ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНФИГУРАЦИИ ОБЛАСТИ ВОЗМОЖНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Б. Найшуль и В. А. Светлицкий

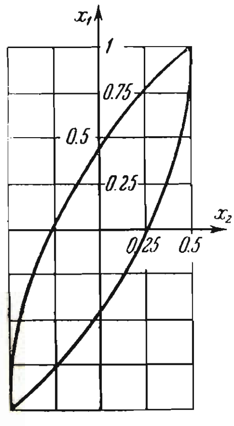
(Москва)

1. Рассмотрим определение области возможных значений решений системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(t)\, x_j + b_i(t) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

в момент t, если известны начальная область возможных значений в момент $t=0$ и наложенные на функции $b_i(t)$ ограничения.

В зависимости от того, как заданы функции $b_i(t)$ и область начальных отклонений, могут быть два пути решения этой задачи. В первом случае, если нам известны вероятностные характеристики, получаются законы распределения возможных значений параметров. К сожалению, этот путь решения требует знания вероятностных характеристик возмущений, определение которых часто гораздо сложнее, чем само решение сформулированной задачи. Во втором случае для заданной области изменения функций $b_i(t)$ и начальных значений x_{j0} можно определить область значений $x_i(t)$ для данного t. В упрощенной постановке эта задача рассматривалась Б. В. Булгаковым для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и Б. В. Булгаковым и Н. Т. Кузовковым для систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при нулевых начальных данных. Метод, предложенный Б. В. Булгаковым и Н. Т. Кузовковым, дает возможность определить максимальные значения для всех функций $x_i(t)$ для данного t и получить n-мерный параллелепипед, заключающий в себе все возможные значения отклонений. Найденная таким образом область отклонений может сильно отличаться от истинной области и даст лишь ее грубую оценку. Для пояснения сказанного разберем пример.



Фиг. 1

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = y, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 \tag{1.2}$$

Функция F может принимать любые значения внутри полосы, ограниченной прямыми $y = \mp F$. Начальные данные равны нулю. Область возможных значений x_1 и x_2 при $t=T$ в этом случае ограничивается кривыми, заданными в параметрическом виде:

$$x_1(\xi) = |F|\, T\,(2\xi - 1), \qquad x_2(\xi) = |F|\, T^2\left(2\xi - \frac{1}{2} - \xi^2\right) \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant 1) \tag{1.3}$$

При $|F| = T = 1$ эта область изображена на фиг. 1; откуда видно, что истинная область занимает часть площади области, построенной на максимальных значениях x_1 и x_2.

2. Будем предполагать, что функции $b_i(t)$ линейно зависят от возмущений:

$$b_i(t) = \sum_{\beta=1}^{\rho} \left[G_{i\beta}(t)\, u_\beta(t) + H_{i\beta}(t)\, s_\beta\right] \tag{2.1}$$

где $u_\beta(t)$ — функция, заданная в полосе с верхней $u_\beta^{(1)}(t)$ и нижней $u_\beta^{(2)}(t)$ границами соответственно, $G_{i\beta}(t)$, $H_{i\beta}(t)$ — заданные функции, s_β — параметр, который может принимать любое значение в промежутке $s_{\beta\,\min} \leqslant s_\beta \leqslant s_{\beta\,\max}$.

Будем предполагать, что для системы (1.1) имеет место теорема существования и единственности решения. Тогда решение этой системы можно записать в виде:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} R_{ij}(t)\, x_{j0} + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t K_{ij}(t, \tau)\, b_j(\tau)\, d\tau \tag{2.2}$$

где $K_{ij}(t,\tau)$ — функции Грина, x_{j0} — начальные отклонения, заданные в виде области возможных значений в момент времени $t=0$, $R_{ij}(t)$ — элементы фундаментальной матрицы решений системы однородных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие условию $R_{ij}(0)=0$ при $i\neq j$, $R_{ij}(0)=1$ при $i=j$.

Функции Грина могут быть вычислены по формуле

$$K_{ij}(t,\tau)=\sum_{m=1}^{n} R_{im}(t)\,R_{mj}^{-1}(\tau)$$

где $R_{mj}^{-1}(\tau)$ — элементы матрицы, обратной фундаментальной.

Элементы фундаментальной матрицы могут быть вычислены в конечном виде или получены численным интегрированием.

Решение системы (1.1), представляемое формулой (2.2), можно рассматривать как компоненты n-мерного вектора $\mathbf{x}$, отложенные от начала координат. Все точки n-мерного пространства разобьем на два множества: множество точек, достигаемых концом вектора $\mathbf{x}$ при всевозможных изменениях возмущений, и множество точек, которые концом вектора $\mathbf{x}$ не могут быть достигнуты.

Граница между этими множествами охватывает интересующую нас область. Предположим, что нам известны максимальные значения проекций вектора $\mathbf{x}$ на единичные векторы ξ, получающиеся в результате вращения вектора ξ_0 относительно начала координат. Проводя из концов этих проекций перпендикулярно к ним гиперплоскости, получим некоторую область, заключенную внутри плоскостей. Искомая поверхность будет касаться этих плоскостей. Так как единичный вектор ξ зависит от $n-1$ параметров, то мы получаем $n-1$ параметрическое семейство гиперплоскостей.

Искомая область будет огибающей этого семейства.

Определив максимальные значения проекции вектора $\mathbf{x}$ для каждого направления вектора ξ, можно затем перейти к построению поверхности. Подставив (2.2) в выражение проекции x_ξ вектора $\mathbf{x}$ на направление, определяемое единичным вектором ξ с компонентами $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, получим $x_\xi=(\mathbf{x},\xi)$ или

$$x_\xi=\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} R_{ij}(t)\,\xi_i\right]x_{j0}+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\left[\sum_{i=1}^{n} K_{ij}(t,\tau)\,\xi_i\right]\left[\sum_{\beta=1}^{\rho}(G_{j\beta}(\tau)\,u_\beta(\tau)+\right.$$

$$\left.+H_{j\beta}(\tau)\,s_\beta)\right]d\tau=\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\,x_{j0}+\sum_{\beta=1}^{\rho}\int_0^t q_\beta(t,\tau)\,u_\beta(\tau)\,d\tau+\sum_{\beta=1}^{\rho} V_\beta\, s_\beta \qquad (2.3)$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} R_{ij}(t)\,\xi_i=r_j(t) \qquad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} K_{ij}(t,\tau)\,G_{j\beta}(\tau)\right]\xi_i=q_\beta(t,\tau),\qquad \sum_{i=1}^{n}\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{n} K_{ij}(t,\tau)\,H_{j\beta}(\tau)\right]\xi_i\,d\tau=V_\beta \qquad (2.5)$$

Выберем значения x_{j0} из заданной области, закон изменения $u_\beta(\tau)$ и значения s_β, чтобы выражение (2.3) было максимальным. Определим максимальное значение каждой из сумм, входящих в правую часть выражения (2.3). Для определения максимального значения первой суммы при выполнении условия $f(x_{10},\ldots,x_{n0})=0$, т. е. при условии, что x_{j0} должны удовлетворять уравнению поверхности, охватывающей область начальных отклонений, при помощи множителей Лагранжа получим задачу об определении максимума выражения

$$J=\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\,x_{j0}-\lambda f(x_{10},\ldots,x_{n0}) \qquad (2.6)$$

без дополнительных условий.

Для определения x_{j0}, при которых J достигает максимума, получим систему уравнений

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x_{j0}}=r_j(t)\qquad (j=1,\ldots,n),\qquad f(x_{10},\ldots,x_{n0})=0 \qquad (2.7)$$

В случае, если область начальных отклонений задана своими максимальными и минимальными значениями $x_{j0\,\min} \leqslant x_{j0} \leqslant x_{j0\,\max}$, то принимаем максимальное значение $x_{j0\,\max}$, если $r_j(t) > 0$, и минимальное $x_{j0\,\min}$, если $r_j(t) < 0$.

Максимальное значение второй суммы можно получить, беря $u_\beta(\tau)$ по верхней границе полосы в тех интервалах изменения τ, где $q_\beta(t, \tau)$ положительно, и по нижней границе, где $q_\beta(t, \tau)$ отрицательно. Для этого найдем те $\tau_{\beta\nu}$, где $q_\beta(t, \tau)$ меняет знак. Индекс ν может принимать значение $\nu = 1, \ldots, \varkappa$. Для определения $\tau_{\beta\nu}$ имеем условия $q_\beta(t, \tau) = 0$. Зная $\tau_{\beta\nu}$, определим закон изменения $u_\beta(\tau)$.

Максимальное значение третьей суммы получим, приняв s_β равным максимальному значению $s_{\beta\,\max}$, если знак выражения (2.5) для V_β положительный, и равным минимальному значению $s_{\beta\,\min}$, если знак V_β отрицательный.

Таким образом, для каждого направления ξ определяются такие величины x_{j0}, коэффициенты s_β и функции $u_\beta(\tau)$, что проекция вектора $\mathbf{x}$ на это направление максимальна. Зная эти величины, по формуле (2.3) определим проекцию $\mathbf{x}$ на направление ξ. Компоненты вектора $\mathbf{x}$ находим по формуле

$$x_i = \sum_{j=0}^{n} R_{ij}(t) x_{j0} + \sum_{\beta=1}^{\rho} \int_0^t Q_{i\beta}(t, \tau) u_\beta(\tau)\, d\tau + \sum_{\beta=1}^{\rho} V_{i\beta} s_\beta \tag{2.8}$$

где

$$Q_{i\beta}(t, \tau) = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}(t, \tau) G_{j\beta}(\tau), \qquad V_{i\beta} = \int_0^t \sum_{j=1}^{n} K_{ij}(t, \tau) H_{j\beta}(\tau)\, d\tau \tag{2.9}$$

Величина интегралов в выражении (2.8) с учетом закона изменения функции $u_\beta(\tau)$ может быть вычислена через первообразные функции

$$F_{i\beta}^{(1)}(t) = \int_0^t Q_{i\beta}(t, \tau) u_\beta^{(1)}(\tau)\, d\tau, \qquad F_{i\beta}^{(2)}(t) = \int_0^t Q_{i\beta}(t, \tau) u_\beta^{(2)}(\tau)\, d\tau \tag{2.10}$$

где функция $u_\beta(\tau)$ берется соответственно по верхней и нижней границам полосы, в которой она задана. Предположим, что $u_\beta(\tau)$ имеют точки разрыва $\tau_{\beta\nu}$. Тогда

$$\int_0^t Q_{i\beta}(t, \tau) u_\beta(\tau)\, d\tau = F_{i\beta}^{(1)}(\tau_{\beta 1}) + [F_{i\beta}^{(2)}(\tau_{\beta 2}) - F_{i\beta}^{(2)}(\tau_{\beta 1})] + \cdots \tag{2.11}$$

если $q_\beta(t, \tau) \geqslant 0$ при $0 \leqslant \tau_\beta \leqslant \tau_{\beta 1}$, и

$$\int_0^t Q_{i\beta}(t, \tau) u_\beta(\tau)\, d\tau = F_{i\beta}^{(2)}(\tau_{\beta 1}) + [F_{i\beta}^{(1)}(\tau_{\beta 2}) - F_{i\beta}^{(1)}(\tau_{\beta 1})] + \cdots \tag{2.12}$$

если $q_\beta(t, \tau) \leqslant 0$ при $0 \leqslant \tau_\beta \leqslant \tau_{\beta 1}$.

3. Определение проекции области возможных отклонений на двумерную плоскость. В результате определения проекций вектора $\mathbf{x}$ для разных направлений можно построить область возможных отклонений. Выведем формулы для определения проекции области на произвольную плоскость, определяемую двумя взаимно перпендикулярными единичными векторами ω_1, ω_2, лежащими в ней.

Проекции вектора $\mathbf{x}$ на направления, определяемые векторами ω_1, ω_2, запишутся следующим образом:

$$x_{\omega_1} = (\mathbf{x}, \omega_1), \qquad x_{\omega_2} = (\mathbf{x}, \omega_2) \tag{3.1}$$

Проекция вектора $\mathbf{x}$ на направление $\alpha = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha$ запишется формулой

$$x_\alpha = (\mathbf{x}, \omega_1)\cos\alpha + (\mathbf{x}, \omega_2)\sin\alpha \tag{3.2}$$

или

$$x_\alpha = \sum_{j=1}^{n} (r_{1j}\cos\alpha + r_{2j}\sin\alpha) x_{j0} + \sum_{\beta=1}^{\rho} \int_0^t [q_{1\beta}(t, \tau)\cos\alpha + q_{2\beta}(t, \tau)\sin\alpha] u_\beta(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{\rho} [V_{1\beta}\cos\alpha + V_{2\beta}\sin\alpha] s_\beta \tag{3.3}$$

где

$$r_{1j}(t)=\sum_{i=1}^{n}R_{ij}(t)\,\omega_{1i},\qquad q_{1\beta}(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}Q_{i\beta}(t,\tau)\,\omega_{1i},\qquad V_{1\beta}=\sum_{i=1}^{n}V_{i\beta}(t)\,\omega_{1i}$$
$$r_{2j}(t)=\sum_{i=1}^{n}R_{ij}(t)\,\omega_{2i},\qquad q_{2\beta}(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}Q_{i\beta}(t,\tau)\,\omega_{2i},\qquad V_{2\beta}=\sum_{i=1}^{n}V_{i\beta}(t)\,\omega_{2i}\qquad(3.4)$$

В частном случае, когда ω_1, ω_2 совпадают с единичными векторами e_l и e_m координатных осей, получим

$$r_{1j}(t)=R_{lj}(t),\qquad q_{1\beta}(t,\tau)=Q_{l\beta}(t,\tau),\qquad V_{1\beta}=V_{l\beta}$$
$$r_{2j}(t)=R_{mj}(t),\qquad q_{2\beta}(t,\tau)=Q_{m\beta}(t,\tau),\qquad V_{2\beta}=V_{m\beta}\qquad(3.5)$$

Определим величины x_{j0}, s_β и функции $u_\beta(\tau)$. Величины x_{j0} определяются из системы уравнений

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x_{j0}}=r_{1j}(t)\cos\alpha+r_{2j}(t)\sin\alpha\qquad(3.6)$$

Функции $u_\beta(\tau)$ найдем из условия, при котором величина подинтегрального выражения в формуле (3.3) имеет максимальное значение. Для этого необходимо, чтобы $u_\beta(\tau)=u_\beta^{(1)}(\tau)$, если $[q_{1\beta}(t,\tau)\cos\alpha+q_{2\beta}(t,\tau)\sin\alpha]>0$, и $u_\beta(\tau)=u_\beta^{(2)}(\tau)$, если знак неравенства будет обратным. Величины коэффициентов s_β определяются из условия

$$s_\beta=s_{\beta\,\max},\quad \text{если}\ (V_{1\beta}\cos\alpha+V_{2\beta}\sin\alpha)>0$$
$$s_\beta=s_{\beta\,\min},\quad \text{если}\ (V_{1\beta}\cos\alpha+V_{2\beta}\sin\alpha)<0\qquad(3.7)$$

Определив величины x_{j0}, s_β и функции $u_\beta(\tau)$, найдем значения проекций векторах в направление ω_1 и ω_2 по формулам

$$x_{\omega_1}=\sum_{j=1}^{n}r_{1j}(t)\,x_{j0}+\sum_{\beta=1}^{\rho}\int_0^t q_{1\beta}(t,\tau)\,u_\beta(\tau)\,d\tau+\sum_{\beta=1}^{\rho}V_{1\beta}s_\beta$$
$$x_{\omega_2}=\sum_{j=1}^{n}r_{2j}(t)\,x_{j0}+\sum_{\beta=1}^{\rho}\int_0^t q_{2\beta}(t,\tau)\,u_\beta(\tau)\,d\tau+\sum_{\beta=1}^{\rho}V_{2\beta}s_\beta\qquad(3.8)$$

В результате определения x_{ω_1} и x_{ω_2} для разных α получим на плоскости замкнутую кривую. Область, содержащаяся внутри этой кривой, представляет собой проекцию пространственной области возможных отклонений на соответствующую плоскость.

Полученные таким образом проекции области возможных отклонений на двумерные плоскости дают возможность видеть, как складывается область от разных возмущающих причин, и судить о степени зависимости между проекциями вектора решений.

Поступила 28 VIII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. О накоплении возмущения в линейных колебательных системах с постоянными параметрами. ДАН АН СССР, т. LI, № 5, 1946.
2. Булгаков Б. В. и Кузовков Н. Т. Накопление возмущений в линейных колебательных системах с переменными параметрами. Научно-технический сборник НИИ МПСС, вып. 6, 1950.