

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОЛОСТЬ КОТОРОГО ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕНА ЖИДКОСТЬЮ

Г. С. Нариманов

(Москва)

Настоящая статья содержит сокращенное изложение выполненной в 1951 г. работы автора, посвященной составлению уравнений движения твердого тела, имеющего полости, частично заполненные жидкостью, и анализу решений этих уравнений.

Аналогичные уравнения, выведенные несколько иным путем, были независимо получены позднее Н. Н. Моисеевым [1,2,3].

В настоящей статье помимо краткого вывода уравнений задачи проводится доказательство существования и единственности решения этих уравнений, а также рассматривается обоснование возможности применения метода редукции для получения решения.

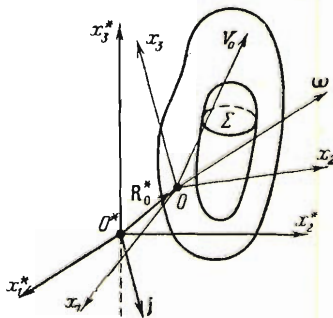
§ 1. Система координат. Исходные предпосылки. Будем полагать, что твердое тело обладает лишь одной полостью, наполненной жидкостью (обобщение результатов на случай большего числа полостей не представляет каких-либо трудностей).

Движение твердого тела и жидкости будем рассматривать относительно некоторой системы координат $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$, не являющейся, вообще говоря, инерциальной, но обладающей тем свойством, что поле инерционных сил и сил тяжести имеет в ней потенциальную функцию.

Кроме этой системы координат, введем в рассмотрение еще систему $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с твердым телом (фиг. 1). Движение системы координат $Ox_1x_2x_3$, а, стало быть, и твердого тела относительно системы координат $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$ будем определять при помощи вектора скорости V_0 точки O и вектора угловой скорости вращения ω , проходящего через точку O .

Для дальнейшего введем обозначения:

- R, R^* — радиусы-векторы относительно точек O, O^* соответственно;
- R_0^* — радиус-вектор точки O относительно O^* ;
- n — единичный вектор внешней нормали к поверхности жидкости;
- u_n — проекция относительной скорости жидкости на n ;
- S — поверхность жидкой массы;
- ζ — смачиваемая поверхность полости;
- Σ_0 — невозмущенная свободная поверхность жидкости, описываемая уравнением $x_3 = C$;
- l — плоская замкнутая кривая пересечения поверхностей Σ_0 и ζ ;
- Σ — возмущенная свободная поверхность жидкости.



Фиг. 1.

Уравнение возмущенной свободной поверхности жидкости представим в следующем виде:

$$x_3 - C = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) f_i(x_1 x_2) \quad (1.1)$$

где функции $f_i(x_1 x_2)$, за исключением постоянной величины, соответствующей $\lambda = 0$, являются нормированными собственными функциями краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \lambda^2 f = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_l = 0 \quad (1.2)$$

Собственные функции краевой задачи (1.2) образуют полную и ортогональную систему функций на области G , за которую следует принять часть плоскости $x_3 = 0$, ограниченную проекцией на нее кривой l .

Приведем основные допущения, которые приняты в дальнейшем.

1. Жидкость, находящаяся в полости, считается невязкой.

2. Предполагается, что движение жидкости в системе координат $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$ обладает потенциалом скоростей. Поскольку в этой системе координат поле массовых сил имеет потенциальную функцию, то в силу теоремы Лагранжа свойство потенциальности движения жидкости будет сохранено во все время движения.

3. Рассматриваются лишь малые движения твердого тела и жидкости. Малым движением называется такое движение, в котором величины \mathbf{V}_0 , ω , \mathbf{R}_0^* , углы между одноименными осями систем координат $Ox_1x_2x_3$ и $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$, а также величины a_i, \dot{a}_i ($i = 1, 2, \dots$) настолько малы, что произведения и квадратами их можно пренебречь по сравнению со значением любой из этих величин.

4. Будем считать, что потенциальная функция U массовых сил (инерции и тяжести) в системе координат $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$ может быть представлена следующим образом:

$$U = -j\mathbf{R}^* \quad (1.3)$$

где j — суммарный вектор ускорения поля массовых сил.

5. Положим, что вектор j во все время движения составляет малый угол с обратным направлением оси $O^*x_3^*$ и, стало быть, величины проекций j на оси $O^*x_1^*$ и $O^*x_2^*$ являются малыми в смысле высказанного выше понятия малости. Обозначим через Φ потенциал скоростей жидкости в системе координат $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$.

Граничные условия для функции Φ имеют вид:

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{\zeta} = \mathbf{V}_0 \mathbf{n} + [\omega \times \mathbf{R}] \mathbf{n}, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{\Sigma} = \mathbf{V}_0 \mathbf{n} + [\omega \times \mathbf{R}] \mathbf{n} + u_n \quad (1.4)$$

В силу высказанного предположения о малости параметров движения второе граничное условие может быть отнесено к плоскости $x_3 = C$ невозмущенной свободной поверхности жидкости.

Тогда условия (1.4) запишем в виде

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{\zeta} = \mathbf{V}_0 \mathbf{n} + \omega [\mathbf{R} \times \mathbf{n}], \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right]_{x_3=C} = \mathbf{V}_0 \mathbf{n} + \omega [\mathbf{R} \times \mathbf{n}] + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i f_i(x_1, x_2) \quad (1.5)$$

Очевидно, что функция Φ , удовлетворяющая условиям (1.5), может быть представлена следующим образом:

$$\Phi = \mathbf{V}_0 \mathbf{R}^* + \omega \Omega + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i A_i + \text{const} \quad (1.6)$$

где Ω — гармоническая векторная функция ($\Delta \Omega = 0$), а $A_i (i = 1, 2, \dots)$ — гармонические функции, удовлетворяющие соответственно условиям

$$\left[\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{n}} \right]_S = [\mathbf{R} \times \mathbf{n}], \quad \left[\frac{\partial A_i}{\partial \mathbf{n}} \right]_z = 0, \quad \left[\frac{\partial A_i}{\partial x_3} \right]_{x_3=C} = f_i(x_1, x_2) \quad (1.7)$$

§ 2. Выражение количества движения и кинетического момента жидкой массы. Вектор количества движения жидкой массы

$$\mathbf{K}_1 = \int_{\tau} \rho \text{grad } \Phi d\tau \quad (2.1)$$

где τ — объем, занимаемый жидкостью, ρ — плотность жидкости ($\rho = \text{const}$).

Используя выражение (1.6), получим

$$\mathbf{K}_1 = \rho \left\{ \int_{\tau} \text{grad } (\mathbf{V}_0 \mathbf{R}^*) d\tau + \int_{\tau} \text{grad } (\omega \Omega) d\tau + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i \int_{\tau} \text{grad } A_i d\tau \right\} \quad (2.2)$$

Из физических соображений очевидны следующие равенства:

$$\int_{\tau} \text{grad } (\mathbf{V}_0 \mathbf{R}^*) d\tau = \mathbf{V}_0 \tau, \quad \int_{\tau} \text{grad } (\omega \Omega) d\tau = \tau [\omega \times \mathbf{R}_{c_1}] \quad (2.3)$$

где \mathbf{R}_{c_1} — радиус-вектор центра инерции жидкой массы.

Далее рассмотрим выражения, стоящие под знаком суммы в (2.2):

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \text{grad } A_i d\tau &= \int_{\tau} (\text{grad } A_i \nabla) \mathbf{R}^* d\tau = \int_{\tau} (\nabla \text{grad } A_i) \mathbf{R}^* d\tau - \int_{\tau} \mathbf{R}^* \Delta A_i d\tau = \\ &= \iint_S \mathbf{R}^* \frac{\partial A_i}{\partial \mathbf{n}} dS \end{aligned}$$

Для этих преобразований используется тождество

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{R}^* \quad \left(\nabla = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k^* \frac{\partial}{\partial x_k^*} \right)$$

где \mathbf{e}_k^* — единичные орты системы координат $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$.

Используя условия (1.8), получим

$$\iint_S \mathbf{R}^* \frac{\partial A_i}{\partial \mathbf{n}} dS = \mathbf{R}_0^* \iint_G f_i(x_1, x_2) dG + \iint_G \mathbf{R} f_i(x_1, x_2) dG = \iint_G \mathbf{R}_G f_i(x_1, x_2) dG \quad (2.4)$$

где \mathbf{R}_G означает радиус-вектор точки области G . Обозначим через

$$\mathbf{L}^{(i)} = \iint_G \mathbf{L} f_i dG \quad (2.4)$$

коэффициент Фурье векторной функции \mathbf{L} . Тогда, используя (2.4), можно записать

$$\int_{\tau} \text{grad } A_i d\tau = \mathbf{R}_G^{(i)} \quad (2.5)$$

Используя равенства (2.3) и (2.5), представим вектор количества движения жидкости в виде

$$\mathbf{K}_1 = m_1 \mathbf{V}_0 + m_1 [\omega \times \mathbf{R}_{c1}] + \rho \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i \mathbf{R}_G^{(i)} \quad (2.6)$$

где $m_1 = \rho \tau$ — масса жидкости.

Обозначим кинетический момент жидкости относительно точки O_1 (O_1 — точка в системе координат $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$, с которой в данный момент времени совпадает точка O) через G_1 .

Аналогично вектору \mathbf{K}_1 вектор G_1 может быть представлен в виде

$$G_1 = \sum_{k=1}^{\infty} G_{1k} \quad (2.7)$$

$$G_{11} = \int_{\tau} \rho [\mathbf{R} \times \mathbf{V}_0] d\tau = m_1 [\mathbf{R}_{c1} \times \mathbf{V}_0], \quad G_{12} = \int_{\tau} \rho [\mathbf{R} \times \text{grad}(\omega \Omega)] d\tau = (J_1 \omega)$$

где J_1 , как следует из работы Н. Е. Жуковского [4], симметричный аффинный ортогональный тензор 2-го ранга, аналогичный тензору инерции твердого тела, с компонентами

$$J_{1kj} = \rho \int_{\tau} \text{grad} \Omega_k \text{grad} \Omega_j d\tau \quad (2.8)$$

Выражение для G_{13} можно представить в виде

$$G_{13} = \rho \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i \int_{\tau} [\mathbf{R} \times \text{grad} A_i] d\tau = \rho \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i \Omega_C^{(i)}, \quad \Omega_C = \Omega(x_1, x_2, x_3 = C)$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{\tau} [\mathbf{R} \times \text{grad} A_i] d\tau &= \iint_S [\mathbf{R} \times \mathbf{n}] A_i dS = \iint_S \frac{\partial \Omega}{\partial n} A_i dS = \\ &= \iint_S \frac{\partial A_i}{\partial n} \Omega dS = \iint_G \Omega_C f_i dG = \Omega_C^{(i)} \end{aligned}$$

Окончательно кинетический момент жидкости относительно точки O_1 запишется так:

$$G_1 = m_1 [\mathbf{R}_{c1} \times \mathbf{V}_0] + (J_1, \omega) + \rho \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i \Omega_C^{(i)} \quad (2.9)$$

§ 3. Уравнения движения. Запишем выражения количества движения твердого тела \mathbf{K}_0 и его кинетического момента G_0 относительно точки O_1 :

$$\mathbf{K}_0 = m_0 \mathbf{V}_0 + m_0 [\omega \times \mathbf{R}_{c0}], \quad G_0 = m_0 [\mathbf{R}_{c0} \times \mathbf{V}_0] + [(J_0, \omega)] \quad (3.1)$$

где m_0 — масса твердого тела, J_0 — тензор инерции его относительно точки O , а \mathbf{R}_{c0} — радиус-вектор центра инерции твердого тела относительно точки O . Используя выражения (2.6), (2.9) и (3.1), составим уравнения количества движения и момента количества движения, которые с точностью до величины первого порядка малости примут следующий вид:

$$m \dot{\mathbf{V}}_0 + [\dot{\omega} \times \mathbf{L}] + \rho \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{a}_i \mathbf{R}_G^{(i)} = \sum_j \mathbf{P}_j \quad (3.2)$$

$$[\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{V}}_0] + (J, \dot{\omega}) + \rho \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{a}_i \Omega_C^{(i)} = \sum_j \mathbf{M}_j \quad (3.3)$$

где $m = m_0 + m_1$ — общая масса системы, $J = J_0 + J_1$ — тензор инерции системы относительно точки O , $aL = m_0R_{c_0} + mR_{c_1}$ — статический момент системы относительно той же точки, P_j — внешние силы и силы инерции, действующие на систему, M_j — момент внешних и инерционных сил относительно точки O . Преобразуем правую часть второго уравнения.

Очевидно, что из всех внешних моментов только момент от массовых сил $M_g = [L \times j]$ зависит от формы свободной поверхности жидкости, L — статический момент относительно точки O системы твердое тело + жидкость. Обозначим разность между L и вектором L_0 , являющимся статическим моментом в случае, когда уравнение свободной поверхности имеет вид $x_3 = C$, через ΔL_0 :

$$L = L_0 + \Delta L_0 \tag{3.4}$$

Очевидно, что с точностью до величины первого порядка малости ΔL_0 можно представить, подставляя значение x_3 по (1.1), в виде:

$$\Delta L = \rho \iiint_G R(x_3 - C) dG = \rho \sum_{i=1}^{\infty} a_i R_G^{(i)}. \tag{3.5}$$

Момент от массовых сил M_g может быть представлен в таком виде:

$$M_g = M_{g_0} + \rho \sum_{i=1}^{\infty} a_i [R_G^{(i)} \times j] \tag{3.6}$$

где $M_{g_0} = [L_0 \times j]$ — момент, действующий на систему в случае, когда свободная поверхность является плоскостью, уравнение которой $x_3 = C$.

Сохранив от значения M_g под знаком суммы, стоящей в правой части уравнения (3.3), только M_{g_0} , выделим ту часть момента массовых сил, которая зависит от параметров a_i , т. е. от формы свободной поверхности. При этом уравнения (3.2) и (3.3) примут вид:

$$m\dot{V}_0 + [\dot{\omega} \times L_0] = \sum_j P_j - \rho \sum_{i=1}^{\infty} a_i R_G^{(i)} \tag{3.7}$$

$$[L_0 \times \dot{V}_0] + (J, \dot{\omega}) = \sum_j M_j - \rho \sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{a}_i \Omega_c^{(i)} - a_i [R_G^{(i)} \times j]) \tag{3.8}$$

Далее составим уравнения, определяющие изменение параметров a_i . Для этой цели используем условия постоянства давления на свободной поверхности жидкости, что приводит к следующим равенствам:

$$\iint_G p_{\Sigma} f_i dG = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \tag{3.9}$$

где p_{Σ} — давление в соответствующих точках поверхности Σ .

Используя интеграл Коши уравнений Эйлера, выразим p_{Σ} с точностью до членов первого порядка малости следующим образом:

$$p_{\Sigma} = -\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \right)_{\Sigma}$$

Подставим это выражение в (3.9), исключив U и Φ при помощи (1.3) и (1.6). С точностью до членов первого порядка малости условия (3.9)

в этом случае преобразуются таким образом:

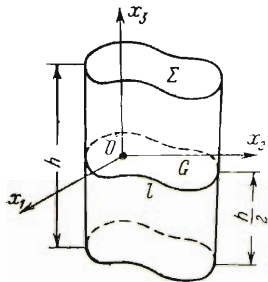
$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{a}_k A_{kc}^{(i)} + a_i j = (\mathbf{j} - \mathbf{V}_0) \mathbf{R}_G^{(i)} - \dot{\omega} \Omega_c^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

где

$$A_{kc}^{(i)} = \iint_G A_{kc} f_i dG, \quad j = |\mathbf{J}|$$

Уравнения (3.10) вместе с (3.7) и (3.8) составляют бесконечную систему уравнений, описывающих решение поставленной задачи в случае произвольной формы полости. Уравнения (3.10) существенно упрощаются для полостей, имеющих цилиндрическую форму.

Расположим систему координат $Ox_1 x_2 x_3$ так, чтобы начало ее, точка O , находилось в плоскости симметрии цилиндрического столба жидкости (фиг. 2), а ось Ox_3 была параллельна образующей. Рассмотрим для этого случая граничную задачу, определяющую функции A_k :



Фиг. 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_3^2} &= 0, & \left[\frac{\partial A_k}{\partial n} \right]_{\sigma} &= 0, \\ \frac{\partial A_k}{\partial x_3} &= \begin{cases} 0 & \text{при } x_3 = -\frac{1}{2} h \\ f_k(x_1, x_2) & \text{при } x_3 = \frac{1}{2} h \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11)$$

где σ — боковая поверхность полости.

В этом случае функции A_k могут быть представлены в виде:

$$A_k = \frac{\text{ch } \lambda_k (x_3 + \frac{1}{2} h)}{\lambda_k \text{sh } \lambda_k h} f_k(x_1, x_2) \quad (3.12)$$

где λ_k^2 — собственные значения краевой задачи (1.2). Тогда

$$A_{kc} = C_k f_k(x_1, x_2), \quad C_k = \frac{1}{\lambda_k} \text{cth } \lambda_k h, \quad A_{kc}^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ C_k & \text{при } i = k \end{cases}$$

Уравнения движения тела, имеющего цилиндрическую полость, частично заполненную жидкостью, принимают вид:

$$\begin{aligned} m \dot{\mathbf{V}}_0 + [\dot{\omega} \times \mathbf{L}_0] &= \sum_j \mathbf{P}_j - \rho \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{a}_i \mathbf{R}_G^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots) \\ [\mathbf{L}_0 \times \dot{\mathbf{V}}_0] + (J, \dot{\omega}) &= \sum_j \mathbf{M}_j - \rho \sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{a}_i \Omega_c^{(i)} - a_i [\mathbf{R}_G^{(i)} \times \mathbf{j}]) \quad (3.13) \\ \ddot{a}_i c_i + a_i j &= (\mathbf{j} - \dot{\mathbf{V}}_0) \mathbf{R}_G^{(i)} - \dot{\omega} \Omega_c^{(i)} \end{aligned}$$

Начальные значения $a_i(t_0)$ и $\dot{a}_i(t_0)$ определяются из соотношений

$$a_i(t_0) = \iint_G \xi f_i dG = \xi^{(i)}, \quad \dot{a}_i(t_0) = \iint_G \chi f_i dG = \chi^{(i)}$$

где

$$x_3(x_1, x_2, t_0) = C = \xi(x_1, x_2), \quad u_n(x_1, x_2, t_0) = \chi(x_1, x_2)$$

Из вида уравнений (3.13) можно заключить, что если коэффициенты Фурье от \mathbf{R}_G^l и Ω_c^l , соответствующие какой-либо функции $f_{(l)}$, одновременно равны нулю, то уравнение, определяющее изменение параметра a_l , не зависит от других уравнений, т. е. изменение этого параметра не зависит от движения сосуда и, наоборот, движение сосуда не зависит от изменения этого параметра.

§ 4. Существование и единственность решения уравнений (3.13). Возможность применения для решения метода редукции. Будем рассматривать только плоские движения сосуда, обладающего произвольной цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью. Рассмотрение плоского движения упрощает выкладки, не снижая общности.

Положим, что движение сосуда происходит в плоскости $O^*x_2^*x_3^*$ и что ось Ox_3 проходит через центр тяжести системы при невозмущенном положении свободной поверхности, а вектор \mathbf{j} параллелен оси $O^*x_3^*$. Обозначим через ε угол между осями $O^*x_3^*$ и Ox_3 .

Тогда систему (3.13) можно представить в виде

$$m\ddot{x} - \dot{l}\dot{\varepsilon} = \sum_j P_j - \rho \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{a}_i x_G^{(i)} \quad (4.1)$$

$$J\ddot{\varepsilon} - \dot{l}\dot{x} = \sum_j M_j - \rho \sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{a}_i \Omega_C^{(i)} + a_i j x_G^{(i)})$$

$$\ddot{a}_i + \omega_i^2 a_i = -\frac{1}{C_i} (x_G^{(i)} \ddot{x} + \Omega_C^{(i)} \ddot{\varepsilon} + j x_G^{(i)} \varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Здесь

$$x_{02}^* = x, \quad P_{j2} = P_j, \quad x_{G2}^{(i)} = x_G^{(i)}, \quad \frac{j}{C_i} = \omega_i^2, \quad L_3 = l$$

$$J_{11} = J, \quad M_{j1} = M_j, \quad \Omega_{C1}^{(i)} = \Omega_C^{(i)}$$

Начальные условия имеем в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0, \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad a_i = \xi^{(i)}, \quad \dot{a}_i = \chi^{(i)} \quad \text{при } t = t_0$$

Рассмотрим в системе (4.1) уравнения, содержащие конечное число неизвестных. Составим соответствующие им однородные уравнения:

$$\ddot{a}_i + \omega_i^2 a_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

Обозначим через y_i и z_i линейно независимые решения уравнений (4.2), удовлетворяющие начальным условиям:

$$y_i = 1, \quad \dot{y}_i = 0, \quad z_i = 0, \quad \dot{z}_i = 1 \quad \text{при } t = t_0$$

Тогда, очевидно, можно записать следующие выражения (4.3)

$$a_i(t) = \xi^{(i)} y_i + \chi^{(i)} z_i + \int_{t_0}^t K_i(t\tau) \frac{1}{C_i} (x_G^{(i)} \dot{x} + \Omega_C^{(i)} \ddot{\varepsilon} + j x_G^{(i)} \varepsilon) d\tau$$

где

$$K_i(t\tau) = z_i(t) y_i(\tau) - z_i(\tau) y_i(t)$$

Прежде всего нам необходимо убедиться в том, что $|y_i(t)|, |z_i(t)|$, а стало быть, и $|K_i(t\tau)|$ на всяком ограниченном отрезке $t (t_0 \leq t \leq t_1)$ не могут превосходить некоторого положительного числа M , которое может быть назначено независимо от индекса i .

Перепишем уравнения (4.2) в таком виде:

$$\ddot{a}_i + j(t) \beta_i^2 a_i = 0 \quad (\beta_i^2 = \frac{1}{C_i} = \lambda_i \operatorname{th} \lambda_i h) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

Будем полагать, что функция $j(t)$, характеризующая изменение во времени поля массовых сил, имеет непрерывную вторую производную. Кроме того, положим, что $j(t) \geq g$, где g — некоторое положительное число. Произведя в уравнениях (4.4) замену переменных:

$$\zeta = \int_{t_0}^t \sqrt[4]{j} dt, \quad a_i^* (\zeta) = \sqrt[4]{j} a_i(t) \quad (4.5)$$

преобразуем их к следующему виду:

$$\frac{d^2 a_i^*}{d\zeta^2} + [\beta_i^2 - q(\zeta)] a_i^* = 0, \quad q(\zeta) = \left(\frac{1}{j}\right)^{1/4} \frac{d^2}{d\zeta^2} (j)^{1/4} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4.6)$$

Рассмотрим решения уравнений (4.6) при фиксированных значениях начальных условий:

$$a_i^* = m, \quad \dot{a}_i^* = n \quad \text{при } \zeta = 0$$

Обозначим функцию $a_i^* (\zeta)$, удовлетворяющую этим начальным условиям, через $\alpha_i (\zeta)$. Имеет место следующая теорема [5], которую приведем без доказательства.

На всяком ограниченном отрезке изменения переменной $\zeta (0 \leq \zeta \leq \zeta_1)$ решения уравнений (4.6) $\alpha_i (\zeta)$ удовлетворяют неравенству $|\alpha_i (\zeta)| < N$, где N — некоторое положительно постоянное число (не зависящее от индекса i , а стало быть, и от параметра β_i).

Обозначим

$$y_i^* (\zeta) = \sqrt[4]{j} y_i(t), \quad z_i^* (\zeta) = \sqrt[4]{j} z_i(t)$$

$$y_i^* = \sqrt[4]{j(t_0)}, \quad \dot{y}_i^* = \left(\frac{1}{j}\right)^{1/4} \frac{d}{dt} \left(\sqrt[4]{j}\right)_{t=t_0}, \quad z_i^* = 0, \quad \dot{z}_i^* = \left(\frac{1}{j}\right)^{1/4} \text{ при } \zeta = 0 (t = t_0)$$

а поскольку $j(t) \geq g > 0$, то все эти начальные условия ограничены.

Из приведенной выше теоремы вытекает, что решения уравнений (4.6) $y_i^* (\zeta)$ и $z_i^* (\zeta)$ ограничены по абсолютной величине некоторым числом N :

$$|y_i^*| < N, \quad |z_i^*| < N \quad (0 < \zeta < \zeta_1)$$

Но тогда из формулы (4.5) получаем для $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\max |y_i(t)| < M, \quad \max |z_i(t)| < M, \quad \max |K_i(t\tau)| < 2M^2 \left(M = \frac{N}{g^{1/4}}\right) \quad (4.7)$$

где M — число, не зависящее от величины индекса i , который может принимать любые значения от 1 до ∞ .

Далее, пользуясь (4.3), найдем

$$\begin{aligned} \ddot{a}_i = & -\frac{1}{C_i} (x_G^{(i)} \ddot{x} + \Omega_G^{(i)} \ddot{\varepsilon} + j x_G^{(i)} \varepsilon + j \dot{\varepsilon}^{(i)} y_i + j \chi^{(i)} z_i) - \\ & - \frac{1}{C_i^2} \int_{t_0}^t K_i(t\tau) (x_G^{(i)} \ddot{x} + \Omega_G^{(i)} \ddot{\varepsilon} + j x_G^{(i)} \varepsilon) j d\tau \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подставим выражения $a_i(t)$ и $\ddot{a}_i(t)$ из (4.3) и (4.8) в первые два уравнения системы (4.1):

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} - l\ddot{\varepsilon} = & \sum_j P_j + \ddot{x}\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i} + \ddot{\varepsilon}\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Omega_C^{(i)} x_G^{(i)}}{C_i} + \\
 & + \varepsilon j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i} + j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)}}{C_i} (\xi^{(i)} y_i + \chi^{(i)} z_i) + \\
 & + j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)} t}{C_i^2} \int_{t_0}^t K_i(\tau) (x_G^{(i)} \ddot{x} + \Omega_C^{(i)} \ddot{\varepsilon} + jx_G^{(i)} \varepsilon) d\tau
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\varepsilon} - l\ddot{x} = & \sum_j M_j + \ddot{x}\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)} \Omega_C^{(i)}}{C_i} + \ddot{\varepsilon}\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Omega_C^{(i)2}}{C_i} + \\
 & + \varepsilon j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)} \Omega_C^{(i)}}{C_i} + j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\Omega_C^{(i)}}{C_i} - x_G^{(i)} \right) (\xi^{(i)} y_i + \chi^{(i)} z_i) + \\
 & + j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\Omega_C^{(i)} - x_G^{(i)} C_i)}{C_i^2} \int_{t_0}^t K_i(\tau) (x_G^{(i)} \ddot{x} + \Omega_C^{(i)} \ddot{\varepsilon} + jx_G^{(i)} \varepsilon) d\tau
 \end{aligned}$$

Будем пока предполагать, что ряды под знаками интегралов в уравнениях (4.9) равномерно сходятся (это будет доказано в дальнейшем). Тогда в уравнениях (4.9) можно вынести интегралы за знаки суммы; получим

$$\begin{aligned}
 a_{12} \ddot{x} + b_{12} \ddot{\varepsilon} + b_{10} \varepsilon = & \sum_j P_j + f_1(t) + \int_{t_0}^t A_{12}(\tau) \ddot{x} d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t B_{12}(\tau) \ddot{\varepsilon} d\tau + \int_{t_0}^t B_{10}(\tau) \varepsilon d\tau
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
 a_{22} \ddot{x} + b_{22} \ddot{\varepsilon} + b_{20} \varepsilon = & \sum_j M_j + f_2(t) + \int_{t_0}^t A_{22}(\tau) \ddot{x} d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t B_{22}(\tau) \ddot{\varepsilon} d\tau + \int_{t_0}^t B_{20}(\tau) \varepsilon d\tau
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 a_{12} = m - \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i}, \quad a_{22} = - \left(l + \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)} \Omega_C^{(i)}}{C_i} \right) = b_{12} \\
 b_{22} = J - \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Omega_C^{(i)2}}{C_i}, \quad A_{12} = j\rho \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t) \frac{x_G^{(i)2}}{C_i}, \quad B_{10} = jA_{12} \\
 B_{12} = j\rho \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t) \frac{x_G^{(i)} \Omega_C^{(i)}}{C_i^2}, \quad b_{10} = -j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i} \\
 b_{20} = -j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)} \Omega_C^{(i)}}{C_i}, \quad A_{22} = j\rho \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t) \frac{x_G^{(i)}}{C_i} \left(\frac{\Omega_C^{(i)}}{C_i} - x_G^{(i)} \right) \\
 B_{22} = j\rho \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t) \frac{\Omega_C^{(i)}}{C_i} \left(\frac{\Omega_C^{(i)}}{C_i} - x_G^{(i)} \right), \quad f_1(t) = j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)}}{C_i} (\xi^{(i)} y_i + \chi^{(i)} z_i) \\
 B_{20} = jA_{22}, \quad f_2(t) = j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\Omega_C^{(i)}}{C_i} - x_G^{(i)} \right) (\xi^{(i)} y_i + \chi^{(i)} z_i)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что системы интегро-дифференциальных уравнений (4.10) может быть преобразована при учете начальных условий движения сосуда $(x_0, \dot{x}_0, \varepsilon_0, \dot{\varepsilon}_0)$ к некоторой конечной системе интегральных уравнений типа Вольтерра, которая, в свою очередь, может быть в общем виде представлена следующим образом:

$$y_k = \varphi_k(t) + \sum_{s=1}^m \int_{t_0}^t K_s(t\tau) y_s d\tau \quad (k=1, \dots, m) \quad (4.12)$$

Итак, показано, что решение бесконечной системы дифференциальных уравнений (4.1) сводится к решению однородных линейных уравнений второго порядка (4.2) с последующим решением системы интегральных уравнений (4.12). При этом мы предположили сходимость числовых рядов и равномерную сходимость функциональных рядов в выражениях (4.11). Таким образом, если это предположение окажется оправданным, то в силу теоремы существования и единственности решения уравнений (4.12) (при ограниченности величин $|\varphi_k(t)|$ и $|K_s(t\tau)|$) мы убеждаемся в существовании и единственности решения бесконечной системы дифференциальных уравнений (4.1). Докажем равномерную сходимость рядов в выражениях (4.11) на любом ограниченном интервале времени t .

Отсюда будет следовать как ограниченность $|\varphi_k(t)|$ $|K_s(t\tau)|$ в (4.12), так и возможность внесения знака суммирования под знаки интегралов в уравнениях (4.9). Для этой цели сформулируем следующую теорему.

Теорема. Векторные функции $\text{grad } f_i(x_1, x_2)$, где $f_i(x_1, x_2)$ являются собственными функциями краевой задачи (1.2), взаимно ортогональны на области G .

Доказательство. Используя формулу Грина и граничное условие краевой задачи (1.2), получим

$$\iint_G \text{grad } f_k \text{ grad } f_m dG = - \iint_G f_k \Delta f_m dG$$

Но из (1.2) имеем $\Delta f_m = -\lambda_m^2 f_m$. Отсюда, учтя ортогональность собственных функций, получаем нужное нам доказательство:

$$\iint_G \text{grad } f_k \text{ grad } f_m dG = \lambda_m^2 \iint_G f_k f_m dG \quad (k \neq m) \quad (4.13)$$

Теперь приступим к доказательству равномерной сходимости на любом ограниченном интервале времени t функциональных рядов, стоящих в выражениях (4.1). Рассмотрим ряд, стоящий в выражении A_{12} :

$$\sum_{i=1}^{\infty} K_i(t\tau) \frac{x_G^{(i)2}}{C_i^2} \quad (4.14)$$

Из равенства (4.7) очевидно, что на любом ограниченном отрезке времени для этого ряда можно построить мажорантный ряд:

$$2M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)}}{C_i^2}$$

Рассмотрим сходимость ряда:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)}}{C_i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{th}^2 \lambda_i h}{\lambda_i^2} \left(\iint_G x \lambda_i^2 f_i dG \right)^2$$

Очевидно, что все члены этого ряда положительны. Заметим также что $\text{th } \lambda_i h < 1$. Используя формулу Грина и граничное условие для функции f_i , преобразуем интеграл, находящийся в скобках:

$$\iint_G x \lambda_i^2 f_i dG = - \iint_G x \Delta f_i dG = \iint_G \text{grad } x \text{ grad } f_i dG$$

Используя это преобразование, можно составить неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i^2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left(\iint_G \text{grad } x \text{ grad } f_i dG \right)^2$$

Выше показана ортогональность функций $\text{grad } f_i$ на G ; это позволяет составить неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left(\iint_G \text{grad } x \text{ grad } f_i dG \right)^2 \leq \iint_G (\text{grad } x)^2 dG = G$$

Последнее доказывает ограниченность суммы мажорантного ряда и, следовательно, равномерную сходимость ряда (4.14).

Рассмотрим ряд, стоящий в выражении B_{12} :

$$\sum_{i=1}^{\infty} K_i(t\tau) \frac{x_G^{(i)} \Omega_G^{(i)}}{C_i^{(2)}} \tag{4.15}$$

Доказательство равномерной сходимости этого ряда аналогично проведенному для ряда (4.14) и сводится к доказательству сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left(\iint_G \text{grad } x \text{ grad } f_i dC \right) \left(\iint_G \text{grad } \Omega_c \text{ grad } f_i dG \right) \tag{4.16}$$

Защипем неравенство Бесселя:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left[\iint_G (\text{grad } x + \text{grad } \Omega_c) \text{ grad } f_i dG \right]^2 \leq \iint_G (\text{grad } x + \text{grad } \Omega_c)^2 dG$$

Левую часть этого неравенства можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left(\iint_G \text{grad } x \text{ grad } f_i dG \right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left(\iint_G \text{grad } \Omega_c \text{ grad } f_i dG \right)^2 + \\ & + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left(\iint_G \text{grad } x \text{ grad } f_i dG \right) \left(\iint_G \text{grad } \Omega_c \text{ grad } f_i dG \right) \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что сумма ряда (4.16) меньше

$$\frac{1}{2} \iint_G (\text{grad } x + \text{grad } \Omega_c)^2 dG,$$

что и доказывает равномерную сходимость ряда (4.15).

Аналогично доказывается равномерная сходимость всех остальных рядов, входящих в выражения (4.11).

Перейдем к обоснованию возможности применения метода редукции для решения бесконечной системы дифференциальных уравнений (4.1).

Вместо бесконечной системы уравнений (4.1) будем рассматривать некоторую конечную систему уравнений с n неизвестными параметрами $a_i(t)$, получающуюся из (4.1), если в ней положить $a_i(t) = 0$ для $i > n$.

Запишем эту систему уравнений:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - l\ddot{\varepsilon} &= \sum_j P_j - \rho \sum_{i=1}^n \ddot{a}_i x_G^{(i)} & (i=1, \dots, n) \\ J\ddot{\varepsilon} - l\ddot{x} &= \sum_j M_j - \rho \sum_{i=1}^n (\ddot{a}_i \Omega_c^{(i)} + a_i j x_G^{(i)}) & (4.17) \\ \ddot{a}_i + \omega_i^2 a_i &= -\frac{1}{C_i} (x_G^{(i)} \ddot{x} + \Omega_c^{(i)} \ddot{\varepsilon} + j x_G^{(i)} \varepsilon) \end{aligned}$$

В качестве начальных условий для неизвестных функций системы (4.17) примем соответствующие начальные условия неизвестных системы уравнений (4.1), считая начальные условия для параметров a_i при $i > n$ равными нулю.

Сущность метода редукции заключается в отыскании решения бесконечной системы уравнений (4.1) при помощи процесса последовательных приближений к решению системы (4.1) решениями конечных систем уравнений типа (4.17) со все возрастающим числом n параметров свободной поверхности $a_i(t)$.

Докажем, что на любом ограниченном интервале времени решения систем уравнений (4.17) при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходятся к решению бесконечной системы уравнений (4.1).

Совершенно очевидно, что при каждом заданном наперед числе n решение системы уравнений (4.17) может быть сведено к интегрированию n линейных однородных уравнений второго порядка типа (4.2) с последующим решением системы интегральных уравнений вида:

$$y_n^{[n]} = \varphi_k^{[n]}(t) + \sum_{s=1}^m \int_{t_0}^t K_s^{[n]}(t\tau) y_s^{[n]} d\tau \quad (k=1, \dots, m) \quad (4.18)$$

Уравнения (4.18) подобны уравнениям (4.12). Если мы докажем, что решения системы (4.18) при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходятся к решению системы (4.12), то отсюда будет следовать аналогичное утверждение относительно решений систем (4.17) и (4.1).

Для этой цели рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\Delta y_k^{[n]} = \Delta \psi_k^{[n]}(t) + \sum_{s=1}^m \int_{t_0}^t K_s^{[n]}(t\tau) \Delta y_s^{[n]} d\tau \quad (k=1, \dots, m) \quad (4.19)$$

Теорема. Если на любом ограниченном отрезке переменной t ядра уравнений (4.19) ограничены по абсолютной величине, то решения уравнений в этом интервале будут столь угодно малыми по абсолютной величине, коль скоро абсолютные величины $\Delta \psi_k^{[n]}(t)$ достаточно малы.

Доказательство этой теоремы опускаем; оно может быть легко проведено на основе последовательной итерации решения и составления соответствующих оценок. Далее обозначим

$$\Delta y_k^{[n]} = y_k - y_k^{[n]}, \quad \Delta K_s^{[n]}(t\tau) = K_s(t\tau) - K_s^{[n]}(t\tau)$$

$$\Delta \psi_k^{[n]}(t) = \varphi_k(t) - \varphi_k^{[n]}(t) + \sum_{s=1}^m \int_{t_0}^t \Delta K_s^{[n]}(t\tau) y_s d\tau$$

В силу доказанной выше равномерной сходимости рядов в выражениях (4.11) можно утверждать следующее.

1. На любом ограниченном отрезке времени t

$$\lim |K_s^{[n]}(t\tau)| = 0, \quad \lim |\Delta\psi_k^{[n]}(t)| = 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

2. Независимо от значения n существует на ограниченном интервале времени t верхняя граница для $|K_s^{[n]}(t\tau)|$, т. е.

$$|K_s^{[n]}(t\tau)| < M$$

Отсюда следует, что, поскольку при достаточно большом значении числа n величины всех $|\Delta\psi_k^{[n]}|$ могут быть ограничены сколь угодно малым числом при ограниченности величин $|K_s^{[n]}(t\tau)|$ независимо от числа n , то в силу высказанной выше теоремы $y_k = \lim y_k^{[n]}$ при $n \rightarrow \infty$ на ограниченном отрезке времени t , т. е. решения уравнений (4.19) равномерно сходятся к решениям уравнений (4.12), что доказывает возможность применения метода редукции для решения уравнений (3.13).

§ 5. Случай $j = \text{const}$. Некоторые примеры. При $j = \text{const}$ имеем

$$y_i = \cos \omega_i(t - t_0), \quad z_i = \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i(t - t_0)$$

Интегро-дифференциальные уравнения (4.10) имеют ядра, зависящие только от разности аргументов, так как в этом случае

$$K_i(t\tau) = -\frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i(t - \tau)$$

и поэтому для их решения с успехом может быть применено преобразование Лапласа или Карсона с последующей операцией свертывания изображающих функций. Рассмотрим некоторые примеры.

А. Задача Л. Н. Сретенского. Положим, что тело с полостью цилиндрической формы может совершать лишь поступательные движения вдоль оси $O^*x_2^*$, находясь под действием сил упругости некоторых пружин, работающих согласно закону Гука и расположенных в направлении оси $O^*x_2^*$. Аналогичная задача была решена Л. Н. Сретенским для случая полости в виде прямоугольного параллелепипеда [6].

В настоящем параграфе мы будем рассматривать эту задачу для общего случая цилиндрической формы полости, используя изложенную выше схему решения задачи.

Уравнения (4.12) в этом случае примут вид:

$$m\ddot{x} + cx = -\rho \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{a}_i x_G^{(i)}, \quad \ddot{a}_i + \omega_i^2 a_i = -\frac{1}{C_i} x_G^{(i)} \ddot{x} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Используя начальные условия задачи, приведем ее решение к решению интегро-дифференциальных уравнений типа (4.10). В этом случае мы получим лишь одно уравнение следующего вида:

$$\left(m - \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i}\right) \ddot{x} + cx = j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)}}{C_i} \left(\xi^{(i)} \cos \omega_i t + \chi^{(i)} \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t\right) - \rho \int_0^t \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2} \omega_i}{C_i} \sin \omega_i(t - \tau)\right) \ddot{x} d\tau \quad (5.1)$$

Составим изображающее уравнение для уравнения (5.1). При этом будем обозначать

$$F(p) \doteq x(t), \quad \text{если } F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt$$

Используя известные соотношения операционного исчисления [7], а также применяя теорему свертывания, изображающее уравнение можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & p^2 \left(m - \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i} \right) \left[F(p) - x_0 - \frac{1}{p} \dot{x}_0 \right] + cF(p) = \\ & = j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)}}{C_i} (\zeta^{(i)} p + \chi^{(i)}) \frac{p}{p^2 + \omega_i^2} - \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i^2 x_G^{(i)2}}{C_i} \left[F(p) - x_0 - \frac{1}{p} \dot{x}_0 \right] \frac{p}{p^2 + \omega_i^2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Из уравнения (5.2) получаем следующее выражение для изображения искомой функции:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \left(mp^2 - \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i} \frac{p^4}{p^2 + \omega_i^2} \right) \left(x_0 + \frac{1}{p} \dot{x}_0 \right) + j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)}}{C_i} (\zeta^{(i)} p + \chi^{(i)}) \frac{p}{p^2 + \omega_i^2} \\ F_2(p) &= mp^2 + C - \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i} \frac{p^4}{p^2 + \omega_i^2} \end{aligned}$$

Функция $F(p)$, очевидно, мероморфна. Запишем разложение ее в ряд по простейшим дробям:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} \frac{p}{p - p_k} \quad (5.3)$$

где p_k ($k = 1, 2, \dots$) корни уравнения $F_2(p) = 0$. Далее находим начальную функцию $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t} \quad (5.4)$$

Формула (5.4) полностью решает поставленную задачу, коль скоро будут определены корни уравнения $F_2(p) = 0$.

Рассмотрим это уравнение, представив его в виде

$$\frac{mp^2 + C}{p^4} = \frac{\rho}{j} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{1 + (C_i/j)p^2} \quad \text{или} \quad \frac{C - m\lambda}{\lambda^2} = \frac{\rho}{j} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{1 - \lambda/\omega_i^2} \quad (\lambda = -p^2)$$

Уравнение (5.5), будучи аналогичным уравнению, полученному Л. Н. Сретенским для случая полости в виде прямоугольного параллелепипеда, дает решение задачи для полостей произвольной цилиндрической формы.

Исследуем корни уравнения (5.5). Для этого рассмотрим две линии в плоскости $y\lambda$, определяемые уравнениями

$$y_1 = \frac{C - m\lambda}{\lambda^2}, \quad y_2 = \frac{\rho}{j} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{1 - \lambda/\omega_i^2} \quad (5.6)$$

Вид этих двух кривых изображен на фиг. 3. Абсциссы точек пересечения кривых $y_1(\lambda)$ и $y_2(\lambda)$, очевидно, и будут корнями уравнения (5.5).

Покажем, что не существует ни одного отрицательного корня уравнения (5.5). Это значит, что числа p_k в выражении (5.4) все чисто мнимые. Рассмотрим левую часть уравнения. При $\lambda \leq 0$, поскольку $C > 0$, имеем

$$y_1 = \frac{C - m\lambda}{\lambda^2} > -\frac{m}{\lambda} \quad (5.7)$$

Аналогично для правой части уравнения (5.5) при $\lambda \leq 0$

$$y_2 = \frac{\rho}{j} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{1 - (C_i/j)\lambda} < -\frac{\rho}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i}$$

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i}$$

Заменяя величины $x_G^{(i)}$, C_i , входящие в члены этого ряда, соответствующими выражениями и используя неравенство $\text{th } \lambda_i h < \lambda_i h$, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)2}}{C_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\iint_G x f_i dG \right)^2 \lambda_i \text{th } \lambda_i h < h \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \left(\iint_G x f_i dG \right)^2$$

Производя преобразования, аналогичные тем, которые проводились в предыдущем параграфе, и используя неравенство Бесселя для ортогональных на области G векторных функций $\text{grad } f_i$, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \left(\iint_G x f_i dG \right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left(\iint_G \text{grad } x \text{ grad } f_i dG \right)^2 \leq \iint_G (\text{grad } x)^2 dG = G$$

Отсюда имеем

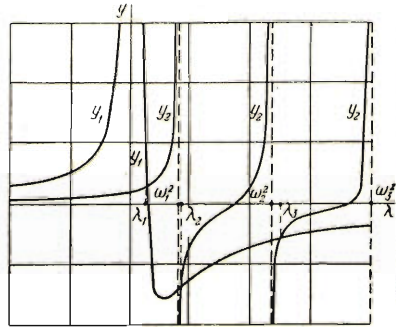
$$y_2 < -\frac{\rho h G}{\lambda} = -\frac{m_1}{\lambda} < -\frac{m}{\lambda} \quad (5.8)$$

где $m_1 = \rho h G$ — масса жидкости.

Сопоставляя неравенства (5.7) и (5.8), получим $y_1 > y_2$ при $\lambda \leq 0$, т. е. уравнение (5.5) не может быть удовлетворено ни при какой отрицательной величине λ .

В. Задача о маятнике с жидким наполнением. Рассмотрим плоское движение тела с цилиндрической полостью, заполненной жидкостью, около неподвижной точки. Неподвижную точку примем за точку O , начала связанной системы координат. Тогда первое уравнение системы (4.1) исключается из рассмотрения.

Положим, что центр тяжести системы при невозмущенном состоянии свободной поверхности жидкости находится ниже точки подвески O на расстоянии l_c .



Фиг. 3

Тогда, если никакие другие силы, кроме земного тяготения, на систему не действуют, получим

$$\sum_j M_j = -jml_c \varepsilon = -jl\varepsilon \quad (l = m, \dots)$$

Уравнения (4.1) примут вид:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varepsilon} + jl\varepsilon &= -\rho \sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{a}_i \Omega_c^{(i)} + a_i jx_G^{(i)}) \quad (i = 1, 2, \dots) \\ \ddot{a}_i + \omega_i^2 a_i &= -\frac{1}{C_i} (\Omega_c^{(i)''} \varepsilon + jx_G^{(i)} \varepsilon) \end{aligned}$$

Опуская выкладки, аналогичные проведенным выше, получаем

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t} \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \left[J - \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Omega_c^{(i)2} p^2}{C_i (p^2 + \omega_i^2)} - \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_G^{(i)} \Omega_c^{(i)} \omega_i^2}{p^2 + \omega_i^2} \right] (\varepsilon_0 p^2 + \dot{\varepsilon}_0 p) + \\ &+ j\rho \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\Omega_c^{(i)}}{C_i} + x_G^{(i)} \right) (\tau^{(i)} p + \chi^{(i)}) \frac{p}{p^2 + \omega_i^2} \\ F_2(p) &= Jp^2 + jl - \frac{\rho}{j} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\Omega_c^{(i)} p^2 + jx_G^{(i)})^2 \omega_i^2}{p^2 + \omega_i^2} \end{aligned}$$

при этом p_k ($k = 1, 2, \dots$) — корни уравнения $F_2(p) = 0$.

Рассмотрим характер корней уравнения $F_2(p) = 0$. С этой целью, положив $p^2 = -\lambda$, запишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{j l - J \lambda}{\lambda^2} = \frac{\rho}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\Omega_c^{(i)} - \lambda^{-1} j x_G^{(i)})^2}{1 - (C_i / j) \lambda} \quad (5.10)$$

Рассмотрим две кривые линии в плоскости y, λ , определяемые уравнениями

$$y_1 = \frac{j l - J \lambda}{\lambda^2}, \quad y_2 = \frac{\rho}{j} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\Omega_c^{(i)} - \lambda^{-1} j x_G^{(i)})^2}{1 - (C_i / j) \lambda} \quad (5.11)$$

Вид этих кривых изображен на фиг. 4 и 5.

Выясним условия, при которых рассматриваемая система обладает неустойчивостью.

Покажем, что при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных λ величина y_2 меньше величины y_1 . Действительно, при достаточно больших отрицательных значениях λ выражения (5.11) могут быть заменены следующими приближенными формулами:

$$y_1 = -\frac{J}{\lambda}, \quad y_2 = -\frac{\rho}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Omega_c^{(i)2}}{C_i}$$

Рассмотрим выражения, стоящие в числителе и знаменателе членов ряда при y_2 .

Используя гармонические функции A_i , определяемые условиями (3.11), а также пользуясь формулой Грина, преобразуем эти выражения следующим образом:

$$\Omega_c^{(i)} = \iint_G \Omega_c f_i dG = \iint_S \Omega \frac{\partial A_i}{\partial n} dS = \int_{\tau} \text{grad } \Omega \text{ grad } A_i d\tau$$

$$C_i = \iint_G C_i f_i^2 dG = \iint_G A_i f_i dG = \iint_S A_i \frac{\partial A_i}{\partial n} dS = \int_{\tau} (\text{grad } A_i)^2 d\tau$$

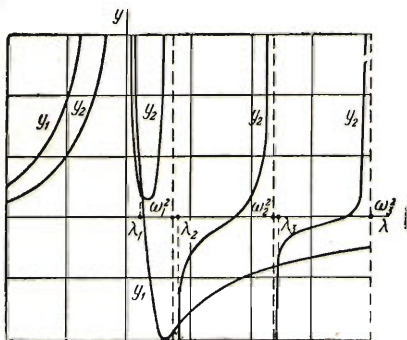
Следующие равенства доказывают, что векторные функции $\text{grad } A_i$ ($i = 1, 2, \dots$) взаимно ортогональны в области τ :

$$\int_{\tau} \text{grad } A_i \text{ grad } A_k d\tau = \iint_S A_i \frac{\partial A_k}{\partial n} dS = \iint_G A_i f_k dG = C_i \iint_G f_i f_k dG$$

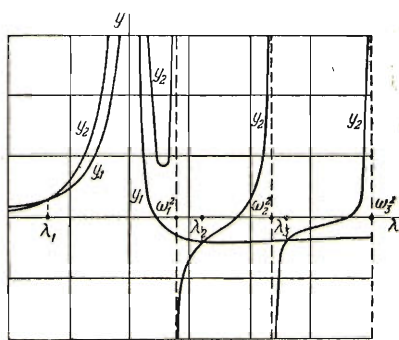
Отсюда, используя неравенство Бесселя, получаем следующую оценку величины y_2 :

$$y_2 = -\frac{\rho}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\int_{\tau} \text{grad } \Omega \text{ grad } A_i d\tau \right)^2}{\int_{\tau} (\text{grad } A_i)^2 d\tau} \leq -\frac{1}{\lambda} \int_{\tau} \rho (\text{grad } \Omega)^2 d\tau = -\frac{J_1}{\lambda} < -\frac{J}{\lambda}$$

Это неравенство доказывает наше утверждение, что $y_2 < y_1$ при достаточно больших отрицательных λ .



Фиг. 4



Фиг. 5

Найдем условия, при которых в некоторой достаточно малой окрестности $\lambda = 0$ при $\lambda < 0$ будет выполнено обратное неравенство: $y_2 > y_1$.

В достаточно малой окрестности точки $\lambda = 0$ выражения (5.11) для y_1 и y_2 могут быть представлены следующими приближенными формулами:

$$y_1 = \frac{j l}{\lambda^2}, \quad y_2 = \frac{j}{\lambda^2} \rho \sum_{i=1}^{\infty} x_G^{(i)2} = \frac{j}{\lambda^2} \rho \iint_G x^2 dG = \frac{j}{\lambda^2} \rho I \quad (I = \iint_G x^2 dG)$$

где I — момент инерции плоской фигуры области G относительно оси, являющейся проекцией оси вращения твердого тела на область G .

Из этого выражения для y_2 мы можем сделать вывод, что $y_2 > y_1$ при отрицательных λ в окрестности $\lambda = 0$, если $\rho I > l$.

В этом случае маятник с жидким заполнением будет заведомо неустойчив, хотя $l > 0$, т. е. хотя центр тяжести системы при невозмущенном состоянии свободной поверхности будет лежать ниже точки подвески.

Таким образом, если для устойчивости твердого маятника необходимо выполнить лишь условие $l > 0$, то для устойчивости равновесного положения маятника с жидким заполнением, имеющим свободную поверхность, должно быть выполнено более жесткое условие $l > I\rho > 0$, являющееся в этом случае необходимым условием устойчивости. Фиг. 4 иллюстрирует кривые $y_1(\lambda)$, $y_2(\lambda)$ и расположение корней уравнения (5.10) в случае устойчивого положения маятника. На фиг. 5 представлен случай неустойчивого положения маятника.

Поступила 25 VIII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. Движение тела, имеющего полости, частично заполненные идеальной каплевой жидкостью. ДАН СССР, т. 85, № 4, 1952.
2. Моисеев Н. Н. О двух маятниках с жидкостью. ПММ, № 6, 1952.
3. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободные поверхности. Матем. сборник, 32(74), № 1, Изд. АН СССР, 1953.
4. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной каплевой жидкостью. Собр. соч. т. II. Гос. изд. техн.-теор. лит., 1949.
5. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям. Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950.
6. Сретенский Л. Н. Колебания жидкости в подвижном сосуде. Изв. АН СССР, ОТН, № 10, 1951.
7. Лурье А. И. Операционное исчисление. Гос. изд. техн.-теор. лит. 1950.