\ddot{\beta}, \qquad M_x = -I_0\ddot{\beta} \tag{2.7}$$

где величины m_0 и I_0 имеют размерность массы и момента инерции.

При произвольном характере движения они будут, вообще говоря, переменными. Имеем в нашем случае

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \ddot{\beta}(F - zy) \qquad \left(F = 4a^2\sin\eta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta_n(\zeta_n^2 - 1)}\,\frac{J_1(\zeta_n r/a)\,\mathrm{sh}(\zeta z/a)}{J_1(\zeta_n)\,\mathrm{ch}(\zeta_n h/a)}\right) \tag{2.8}$$

Имеем далее

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 2a^2 \sin\eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{\chi}_n J_1(\zeta_n r/a)\,\mathrm{ch}\,[\zeta_n (z+h)/a]}{(\zeta_n^2 - 1) J_1(\zeta_n)\,\mathrm{ch}\,(\zeta_n h/a)} \tag{2.9}$$

где функции $\chi_n(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\chi}_n + \omega_n^2 \chi_n = \frac{g}{a}\left(1 - \frac{2}{\mathrm{ch}\,\mu_n}\right)\beta \tag{2.10}$$

Для m_0 и I_0 получим формулы

$$m_0 = m\left\{1 - \frac{1}{h^{\circ 2}}\left(1 - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\mathrm{ch}\,\mu_n}\right) + \frac{4}{h^{\circ 2}} \sum \frac{\ddot{\chi}_n}{\ddot{\beta}} \varepsilon_n \zeta_n\,\mathrm{th}\,\mu_n\right\} \tag{2.11}$$

$$I_0 = ma^2\left\{\left(\frac{1}{4} + \frac{h^{\circ 2}}{3}\right) - \left(1 - \frac{8}{h^{\circ}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n\,\mathrm{th}\,\mu_n}{\zeta_n}\right) + \frac{2}{h^{\circ}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{\chi}_n}{\beta} \varepsilon_n \left(1 - \frac{2}{\mathrm{ch}\,\mu_n}\right)\right\} \tag{2.12}$$

где m — масса жидкости и обозначено

$$h^{\circ} = \frac{h}{a}, \qquad \mu_n = \zeta_n \frac{h}{a}, \qquad \varepsilon_n = \frac{1}{\zeta_n^2(\zeta_n^2 - 1)}$$

а величины $\ddot{\chi}_n$ получены из решения уравнений (2.10).

При получении формул (2.11) и 2.12) были использованы формула

$$\int_0^a J_1\left(\zeta_n \frac{r}{a}\right) r^2\, dr = a^3 \frac{J_1(\zeta_n)}{\zeta_n^2}$$

и соотношения для чисел ζ_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n^2 - 1} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n^2(\zeta_n^2 - 1)} = \frac{1}{8}$$

которые могут быть получены без труда.

Рассмотрим частные случаи. Если бы жидкость затвердела, то мы имели бы

$$m_0 = m, \qquad I_0 = ma^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} h^{\circ 2}\right) \tag{2.13}$$

Таким образом, первые слагаемые формулы (2.11) и (2.12) отвечают затвердевшей жидкости.

В случае начала движения или при приложении импульсивных сил из уравнений (2.10) и начальных условий имеем $\ddot{\chi} = 0$ и в формулах для m_0 и I_0 остаются два первых слагаемых. Имеем

$$m_0 = m\left\{1 - \frac{1}{h^{\circ 2}}\left(1 - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\mathrm{ch}\,\mu_n}\right)\right\} \tag{2.14}$$

$$I_0 = ma^2\left\{\left(\frac{1}{4} + \frac{h^{\circ 2}}{3}\right) - \left(1 - \frac{8}{h^{\circ}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n\,\mathrm{th}\,\mu_n}{\zeta_n}\right)\right\} \tag{2.15}$$

Наконец, в случае установившихся гармонических колебаний из уравнений (2.10) получаем

$$\frac{\ddot{\chi}_n}{\ddot{\beta}} = \frac{g}{a} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2}\left(1 - \frac{2}{\mathrm{ch}\,\mu_n}\right)$$

Введем безразмерный параметр α, равный

$$\alpha = \frac{a\omega^2}{g} \tag{2.16}$$

Значение этого параметра равно отношению квадрата частоты вынуждающих колебаний к квадрату частоты колебаний маятника длиной a. Имеем

$$\frac{\ddot{\chi}_n}{\ddot{\beta}} = \frac{1}{\zeta_n \operatorname{th} \mu_n - \alpha}\left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch} \mu_n}\right)$$

Подставляя в формулы (2.11) и (2.12) и производя преобразования, получим

$$m_0 = m\left\{1 - \frac{1}{2h^{\circ 2}}\left[1 - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\varepsilon_n}{\zeta_n \operatorname{th} \mu_n - \alpha}\left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch} \mu_n}\right)\right]\right\} \tag{2.17}$$

$$I_0 = ma^2\left\{\frac{h^{\circ 2}}{3} - \frac{3}{4} + \frac{8}{h^\circ}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \operatorname{th} \mu_n}{\zeta_n} + \frac{2}{h^\circ}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\zeta_n \operatorname{th} \mu_n - \alpha}\left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch} \mu_n}\right)^2\right\} \tag{2.18}$$

Вычислим теперь силы и моменты при поступательном движении вдоль оси Oy. Представим их в виде

$$P_y = -m_1\ddot{\gamma}, \qquad M_x = -m_2\frac{h}{2}\ddot{\gamma} \tag{2.19}$$

Имеем

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \ddot{\gamma}y \tag{2.20}$$

Для $\partial\varphi_2/\partial t$ имеем формулу (2.9), причем величины χ_n должны удовлетворять уравнениям

$$\ddot{\chi}_n + \omega_n^2\chi_n = -\frac{\ddot{\gamma}}{a} \tag{2.21}$$

Подставляя (2.19) в формулы (2.5) и (2.6), получим

$$m_1 = m\left\{1 + \frac{2}{h^\circ}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\ddot{\chi}_n}{\ddot{\gamma}}\varepsilon_n\zeta_n \operatorname{th} \mu_n\right\} \tag{2.22}$$

$$m_2 = m\left\{1 - \frac{1}{2h^{\circ 2}}\left[1 - 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\ddot{\chi}_n}{\ddot{\gamma}}\varepsilon_n\left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch} \mu_n}\right)\right]\right\} \tag{2.23}$$

где $\ddot{\chi}_n$ определены на основании уравнений (2.21).

Рассмотрим частные случаи. Для затвердевшей жидкости имеем $m_1 = m_2 = m$. Для начала движения и для случая приложения импульсивных сил имеем

$$m_1 = m\left\{1 - \frac{2}{h^\circ}\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\zeta_n \operatorname{th} \mu_n\right\} \tag{2.24}$$

$$m_2 = m\left\{1 - \frac{1}{h^{\circ 2}}\left(1 - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\operatorname{ch} \mu_n}\right)\right\} \tag{2.25}$$

Для случая установившихся гармонических колебаний имеем

$$\frac{\ddot{\chi}_n a}{\ddot{\gamma}} = \frac{\alpha}{\zeta_n \operatorname{th} \mu_n - \alpha}$$

Формулы для m_1 и m_2 примут вид:

$$m_1 = m\left\{1 + \frac{2}{h^\circ}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\zeta_n \operatorname{th} \mu_n}{\zeta_n \operatorname{th} \mu_n - \alpha}\varepsilon_n\right\} \tag{2.26}$$

$$m_2 = m\left\{1 - \frac{1}{2h^{\circ 2}}\left[1 - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\varepsilon_n}{\zeta_n \operatorname{th} \mu_n - \alpha}\left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch} \mu_n}\right)\right]\right\} \tag{2.27}$$

Сопоставление полученных формул показывает, что инерционные характеристики для начала движения могут быть получены из соответствующих величин для гармонических колебаний сосуда путем предельного перехода при $\alpha \to \infty$. Параметр α есть число Фруда для нашей задачи. Видим, что $\alpha \to \infty$, когда либо $\omega \to \infty$, либо $a \to \infty$, либо $g \to 0$. Если $g = 0$, то это означает, что движение происходит при отсутствии массовых сил. В случае, когда на сосуд действуют импульсивные силы, массовые силы конечной величины несущественны и движение будет происходить так же, как при $g = 0$.

Сопоставляя формулы (2.14) и (2.17) с формулами (2.25) и (2.27), видим, что при любых значениях параметра α, а также в пределе при $\alpha \to \infty$ имеем тождественно

$$m_2 = m_0 \tag{2.28}$$

Это означает, что для рассмотренных случаев существования инерционных характеристик, не зависящих от времени, имеем не четыре, а только три независимые характеристики: эффективный момент инерции I_0 и эффективные массы m_0 и m_1.

§ 3. Центр инерции. Теорема Штейнера. Уравнения движения системы с жидким наполнением. Рассмотрим движение сосуда вокруг оси mn, проходящей через ось цилиндра и параллельной оси Ox (фиг. 1). Пусть β — угол поворота, γ — смещение точки O вдоль оси Oy. Для силы P_y и момента M_x согласно формулам (2.7) и (2.19) имеем

$$P_y = -m_1\ddot{\gamma} - \tfrac{1}{2} h m_0 \ddot{\beta} \tag{3.1}$$

$$M_0 = -\tfrac{1}{2} h m_0 \ddot{\gamma} - I_0 \ddot{\beta} \tag{3.2}$$

Мы положили $m_2 = m_0$, так как предполагаем, что имеют место либо начало движения, либо гармонические колебания. Пусть L — расстояние от оси Ox до оси mn (фиг. 1). Тогда имеем

$$\gamma = -\beta L, \qquad P_y = \left(m_1 L - \tfrac{1}{2} h m_0\right) \ddot{\beta} \tag{3.3}$$

Выберем положение оси вращения таким образом, чтобы при повороте вокруг нее результирующая сил давления равнялась нулю и система сил давления сводилась лишь к моменту.

Полагая во второй формуле (3.3) $P_y = 0$, найдем, что расстояние от оси Qx до оси поворота должно быть равно

$$L_ц = \frac{h}{2} \frac{m_0}{m_1} \tag{3.4}$$

Точку пересечения найденного положения оси mn с осью цилиндра назовем центром инерции жидкости в цилиндрическом сосуде.

Момент сил давления при повороте вокруг оси, проходящей через центр инерции, согласно (3.2), (3.3) и (3.4) будет

$$M_ц = -I_ц \ddot{\beta}, \qquad I_ц = I_0 - m_1 L_ц^2 \tag{3.5}$$

Величина $I_ц$ есть эффективный момент инерции при повороте вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр инерции.

Если приложить к сосуду момент, перпендикулярный оси сосуда и стремящийся вращать сосуд вокруг горизонтальной оси, то сосуд будет вращаться вокруг оси, проходящей через центр инерции. Видим, таким образом, что в случае приложения горизонтального момента центр инерции играет роль, аналогичную центру тяжести твердого тела.

Рассмотрим теперь поступательные движения сосуда вдоль оси Oy. Сила и момент согласно (2.19) будут

$$P_y = -m_1\ddot{\gamma}, \qquad M_x = -\frac{h}{2}m_0\ddot{\gamma} \tag{3.6}$$

Приведем систему (3.6) к центру инерции. Получим для момента

$$M_{xц} = -\frac{1}{2}hm_0\ddot{\gamma} - P_yL_ц \tag{3.7}$$

Подставляя $L_ц$ из формулы (3.4), получим $M_x = 0$.

Видим, таким образом, что при поступательном движении сосуда вдоль горизонтальной оси система сил давления сводится к горизонтальной силе, параллельной этой оси и проходящей через центр инерции. Полученный результат означает, что если мы будем прикладывать к сосуду горизонтальную силу, линия действия которой пересекает ось сосуда в центре инерции, то сосуд будет двигаться поступательно в горизонтальном направлении, параллельно приложенной силе, подобно тому, как это будет в случае приложения силы к центру тяжести твердого тела.

Пусть теперь к сосуду приложена система сил, параллельных плоскости Oyz. Приведем эту систему сил к центру инерции. Обозначим R и N результирующую и момент этих сил. Из предыдущего следует, что под действием сил R_y и R_z сосуд будет совершать поступательные перемещения, а под действием момента будет вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр инерции. Записав, что силы давления жидкости на стенки уравновешиваются внешними силами, получим следующие уравнения, описывающие движение центра инерции и движение вокруг центра инерции:

$$m_1\ddot{\gamma} = R_y, \qquad m\ddot{\delta} = R_z, \qquad I_ц\ddot{\beta} = N \tag{3.8}$$

где δ — вертикальное смещение сосуда вдоль оси Oz. Уравнения эти с внешней стороны вполне аналогичны таким же уравнениям для движения центра тяжести и около центра тяжести в случае твердого тела.

Существенное отличие состоит в том, что инерционность системы при движении вдоль осей Oy и Oz различна (m_1, вообще говоря, не равно m), а также в том, что инерционные характеристики и положение центра инерции будут постоянными во время движения только для движений определенного класса и будут различными для различных движений этого класса. Уравнения (3.8) могут быть использованы при исследовании начала движения, для случая приложения импульсивных сил и случая установившихся гармонических колебаний.

Напишем выражение для момента инерции при вращении вокруг произвольной горизонтальной оси, проходящей через ось сосуда. Имеем

$$\gamma = -\beta L$$

Сила и момент относительно оси Ox будут

$$P_y = m_1 L\ddot{\beta} - \frac{1}{2} h m_0 \ddot{\beta}, \qquad M_x = \frac{1}{2} h L m_0 \ddot{\beta} - I_0 \ddot{\beta} \tag{3.9}$$

Момент относительно оси вращения будет

$$M_L = M_x - P_y L$$

Подставляя M_x и P_y, получим

$$M_L = -I_L \ddot{\beta} \qquad (I_L = I_0 - m_0 h L + m_1 L^2)$$

где I_L — эффективный момент инерции при движении вокруг оси, отстоящей на расстоянии L от оси Ox.

Пусть l — расстояние от оси вращения до центра инерции, так что

$$L = L_ц + l$$

Подставляя в формулу для I_L и пользуясь соотношением из (3.5), получим

$$I_L = I_ц + m_1 l^2 \tag{3.10}$$

Формула (3.10) аналогична известной для моментов инерции твердого тела теореме Штейнера и дает обобщение этой теоремы на случай сосуда с жидкостью. Вторая формула (3.5) является частным случаем этой формулы.

Если $m_1 > 0$, то момент инерции I_L, как и для твердого тела при $l = 0$, т. е. для оси, проходящей через центр инерции, будет минимальным. В случае приложения импульсивных сил величины $I_ц$ и m_1 всегда положительны. При гармонических колебаниях могут быть значения α, при которых $m_1 < 0$. В этих случаях I_L для центральной оси будет, наоборот, максимальным.

Приведем формулы для вычисления сил, моментов и инерционных характеристик при преобразовании системы координат $x' = x$, $y' = 0$, $z' = z + L$.

Выражения для силы и момента при наличии как смещения, так и поворота можно представить в виде

$$P_{y'} = -m_1 \ddot{\gamma}' - \frac{1}{2} h m_0' \ddot{\beta}, \qquad M_{x'} = -\frac{1}{2} h m_0' \ddot{\gamma}' - I_0' \ddot{\beta} \tag{3.11}$$

где γ' — смещение относительно точки O',

$$m_0' = m_0 - \frac{2L}{L} m_1, \qquad I_0' = I_0 - m_0 h L + m_1 L^2 \tag{3.12}$$

Эффективная масса m_1 при сдвиге осей вдоль оси Oz не меняется. Эффективная масса m_0 обращается в нуль, если начало координат совпадает с центром инерции.

Формулы (3.11) и (3.12) в совокупности с формулами для расчета величины m_0 m_1, I_0 могут быть использованы, например, при расчете эффективных моментов инерции относительно поперечной оси и эффективных масс для систем, включающих несколько цилиндрических полостей, частично заполненных жидкостью и расположенных вдоль одной оси. Следует отметить, что и для таких систем также может быть определен центр инерции, обладающий аналогичными свойствами. Если привести систему внешних сил к этой точке, то инерционная характеристика m_0 для всей

системы будет равна нулю и система уравнений распадается на независимые уравнения, описывающие движение центра инерции и движение относительно центра инерции. Система уравнений будет в этом случае иметь вид (3.8).

Что касается случая пространственного движения, то при наличии весовой вращательной симметрии системы уравнений пространственного движения в интересующем нас случае малых колебаний могут быть разбиты на две независимые пары уравнений, описывающих вращение и боковое движение для двух осей, перпендикулярных оси симметрии, и уравнения для поступательного движения вдоль оси симметрии и вращательного движения вокруг этой оси. Эти два последних уравнения будут независимы одно от другого и независимы от остальных уравнений системы. Уравнение для движения системы вдоль оси симметрии будет совпадать с уравнением для системы с затвердевшей жидкостью, а уравнение движения вокруг оси будет совпадать с уравнением при отсутствии жидкого наполнения.

В общем случае произвольного движения понятие об инерционных характеристиках системы с жидким наполнением утрачивает смысл и две первые пары уравнений целесообразно записывать в несколько ином виде, рассматривая их, например, как уравнения движения твердой части системы и рассматривая силы давления жидкости на стенки как внешние силы.

Можно также присоединять к инерционным характеристикам твердой части системы ту часть инерционных характеристик жидкости, которая не зависит от волнового движения, т. е. от функций χ_n, а члены, содержащие эти функции, писать отдельно и трактовать как внешние силы.

Удобной формой уравнений движения является такая форма, когда инерционность системы рассматривается в виде суммы инерционной характеристики для твердой части системы и для затвердевшей жидкости и добавки, происходящей за счет проворота и за счет волнового движения. В этом случае при выборе в качестве центра приведения центра тяжести системы с затвердевшей жидкостью главные члены приведутся так же, как для твердого тела, и полученные уравнения будут связаны друг с другом только за счет подвижности жидкости, причем эти члены уравнения будут выделены и всегда могут быть оценены. Эти добавочные члены уравнений получатся из последних членов инерционных характеристик, зависящих от величин χ_n.

Для замыкания каждой из двух пар уравнений, описывающих движение в двух перпендикулярных плоскостях, проходящих через ось симметрии (уравнение количества движения и уравнение моментов), необходимо присоединить к каждой из них бесконечную систему уравнений (1.28), дающих связь между параметрами волнового движения в каждой из цилиндрических полостей, если их несколько, и параметрами движения твердой части системы.

При этом под величиной γ, входящей в правые части этих уравнений, надлежит понимать не смещение центра проведения системы, а смещение центра свободной поверхности для каждой из полостей.

§ 4. Исследование инерционных характеристик. При движении сосуда с жидкостью основное значение имеют характеристики m_1 и I_0. Эффективная масса m_1 играет роль массы при боковых поступательных перемещениях. Эффективный момент инерции определяет инерционность при вращении относительно середины свободной поверхности. Характеристика m_0 не имеет такого ясного физического смысла и служит для определения центра инерции.

Рассмотрим сперва случай начала движения (действие импульсивных сил).

На фиг. 6 дана зависимость величин

$$m_1{}^\circ = \frac{m_1}{m}, \qquad m_0{}^\circ = \frac{m_0}{m}, \qquad I_0{}^\circ = \frac{I_0}{ma^2}$$

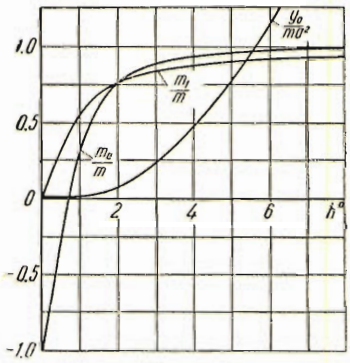
от относительной высоты сосуда h°.

Видим, что при $h^\circ = 0$ имеем $m = 0$.

С ростом h° величина m_1 растет, асимптотически приближаясь к единице.

Это можно объяснить следующим образом. Отличие m_1 от m происходит за счет того, что при боковом толчке жидкость не будет целиком увлекаться сосудом, а будет несколько отставать, так что у передней в направлении движения стенки уровень жидкости будет понижаться, а у задней стенки повышаться. При малой высоте h° боковые стенки мало стесняют движение жидкости, и отставание будет весьма сильным. Эффективная масса будет значительно меньше массы жидкости. Напротив, при большой глубине жидкости стенки сильно ограничивают движение жидкости, и при перемещениях сосуда жидкость будет увлекаться почти целиком.

Отставание жидкости, имеющее место вблизи свободной поверхности, будет вызывать в более глубоких слоях жидкости лишь очень слабое смещение относительно сосуда, поскольку, как известно, интенсивность волнения очень быстро падает с глубиной.



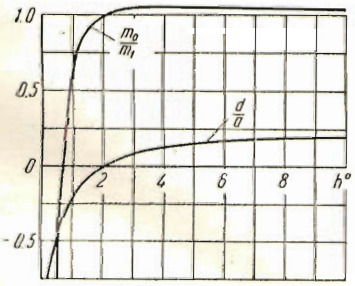
Фиг. 6

Поэтому при больших значениях h° эффективная масса m_1 будет мало отличаться от массы жидкости.

Выясним, как изменяется по h° положение центра инерции, определяемое формулой (3.4).

На фиг. 7 дан график отношения m_0/m_1. Видим, что при $h^\circ \to 0$ это отношение стремится к $-\infty$. Можно, однако, показать, что величина $^1/_2 h^\circ m_0/m_1$ остается при этом ограниченной и стремится к некоторому отрицательному предельному значению. Это значит, что центр инерции стремится к некоторому предельному положению выше середины свободной поверхности.

С ростом h° отношение m_0/m_1 растет, а при $h^\circ \to \infty$ асимптотически стремится к единице, оставаясь больше единицы. Это означает, что с ростом h° центр инерции опускается, пересекает свободную поверхность и опускается ниже середины сосуда.



Фиг. 7

Расстояние от центра инерции до середины сосуда согласно формуле (3.4) равно

$$d = a\frac{h^\circ}{2}\left(\frac{m_0}{m_1} - 1\right) \tag{4.1}$$

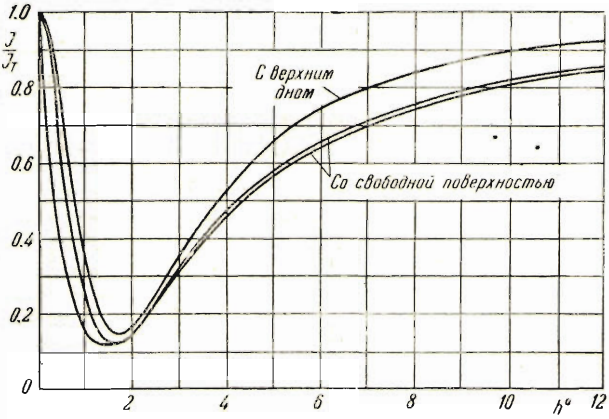
график величины d/a дан на фиг. 7. Видим, что при $h^\circ \to \infty$ расстояние между центром инерции и серединой сосуда стремится к определенному пределу, равному

$$\lim d = a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta_n(\zeta_n^2 - 1)} \approx 0.23a \tag{4.2}$$

т. е. центр инерции расположен в пределе ниже середины сосуда на расстo-

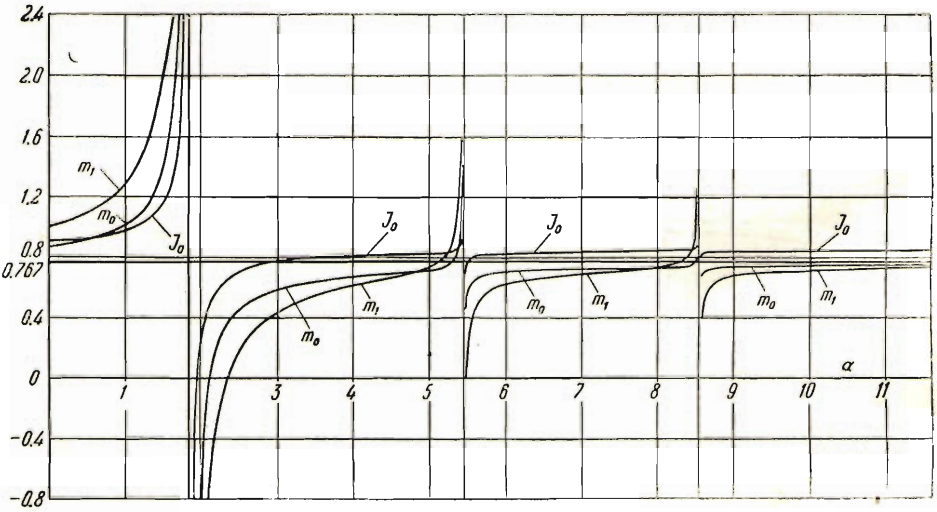
янии, несколько меньшем четверти радиуса. Стремление к пределу довольно медленное. Для $h^\circ = 7$ имеем еще $d = 0.17a$.

Для выяснения роли проворота и волнового движения при вращении на фиг. 8 представлены в зависимости от h° величины отношения эффективного момента инерции к моменту инерции затвердевшей жидкости I_T для поворота сосуда с крышкой на свободной поверхности и без нее вокруг середины сосуда и для поворота сосуда со свободной поверхностью вокруг центра инерции жидкости.



Фиг. 8

Видим, что за счет проворота жидкости при наличии крышки момент инерции уменьшается при некоторых значениях высоты сосуда весьма существенно (примерно в 6 раз при $h^\circ = 1.5 \div 1.8$). Видим также, что наличие свободной поверхности приводит к дальнейшему уменьшению момента инерции. Однако влияние свободной поверхности относительно невелико, и основную роль играет проворот жидкости. Это объясняется тем, что в рассматриваемом случае ось вращения расположена внутри сосуда. При удалении оси вращения влияние свободной поверхности увеличивается и равно в пределе влиянию свободной поверхности при поступательных перемещениях.



Фиг. 9

Нижняя кривая на фиг. 8 соответствует повороту вокруг центра инерции жидкости в сосуде. При значении $h^\circ \approx 2$ две нижние кривые касаются (центр инерции совпадает с серединой сосуда). Так как $m_1 > 0$, то момент

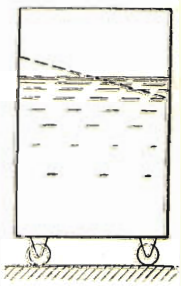
инерции для центра инерции минимален. Заметное отличие от момента инерции относительно середины сосуда имеет место только при малых значениях h°, когда центр инерции лежит относительно далеко от середины сосуда (фиг. 7).

Исследуем теперь случай установившихся гармонических колебаний. На фиг. 9 дана для $h^\circ = 2$ зависимость m_1°, m_0°, I_0° от параметра α. При $\alpha = 0$ имеем $m_1^\circ = 1$, т. е. эффективная масса m_1 равна массе жидкости. Это и понятно, так как при частоте внешних колебаний, много меньшей собственной частоты, жидкость будет перемещаться вместе с сосудом как одно целое. С ростом α масса m_1 растет, неограниченно возрастая при приближении к частоте колебаний первой гармоники. После резонанса m_1 сперва отрицательна, потом проходит через нуль и становится положительной.

Неограниченное возрастание величины эффективной массы вблизи резонанса удобно трактовать не как неограниченное возрастание амплитуды колебаний в сосуде, а как указание на то, что колебания жидкости происходят при весьма малых амплитудах колебаний сосуда. При резонансной частоте сосуд вовсе не должен смещаться. Это и понятно, так как это есть частота колебаний жидкости в неподвижном сосуде.

Явление резонанса имеет место для всех частот свободных колебаний

$$\omega_n = \sqrt{\zeta_n \frac{g}{a} \operatorname{th}\left(\zeta_n \frac{h}{a}\right)}$$



Фиг. 10

При $\alpha \to \infty$ масса m_1 стремится к предельному значению, отвечающему случаю действия импульсивных сил, причем ширина интервала вокруг собственной частоты, где m_1 отличается от предельного значения больше чем на заданную величину, стремится к нулю. Для m_1° предельное значение равно 0.767.

Эффективная масса пропорциональна взятой с обратным знаком горизонтальной проекции результирующей сил давления жидкости на стенки сосуда или потребной внешней силе, которую необходимо приложить к сосуду для реализации колебаний с заданной частотой. Равенство нулю эффективной массы означает, что при данной частоте сосуд может колебаться без приложения внешних горизонтально направленных сил. Эти частоты ω_n' образуют бесконечную последовательность и являются корнями уравнения, которое получим, положив $m_1 = 0$ в формуле (2.26). Частоты ω_n' есть частоты свободных колебаний жидкости вместе с невесомым сосудом при поступательных перемещениях сосуда (фиг. 10). Имеем всегда $\omega_n' > \omega_n$, причем $\omega_n' \to \omega_n$ при $n \to \infty$.

Положительный или отрицательный знак эффективной массы m_1 означает, что для поддержания колебаний с заданной частотой необходимо прикладывать к жидкости силу, направленную в ту же сторону, что и ускорение, или в обратную сторону, т. е. силу, или совпадающую с ускорением по фазе, или обратную по фазе.

Колебания жидкости с отрицательной массой m_1 получим, рассматривая например собственные колебания жидкости вместе с весомым сосудом.

Имеем $M + m_1 = 0$, где M — масса сосуда. Откуда

$$m_1 = -M < 0$$

Значения собственных частот получим из уравнения (2.26), полагая $m_1 = -M$. Корни этого уравнения ω_n° удовлетворяют физически очевидному условию

$$\omega_n < \omega_n^\circ < \omega_n'$$

Отметим еще физический смысл ухода в бесконечность центра инерции. Это имеет место при частотах, когда $m_1 = 0$, т. е. когда потребная внешняя сила для колебаний сосуда равна нулю. Однако потребный момент при этом не равен нулю. Этот момент создается реакциями связей, обеспечивающих поступательное движение сосуда.

Графики на фиг. 9 показывают, что момент инерции I_0 и момент инерции при вращении вокруг любой горизонтальной оси меняются по α аналогичным образом. Физический смысл нулевого положительного и отрицательного момента инерции тот же, что и для эффективной массы m_1. Некоторое различие имеется благодаря наличию момента гидростатических сил. Поэтому, например, в случае обращения момента инерции в нуль соответствующая частота не равна частоте колебаний жидкости вместе с невесомым сосудом и будет равна ей только в случае, когда ось вращения проходит через центр инерции и момент гидростатических сил пропадает.

Приведенное исследование показывает, что наличие свободной поверхности может в ряде случаев весьма заметно менять инерционные характеристики тел с полостями, наполненными жидкостью.

Поступила 13 VIII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. II, Гостехиздат, М.—Л., 1949.