О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Н. А. Алумяэ

(Таллин)

Как известно, в линейной теории оболочек можно так определить второй тензор деформации, чтобы между статическими и геометрическими соотношениями существовала простая аналогия. В общем случае эта аналогия была впервые сформулирована А. Л. Гольденвейзером [1]. Позже А. Л. Гольденвейзер ввел несимметрический первый тензор деформации [2] для того, чтобы компоненты тензоров деформации были энергетическими компонентами деформации, с сохранением аналогии между статическими и геометрическими соотношениями.

Другой вариант основных соотношений линейной теории оболочек, где между статическими и геометрическими соотношениями имеется аналогия и компоненты деформации являются энергетическими, представлен в книге В. В. Новожилова [3], который одновременно с А. И. Лурье [4] ввел в теорию оболочек формальные симметрические тангенциальные усилия и моменты. Предложенный В. В. Новожиловым вариант имеет преимущество относительно выбора физических соотношений — с какой бы погрешностью ни были построены соотношения между симметрическими усилиями, моментами и симметричными компонентами деформации, они не будут противоречить недифференциальным статическому и геометрическому соотношениям по той простой причине, что в варианте В. В. Новожилова нет упомянутых недифференциальных соотношений.

Ниже приводится вариант основных соотношений нелинейной теории оболочек, аналогичный варианту В. В. Новожилова в линейной теории: вводятся формальные симметрические тензоры тангенциальных усилий и моментов, а также симметрические тензоры деформации так, что между статическими и геометрическими соотношениями существует довольно простая аналогия, а компоненты тензоров деформации являются энергетическими. Попутно получается обобщение варианта В. В. Новожилова для произвольной системы гауссовых координат в тензорной записи, а также приводятся основные соотношения для определения критического значения безмоментного начального напряженного состояния.

Приводимые в заметке основные соотношения не отличаются простотой; к тому же следует добавить, что если в линейной теории оболочек аналогия между геометрическими и статическими соотношениями позволяла А. Л. Гольденвейзеру сформулировать положение о двойственности однородных соотношений [1,2], то в нелинейной теории эта аналогия приводит, повидимому, только к сокращению труда при развертывании соотношений в тензорной записи.

1. Исходные основные соотношения. Отнесем срединную поверхность оболочки к гауссовым координатам u^1, u^2 и пусть будут a_{ij} и b_{ij} основной и второй метрические тензоры недеформированной срединной поверхности. Пусть далее $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}_* (u^1, u^2)$ будет радиус-вектор точки (u^1, u^2) рассматриваемой поверхности после деформации, а $\mathbf{r}_j{}^* = \partial \mathbf{r}_* / \partial u^j$ — ее координатные векторы.

Введем в рассмотрение тройку векторов $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{m}$, определяя ее условиями

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = a_{ij} \qquad 2\mathbf{m} = c^{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \times \mathbf{p}_\beta, \qquad c^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\alpha{}^* \cdot \mathbf{p}_\beta = 0 \tag{1.1}$$

где c_{ij} — дискриминантный тензор основного метрического тензора a_{ij}, и определим первый и второй тензоры деформации ε_{ij} и μ_{ij} разложениями:

$$\mathbf{r}_j{}^* = (a_j{}^\alpha + \varepsilon_j{}^\alpha)\, \mathbf{p}_\alpha, \qquad \nabla_j \mathbf{p}_i = (b_{ij} - \mu_{ij})\, \mathbf{m} - c_i^{\cdot\alpha} \xi_j \mathbf{p}_\alpha \tag{1.2}$$

Здесь ξ_i — вспомогательный вектор. По третьему условию (1.1) тензор ε_{ij} — симметричный.

Условия совместности деформации можно представить в виде [5]

$$c^{j\gamma}c^{\alpha\beta}\nabla_\beta\mu_{\gamma\alpha} - c^{\alpha\beta}\xi_\alpha(b_\beta{}^j - \mu_\beta{}^j) = 0 \tag{1.3}$$

$$c^{\alpha\beta}c^{\gamma\rho}(b_{\gamma\alpha}\mu_{\rho\beta} - \frac{1}{2}\mu_{\gamma\alpha}\mu_{\rho\beta}) - c^{\alpha\beta}\nabla_\beta\xi_\alpha = 0 \tag{1.4}$$

$$c^{\alpha\beta}\nabla_\beta\varepsilon_{\alpha j} - c^{\alpha\beta}(a_\alpha{}^\gamma + \varepsilon_\alpha{}^\gamma)c_{\gamma j}\xi_\beta = 0 \tag{1.5}$$

$$c^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} - c^{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha{}^\gamma(b_{\gamma\beta} - \mu_{\gamma\beta}) = 0 \tag{1.6}$$

Переходим к рассмотрению статических соотношений. Пусть $\mathbf{T}^{(1)}$, $\mathbf{T}^{(2)}$ будут интенсивности усилий, а $\mathbf{M}^{(1)}$, $\mathbf{M}^{(2)}$ интенсивности моментов, отнесенные к единице длины линейных элементов недеформированной срединной поверхности du^2, du^1 соответственно. Пусть далее $\mathbf{X}$ и $\mathbf{M}$ будут интенсивности вектора сил и момента внешней нагрузки, отнесенные к единице площади недеформированной срединной поверхности.

Величины

$$\mathbf{T}^{(j)}\sqrt{a^{jj}} = \mathbf{T}^j, \qquad \mathbf{M}^{(j)}\sqrt{a^{jj}} = \mathbf{M}^j \tag{1.7}$$

образуют тензоры первого ранга с векторными компонентами. При помощи разложений

$$\mathbf{T}^j = T^{j\alpha}\mathbf{p}_\alpha + N^j\mathbf{m}, \qquad \mathbf{M}^j = c_{\beta}^{\cdot\alpha}M^{j\beta}\mathbf{p}_\alpha \tag{1.8}$$

можно показать, что в состоянии равновесия, когда $\mathbf{T}^j$, $\mathbf{M}^j$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_\alpha\mathbf{T}^\alpha + \mathbf{X} = 0, \qquad \nabla_\alpha\mathbf{M}^\alpha + \mathbf{r}_\alpha{}^* \times \mathbf{T}^\alpha + \mathbf{M} = 0 \tag{1.9}$$

виртуальная работа деформации δW оболочки выражается формулой

$$\delta W = \iint (T^{\alpha\beta}\delta\varepsilon_{\beta\alpha} + M^{\alpha\beta}\delta\mu_{\beta\alpha})\sqrt{a}\,du^1du^2 \tag{1.10}$$

где a — дискриминант тензора a_{ij}.

2. Введение симметрических тензоров деформации, усилий и моментов. Пусть $\varkappa_{ij}$, S^{ij} и G^{ij} будут симметрические тензоры, определяемые равенствами

$$\mu_{ij} = -\varkappa_{ij} + \frac{1}{2}c_{ij}\varkappa \tag{2.1}$$

$$T^{ij} = S^{ij} + \frac{1}{2 + a^{\sigma\tau}\varepsilon_{\sigma\tau}}c_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}c^{i\nu}(b_\nu{}^j + \varkappa_\nu{}^j) + \frac{1}{2}c^{ij}S \tag{2.2}$$

$$M^{ij} = G^{ij} + \frac{1}{2 + a^{\sigma\tau}\varepsilon_{\sigma\tau}}c_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}c^{i\nu}(a_\nu{}^j + \varepsilon_\nu{}^j) \tag{2.3}$$

Скаляр $\varkappa$ определяем из условия (1.6) через симметрические тензоры ε_{ij} и $\varkappa_{ij}$:

$$\varkappa = \frac{2}{2 + a^{\sigma\tau}\varepsilon_{\sigma\tau}}c^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\gamma}(b_\beta{}^\gamma + \varkappa_\beta{}^\gamma) \tag{2.4}$$

а скаляр S — из так называемого шестого (недифференциального) уравнения равновесия (2.12), которое будет дано ниже Применяя формулы (2.1)—(2.4) в выражении виртуальной работы деформации (1.9), получим

$$\delta W = \iint (S^{\alpha\beta}\delta\varepsilon_{\alpha\beta} - G^{\alpha\beta}\delta\varkappa_{\alpha\beta})\sqrt{a}\,du^1du^2 \tag{2.5}$$

откуда следует, что $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varkappa_{\alpha\beta}$ являются энергетическими компонентами деформации для симметрических тензоров тангенциальных усилий и моментов $S^{\alpha\beta}$, $G^{\alpha\beta}$.

Из (2.5) можно вывести условия равновесия, использовав следующие соотношения, вытекающие из ранее приведенных определений:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{p}_j\cdot\mathbf{r}_i{}^* + \mathbf{p}_j\cdot\delta\mathbf{r}_i{}^* + \delta\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{r}_j{}^* + \mathbf{p}_i\cdot\delta\mathbf{r}_j{}^*) \tag{2.6}$$

$$\delta\varkappa_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j\delta\mathbf{p}_i + \nabla_i\delta\mathbf{p}_j)\cdot\mathbf{m} + \frac{1}{2}(\nabla_j\mathbf{p}_i + \nabla_i\mathbf{p}_j)\cdot\delta\mathbf{m} \tag{2.7}$$

где $\delta \mathbf{p}_j$, $\delta \mathbf{m}$ можно представить через вектор бесконечно малого вращения $\delta\omega$ в виде

$$\delta \mathbf{p}_j = \delta\omega \times \mathbf{p}_j, \qquad \delta \mathbf{m} = \delta\omega \times \mathbf{m} \tag{2.8}$$

Поступая так, получим

$$\nabla_\alpha S^{\alpha j} + c^{j}_{\cdot\beta} S^{\alpha\beta}\xi_\alpha + \frac{1}{2} c^{\alpha j}\nabla_\alpha S + \frac{1}{2} a^{j\alpha} S\xi_\alpha - Q^\alpha (b_\alpha{}^j + \varkappa_\alpha{}^j - \frac{1}{2} c^{j}_{\cdot\alpha}\varkappa) + X^j = 0 \tag{2.9}$$

$$S^{\alpha\beta}(b_{\alpha\beta} + \varkappa_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} S\varkappa + \nabla_\alpha Q^\alpha + X = 0 \tag{2.10}$$

$$\nabla_\alpha G^{\alpha j} + c^{j}_{\cdot\beta} G^{\alpha\beta}\xi_\alpha - (a_\alpha{}^j + \varepsilon_\alpha{}^j) Q^\alpha + c^{j}_{\cdot\alpha} M^\alpha = 0 \tag{2.11}$$

$$S\left(1 + \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\right) + c_{\beta\gamma}\varepsilon_\alpha{}^\beta S^{\alpha\gamma} + c_\beta{}^\alpha G^{\gamma\beta}(b_{\alpha\gamma} + \varkappa_{\alpha\gamma}) + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta}\varkappa = 0 \tag{2.12}$$

где Q^i — вектор, аналогичный вектору поперечных сил, а X^j, X, M^α определяются разложениями:

$$\mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{p}_\alpha + X\mathbf{m}, \qquad \mathbf{M} = M^\alpha \mathbf{p}_\alpha \tag{2.13}$$

Существенно отметить, что между геометрическими соотношениями (1.3) — (1.6) и статическими соотношениями имеется довольно простая аналогия. Чтобы это обнаружить, выразим в условиях (1.3) — (1.6) μ_{ij} через $\varkappa_{ij}$, $\varkappa$ по (2.1) и положим

$$\tilde\varkappa^{ij} = c^{i\alpha}c^{j\beta}\varkappa_{\alpha\beta}, \qquad \tilde\varepsilon^{ij} = c^{i\alpha}c^{j\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad \tilde\xi^j = c^{\alpha j}\xi_\alpha, \qquad \tilde\varkappa = \varkappa \tag{2.14}$$

Тогда условиям совместности деформации можно придать вид:

$$\nabla_\alpha \tilde\varkappa^{\alpha j} + \frac{1}{2} c^{j}_{\cdot\beta}\tilde\varkappa^{\alpha\beta}\xi_\alpha + \frac{1}{2} c^{\alpha j}\nabla_\alpha\tilde\varkappa + \frac{1}{4} a^{j\alpha}\tilde\varkappa\xi_\alpha - \tilde\xi^\alpha\left(b_\alpha{}^j + \frac{1}{2}\varkappa_\alpha{}^j - \frac{1}{4} c^{j}_{\cdot\alpha}\varkappa\right) = 0 \tag{2.15}$$

$$\tilde\varkappa^{\alpha\beta}\left(b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\varkappa_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{4}\tilde\varkappa\varkappa + \nabla_\alpha\tilde\xi^\alpha = 0 \tag{2.16}$$

$$\nabla_\alpha\tilde\varepsilon^{\alpha j} + \frac{1}{2} c^{j}_{\cdot\beta}\tilde\varepsilon^{\alpha\beta}\xi_\alpha - \tilde\xi^\alpha\left(a_\alpha{}^j + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha{}^j\right) = 0 \tag{2.17}$$

$$\tilde\varkappa\left(1 + \frac{1}{4} a^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2} c_{\beta\gamma}\varepsilon_\alpha{}^\beta\tilde\varkappa^{\alpha\gamma} + c_\beta{}^\alpha\tilde\varepsilon^{\gamma\beta}\left(b_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2}\varkappa_{\alpha\gamma}\right) + \frac{1}{4} a_{\alpha\beta}\tilde\varepsilon^{\alpha\beta}\varkappa = 0 \tag{2.18}$$

Легко убедиться, что аналогия между статическими соотношениями (2.9)—(2.12) и геометрическими соотношениями (2.15) — (2.18) заключается в следующем. Если в уравнениях равновесия (2.9) — (2.12) положить $X^i = X = M^\alpha = 0$ и заменить величины S^{ij}, G^{ij}, Q^i, S соответственно величинами $\tilde\varkappa^{ij}$, $\tilde\varepsilon^{ij}$, $\tilde\xi^i$, $\tilde\varkappa$, а нелинейным членам придать множитель $^1/_2$, то полученные соотношения совпадут с условиями совместности деформации (2.15) — (2.18). К статическим соотношениям (2.9) — (2.12) можно присоединить условия

$$c_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta} = 0, \qquad c_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.19}$$

а к геометрическим соотношениям (2.15) — (2.18) — аналогичные условия

$$c_{\alpha\beta}\tilde\varkappa^{\alpha\beta} = 0, \qquad c_{\alpha\beta}\tilde\varepsilon^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.20}$$

выражающие факт, что тензоры S^{ij}, G^{ij}, ε_{ij} и $\varkappa_{ij}$ — симметрические.

Если из (2.9) — (2.12), (2.15) — (2.18) исключить величины Q^i, ξ_i, S и $\varkappa$, то получаются соотношения, куда входят только тензоры S^{ij}, G^{ij}, $\varkappa_{ij}$ и ε_{ij}. Однако на эти соотношения отмеченное правило аналогии уже не распространяется. Фактическое исключение S и $\varkappa$ при помощи (2.12), (2.4) не представляет затруднений; что же касается величин Q^i и ξ_i, то для них можно получить следующие формулы:

$$\tilde\xi^j = a_*{}^{\gamma j}(a_{\gamma\rho} + \varepsilon_{\gamma\rho})\nabla_\alpha\tilde\varepsilon^{\alpha\rho} \tag{2.21}$$

$$Q^j = a_*{}^{\gamma j}(a_{\gamma\rho} + \varepsilon_{\gamma\rho})(\nabla_\alpha G^{\alpha\rho} + c^{\rho}_{\cdot\beta}G^{\alpha\beta}\xi_\alpha + c^{\rho}_{\cdot\alpha}M^\alpha) \tag{2.22}$$

где $a_*{}^{\gamma j}$ — контравариантный метрический тензор деформированной срединной поверхности.

3. Основные статические и геометрические соотношения линейной теории оболочек. Если в соотношениях (2.9) — (2.12), (2.15) — (2.18) пренебречь нелинейными членами и исключить величины Q^i, ξ_i, S и $\varkappa$, то приходим к следующим условиям равновесия и совместности деформации:

$$\nabla_\alpha S^{\alpha j} + \frac{1}{2} c^{j\alpha} \nabla_\alpha (c_{\beta\gamma} b_\rho{}^\gamma G^{\rho\beta}) - b_\alpha{}^j \nabla_\beta G^{\beta\alpha} + X^i + b_\alpha{}^j c_\beta{}^\alpha M^\beta = 0 \tag{3.1}$$

$$b_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta G^{\beta\alpha} + X - c_\beta{}^\alpha \nabla_\alpha M^\beta = 0 \tag{3.2}$$

$$\nabla_\alpha \tilde{\varkappa}^{\alpha j} + \frac{1}{2} c^{j\alpha} \nabla_\alpha (c_{\beta\gamma} b_\rho{}^\gamma \tilde{\varepsilon}^{\rho\beta}) - b_\alpha{}^j \nabla_\beta \tilde{\varepsilon}^{\beta\alpha} = 0 \tag{3.3}$$

$$b_{\alpha\beta} \tilde{\varkappa}^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta \tilde{\varepsilon}^{\beta\alpha} = 0 \tag{3.4}$$

причем, как и в случае конечной деформации оболочки, ε_{ij} и $\varkappa_{ij}$ являются энергетическими компонентами деформации для симметричных тензоров тангенциальных усилий S^{ij} и моментов G^{ij}.

Необходимо отметить, что соотношения (3.1) — (3.4) не развертываются в соответствующие уравнения В. В. Новожилова [3]. Объясняется это тем, что величины T_1, T_2, S и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ у В. В. Новожилова не образуют тензоров (если основные соотношения теории оболочек не излагать в тензорной записи, то в этом и нет необходимости).

4. Начальное напряженное состояние. Предположим, что в некотором начальном состоянии, геометрически определяемом метрическими тензорами a_{ij}, b_{ij}, оболочка находится в напряженном состоянии. Допустим ради простоты, что это напряженное состояние безмоментное ($G_0{}^{ij} = Q_0{}^j = S_0 = 0$), удовлетворяющее условиям равновесия

$$\nabla_\alpha S_0{}^{\alpha j} + X_0{}^j = 0, \qquad S_0{}^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + X_0 = 0 \tag{4.1}$$

Рассмотрим состояние, бесконечно близкое к начальному напряженному состоянию. Пусть будет в этом состоянии

$$S^{ij} = S_0{}^{ij} + s^{ij}, \qquad G^{ij} = g^{ij}, \qquad X^i = X_0{}^i + x^i, \qquad X = X_0 + x, \qquad M^i = 0 \tag{4.2}$$

где s^{ij}, g^{ij}, x^i, x — бесконечно малые величины первого порядка. Из (2.9) — (2.12) вытекают следующие уравнения равновесия:

$$\nabla_\alpha s^{\alpha j} + \frac{1}{2} c^{j\alpha} \nabla_\alpha (c_{\beta\gamma} b_\rho{}^\gamma g^{\rho\beta}) - b_\alpha{}^j \nabla_\beta g^{\beta\alpha} = c_\beta{}^j S_0{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} c^{j\alpha} \nabla_\alpha (c_{\beta\gamma} \varepsilon_\rho{}^\beta S_0{}^{\rho\gamma}) - x^i \tag{4.3}$$

$$s^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta g^{\beta\alpha} = - S_0{}^{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha\beta} - x \tag{4.4}$$

где

$$\xi_j = c^{\alpha\beta} \nabla_\beta \varepsilon_{\alpha j} \tag{4.5}$$

Далее очевидно, что условия совместности деформации можно выписать в виде (3.3), (3.4). Соотношения (4.3), (4.4), (3.3), (3.4) можно использовать при определении критического значения безмоментного начального состояния оболочки.

Поступила 17 IX 1955

Институт строительства и строительных материалов Академии наук Эстонской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки. ПММ, т. IX, вып. 6, 1945.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
4. Лурье А. И. Об уравнениях общей теории упругих оболочек. ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950.
5. Алумяэ Н. А. Дифференциальные уравнения состояний равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. ПММ, т. XIII, в. 1, 1949.