ЕЩЕ РАЗ К ВОПРОСУ О ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИНОК

Ю. Р. Лепик

(Тарту)

Как известно, в настоящее время имеются две различные концепции о механизме потери устойчивости пластинок и стержней за пределом упругости. В более ранней постановке, связанной с работами Энгессера — Кармана, предполагается, что потеря устойчивости происходит при неизменяемых внешних силах и что зона разгрузки в пластинке возникает сразу, если только критическая нагрузка достигнута. В более поздней постановке, созданной главным образом работами Шенли[1], Работнова[2] и Пфлюгера[3], считается, что за пределом упругости гипотеза о неизменяемости внешних сил при потере устойчивости является необоснованной и что внешние силы могут уже при малых прогибах обладать значениями, несколько превосходящими критические. Из концепции Шенли — Работнова — Пфлюгера следует, что потеря устойчивости происходит при чисто-пластических деформациях; с изгибанием пластинки возникает и зона разгрузки, которая с увеличением прогибов постепенно распространяется по пластинке.

В настоящей работе рассматривается задача о цилиндрической форме потери устойчивости прямоугольной пластинки, достаточно длинной в одном направлении и равномерно сжатой в другом направлении; края пластинки будем считать свободно опертыми. Эта задача в постановке Энгессера — Кармана изучалась в работах А. А. Ильюшина[4] и С. М. Попова[5]; в данной заметке сделана попытка рассмотреть ту же задачу и в постановке Шенли — Работнова — Пфлюгера. Для простоты вычислений мы ограничиваемся случаем, когда можно предполагать пластические деформации перед потерей устойчивости малыми по сравнению с упругими, т. е. $\omega = 0$; материал пластинки будем считать несжимаемым, т. е. $\nu = 1/2$. Следует отметить, что эти ограничения не являются неизбежными; как вытекает из работы[6], поставленную задачу можно решать и при $\omega \neq 0$ или при $\nu \neq 1/2$.

Переходя к решению задачи, выбираем оси координат, как и в работах[4,5]; тогда

$$X_x^* = -1, \qquad X_y^* = Y_y^* = 0, \qquad \varkappa_1 = \varkappa_1(x), \qquad \varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$$

По условию задачи всякое поперечное сечение пластинки плоскостью $y = \text{const}$ остается плоским и после потери устойчивости, поэтому имеем $\varepsilon_2 = \text{const}$.

Так как $\delta S = 0$, то из уравнения равновесия $\partial \delta T_1 / \partial x + \partial \delta S / \partial y = 0$ следует, что $\delta T_1 = \text{const}$.

Основными уравнениями задачи являются следующие.

а) Уравнение устойчивости

$$\frac{d^2\,\delta M_1}{dx^2} + T_1 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \tag{1}$$

б) Соотношение, связывающее относительную толщину пластического слоя ζ с прогибом w и с вариациями усилий δT_1, δT_2:

$$1 - 2\zeta + \lambda\zeta^2 = \frac{2}{Eh^2}\left(\delta T_1 - \frac{1}{2}\,\delta T_2\right)\frac{1}{\varkappa_1} \tag{2}$$

в) Условия для того, что вдоль оси y никаких сил приложено не было:

$$\int\limits_{-1/2 l}^{+1/2 l} \delta T_2\, dx = 0 \tag{3}$$

Вариации усилий δT_1, δT_2 и вариацию момента δM_1, встречающиеся в формулах (1) — (3), определяем из следующих соотношений, полученных на основании теории малых упруго-пластических деформаций:

$$\frac{1}{Eh}\,\delta T_1 = \frac{4}{3}\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2\right) + \frac{h}{2}\,\lambda\zeta^2\,\frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\frac{1}{Eh}\,\delta T_2 = \frac{4}{3}\left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_1\right) \tag{4}$$

$$\frac{1}{D}\,\delta M_1 = -\left[1 - \frac{3}{4}\,\lambda\zeta^2(3-2\zeta)\right]\frac{d^2 w}{dx^2}$$

Следуя С. М. Попову [5], переходим к безразмерным величинам:

$$v = \frac{w}{h}, \qquad \eta = \frac{2x}{l}, \qquad \varepsilon_2^{*} = \frac{l^2}{4h^2}\,\varepsilon_2$$

$$\alpha^2 = -\frac{1}{D}\,T_1 l^2, \qquad \alpha_0^2 = -\frac{1}{D}\,T_{1c} l^2, \qquad \gamma = \frac{l^2}{4h^2}\,\frac{\delta T_1}{Eh} \tag{5}$$

Здесь символом T_{1c} обозначено критическое значение усилия T_1, при этом имеет место очевидное соотношение $T_1 = T_{1c} + T_1$, которое в безразмерных величинах имеет вид:

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 - 36\,\gamma \tag{6}$$

Исключая из уравнений (1)—(2) при помощи зависимости (4) величины δT_2, ε_1, δM_1 и переходя к безразмерным величинам (5), находим, что

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\left\{\left[1 - \frac{3}{4}\,\lambda\zeta^2(3-2\zeta)\right]\frac{d^2 v}{d\eta^2}\right\} + \frac{\alpha^2}{4}\,\frac{d^2 v}{d\eta^2} = 0$$

$$2\left(1 - 2\zeta + \frac{3}{4}\,\lambda\zeta^2\right)\frac{d^2 v}{d\eta^2} = 3\gamma - 2\varepsilon_2^{*} \tag{7}$$

Интегрируя первое уравнение из (7) два раза по η и введя обозначения

$$f(\zeta) = \frac{4 - 3\lambda\zeta^2(3-2\zeta)}{4 - 8\zeta + 3\lambda\zeta^2}, \qquad \vartheta(\zeta) = \frac{1}{4 - 8\zeta + 3\lambda\zeta^2} \tag{8}$$

окончательно получим

$$\alpha^2 v = C - 2\,(3\gamma - 2\varepsilon_2^{*})\,f(\zeta), \qquad \frac{d^2 v}{d\eta^2} = 2\vartheta(\zeta)\,(3\gamma - 2\varepsilon_2^{*}) \tag{9}$$

Докажем, что вся пластинка не может деформироваться упруго-пластически. Действительно, из уравнений (9) с учетом граничных условий $v = 0$, $d^2 v / d\eta^2 = 0$ при $\eta = 1$ явствует, что $C = 3\gamma - 2\varepsilon_2^{*} = 0$; следовательно, $v \equiv 0$ и выпученная форма пластинки невозможна. Отсюда и приходим к выводу, что области чисто-пластических деформаций должны возникнуть по крайней мере вблизи краев $\eta = \pm 1$.

Поставим теперь вопрос о том, может ли пластинка в целом деформироваться чисто-пластически. В случае чисто-пластических деформаций имеют место соотношения

$$\frac{1}{Eh}\left(\delta T_1 - \frac{1}{2}\,\delta T_2\right) = (1-\lambda)\,\varepsilon_1 \qquad \frac{1}{Eh}\left(\delta T_2 - \frac{1}{2}\,\delta T_1\right) = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\,\lambda\varepsilon_1$$

из которых вытекает, что

$$\frac{1}{Eh}\,\delta T_2 = \frac{8h^2}{l^2}\,\frac{2(1-\lambda)\,\varepsilon_2^{*} + \gamma}{4 - 3\lambda} = \text{const} \tag{10}$$

следовательно, условие (3) может быть удовлетворено только при $\delta T_2 \equiv 0$. Учитывая соотношения (5) и (10), можем требование $\delta T_2 \equiv 0$ переписать еще в виде

$$\gamma = -2\,(1-\lambda)\,\varepsilon_2^{*} \tag{11}$$

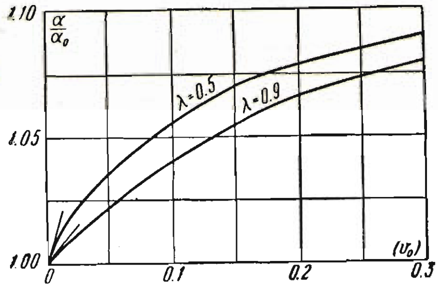
Из условия (11) следует, что чисто-пластические деформации в пластинке могут возникать только в двух следующих случаях:

а) если материал пластинки не обладает упрочнением; тогда $\lambda = 1$ и из (11) явствует, что $\gamma = 0$; следовательно, внешняя нагрузка не может превышать ее критическое значение и разница между концепциями Энгессера — Кармана и Шенли, Работнова и Пфлюгера отпадает (этот случай рассмотрен автором [6]).

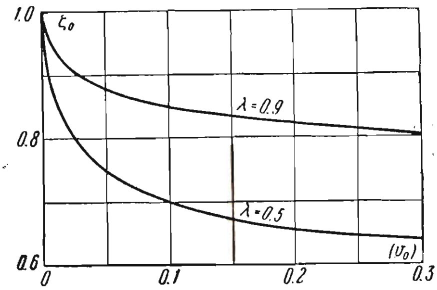
б) в случае, когда $\lambda \neq 1$, $\varepsilon_2^* = 0$; тогда в силу (6) и (11) имеем $\gamma = 0$, $\alpha = \alpha_0$ нетрудно показать, что $v \equiv 0$. Последнее условие не противоречит основному предположению концепции Шенли — Работнова — Пфлюгера, по которой потеря устойчивости происходит при чисто-пластических деформациях. Величину критического значения параметра нагрузки α_0 можно в этом случае вычислить из формулы

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{4 - 3\lambda} \tag{12}$$

Во всех остальных случаях чисто-пластическое состояние пластинки потерянной устойчивости невозможно и области чисто-пластических деформаций могут от края



Фиг. 1



Фиг. 2

пластинки $\eta = 1$ протянуться только до некоторого значения координаты $\eta = \eta_0$, при котором $\zeta = 1$. На границе упруго-пластической и чисто-пластической областей $\eta = \eta_0$ должны быть выполнены условия непрерывности для прогибов, углов наклона касательных плоскостей, изгибающих моментов и перерезывающих сил.

Приступаем к решению системы уравнений (9). Так как все дальнейшие вычисления почти не отличаются от соответствующих вычислений, проведенных С. М. Поповым в работе [5], то для того чтобы не пускаться в повторения, дадим здесь только окончательные результаты. Решая систему уравнений (9) при условии (3) и удовлетворяя условиям непрерывности в точке $\eta = \eta_0$, приходим к следующим соотношениям (символами ζ_0 и v_0 обозначены величины относительной толщины пластического слоя и относительного прогиба в центре пластинки):

$$\begin{gathered} \alpha\eta_0 = (4—3\lambda)\, A(\zeta_0, 1) — 8J_1(\zeta_0) + 6\lambda J_2(\zeta_0) \\ \alpha(1 - \eta_0) = \sqrt{4—3\lambda}\, \operatorname{arc\,cot}\left[\sqrt{4—3\lambda}\, A(\zeta_0, 1)\right] \\ \varepsilon_2^* = \frac{[\alpha + 6\lambda(J_1 - J_2)]\,\gamma}{2\,[2\lambda(J_1 - J_2)\,\alpha(1-\lambda)]}, \qquad |v_0| = \frac{2}{\alpha^2}(3\gamma - 2\varepsilon_2^*)\, f(\zeta_0) \end{gathered} \tag{13}$$

В этих формулах символами A, J_1, J_2 обозначены выражения

$$A(\zeta_0, \zeta) = \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)}$$

$$\Phi(\zeta) = 2\int \vartheta(\zeta)\, f'(\zeta)\, d\zeta = \frac{16—48\,\zeta + 48\,\zeta^2 —12\,\lambda\zeta^3}{(4—8\,\zeta + 3\,\lambda\zeta^2)^2} \tag{14}$$

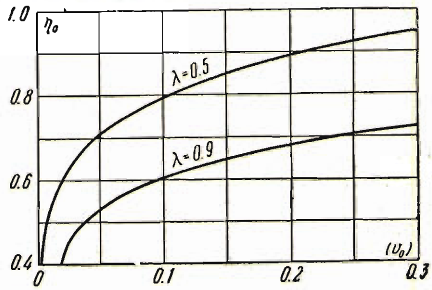
$$J_1(\zeta_0) = \int\limits_{\zeta_0}^{1} A(\zeta_0, \zeta)\, d\zeta, \qquad J_2(\zeta_0) = \int\limits_{\zeta_0}^{1} \zeta A(\zeta_0, \zeta)\, d\zeta$$

Для решения поставленной задачи нужно найти зависимость параметра нагрузки α от величины относительного прогиба v_0. При этом необходимые вычисления целесообразно провести в следующем порядке: придаем для величины ζ_0 некоторое значение и из двух первых уравнений системы (13) определяем величины α и η_0; вычисляя величину γ из формулы (6), определим из двух последних уравнений системы

(13) величины ε_2^* и $|v_0|$. Результаты вычисления при значениях $\lambda = 0.5$ и $\lambda = 0.9$ даны в виде графиков на фиг. 1—3. Для сравнения можно еще добавить, что вычисления, проведенные С. М. Поповым [5] на основании концепции Энгессера — Кармана, дали при $\lambda = 0.5$ значения $\alpha / \alpha_0 = 1.18$, $\zeta_0 = 0.575$, $\eta_0 = 0.965$, но если исходить из приближенной теории, созданной А. А. Ильюшиным в [4], то получаем, что при $\lambda = 0.5$ значения $\alpha / \alpha_0 = 1.11$, $\zeta_0 = 0.586$, а при $\lambda = 0.9$ значения $\alpha / \alpha_0 = 1.14$, $\zeta_0 = 0.760$.

При составлении графиков ($|v_0|$, α / α_0) полезно узнать и величину наклона касательной вблизи критической точки $\alpha = \alpha_0$. Для этого опять исходим из системы (13) и продифференцируем все зависимости по ζ_0; переходя к пределу $\zeta_0 \to 1$, в результате находим

$$\left[\frac{d\,(\alpha / \alpha_0)}{d\,|v_0|}\right]_{\zeta_0=1} = \frac{9\,(1-\lambda)}{4-3\lambda} \qquad (15)$$



Фиг. 3

Из полученной формулы следует, что наклон касательной к кривым ($|v_0|$, α / α_0) при всех значениях λ положителен; с возрастанием величины λ наклон касательной постепенно уменьшается и при значении $\lambda = 1$ обращается в нуль.

Рассмотрим, наконец, еще случай

$$\zeta_0 \to \zeta_1 = \frac{4}{3\lambda}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{4}\lambda}\right)$$

В этом случае

$$4 - 8\zeta + 3\lambda\zeta^2 \to 0, \qquad A(\zeta_0, 1) \to \infty$$

и, как следует из зависимости (13),

$$\eta_0 \to 1, \qquad |v_0| \to \infty.$$

Очевидно, такое беспредельное возрастание прогиба $|v_0|$ не имеет реального смысла; кроме того, отметим: 1) полученные в этой работе формулы выведены в предположении, что прогибы пластинки являются малыми величинами; 2) как следует из работы Я. Г. Пановко [7], с возрастанием прогибов в пластинке появляются зоны вторичных пластических деформаций, вследствие чего сопротивление пластинки к изгибу резко понижается.

Поступила 1 XI 1955

Тартуский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Shanley F. Inelastic Column Theory. Journal of Aeronautical Sciences, V. 14, Nr. 5, 1947.
2. Работнов Ю. Н. О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности. Инженерный сборник, том XI, 1952.
3. Pflüger A. Zur plastischen Knickung gerader Stäbe. Ingenier — Archiv, Band XX, Heft 5, 1952.
4. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
5. Попов С. М. О цилиндрической форме потери устойчивости пластинок за пределом упругости. ПММ, Том XIV, вып. 5, 1950.
6. Лепик Ю. Р. Дополнительные замечания о цилиндрической форме потери устойчивости пластинок за пределом упругости. ПММ, Том XV, вып. 1, 1951.
7. Пановко Я. Г. О критической силе сжатого стержня в неупругой области. Инженерный сборник, т. 20, 1954.