К ТЕОРИИ СФЕРИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА

Л. Г. Лойцянский

(Ленинград)

В статье [1] было дано приближенное решение задачи о движении несжимаемой вязкой жидкости в полости между двумя расположенными одна внутри другой сферами, радиусы которых близки по величине; при этом внешняя сфера неподвижна, а внутренняя совершает произвольное движение (движение жидкости предполагается стационарным, а инерционные члены опущены). При приближенном интегрировании соответствующего данной задаче уравнения Рейнольдса был применен метод Галеркина. Здесь приводится решение той же задачи, основанное на точном интегрировании уравнения Рейнольдса, причем используется найденный Ванье [2] частный интеграл уравнения Рейнольдса, соответствующий задаче о вращении внутренней сферы вокруг оси, перпендикулярной к линии центров сфер. Формулы главного вектора и главного момента реакций жидкости сохраняют тот же вид, что и в предыдущей статье, но коэффициенты в них, представляющие функции основного параметра задачи, равного отношению расстояния между центрами сфер к разности их радиусов, уточняются.

1. Точное решение уравнения Рейнольдса. Уравнение Рейнольдса, определяющее давление p в полости между сферами в функции от сферических координат θ, φ (θ — полюсный угол, φ — азимут; полярная ось Oz проведена через линию центров O и O' сфер, причем начало координат O совпадает с центром внутренней сферы, а ось Ox отсчета азимутов произвольна) будет [1]

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3 \sin\theta \frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2} = 6\mu R^2 \omega e \sin\gamma \sin^3\theta \sin(\varphi - \delta) -$$

$$- 12\mu v_0 R^2 \left[\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\cos(\varphi - \beta)\right] \sin^2\theta \tag{1.1}$$

Здесь $h = \varepsilon + e\cos\theta$ — зазор между сферами, $\varepsilon = R' - R$ — разность радиусов ($R' > R$) сфер, e — расстояние между центрами сфер, v_0, α, β — сферические координаты (α — полюсный угол, β — азимут) конца вектора $\mathbf{v}_0$ скорости поступательного движения внутренней сферы, ω, γ, δ — сферические координаты (γ — полюсный угол, δ — азимут) вектора ω угловой скорости внутренней сферы, причем оба вектора отложены от начала координат.

Разыскивая решение уравнения (1.1) в форме

$$p(\theta, \varphi) = \Theta_0(\theta) + \Theta_1(\theta)\cos(\varphi - \beta) + \Theta_2(\theta)\sin(\varphi - \delta) \tag{1.2}$$

приходим к системе обыкновенных уравнений второго порядка:

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(h^3 \sin\theta \frac{d\Theta_0}{d\theta}\right) = -12\mu v_0 R^2 \cos\alpha \sin^2\theta \cos\theta \tag{1.3}$$

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(h^3 \sin\theta \frac{d\Theta_1}{d\theta}\right) - h^3\Theta_1 = -12\mu v_0 R^2 \sin\alpha \sin^3\theta \tag{1.4}$$

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(h^3 \sin\theta \frac{d\Theta_2}{d\theta}\right) - h^3\Theta_2 = 6\mu R^2 \omega e \sin\gamma \sin^3\theta \tag{1.5}$$

в которой второе и третье уравнения отличаются лишь постоянным множителем в правой части, с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\Theta_0 = 0, \quad \frac{d\Theta_0}{d\theta} \quad \text{ограничено при } \theta = 0 \\ &\Theta_1 = \Theta_2 = 0 \quad \text{при } \theta = 0 \\ &\Theta_1 = \Theta_2 = 0 \quad \text{при } \theta = \pi \end{aligned} \tag{1.6}$$

Решения уравнений (1.3), (1.4), (1.5), при граничных условиях (1.6) представляются в следующей замкнутой форме:

$$\Theta_0(\theta) = -\frac{3\mu v_0 R^2 \cos\alpha}{\varepsilon^3 (1+\lambda)^2} \frac{(2+\lambda+\lambda\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\lambda\cos\theta)^2} \tag{1.7}$$

$$\Theta_1(\theta) = \frac{12\mu v_0 R^2 \sin\alpha}{\varepsilon^3} \frac{2+\lambda\cos\theta}{(4+\lambda^2)(1+\lambda\cos\theta)^2} \sin\theta \tag{1.8}$$

$$\Theta_2(\theta) = -\frac{6\mu R^2\, \omega e \sin\gamma}{\varepsilon^3} \frac{2+\lambda\cos\theta}{(4+\lambda^2)(1+\lambda\cos\theta)^2} \sin\theta \tag{1.9}$$

где $\lambda = e/\varepsilon$. Подставляя значения этих функций в (1.2), получим искомое распределение давлений. В отличие от приближенного распределения давлений, приведенного в статье [1], точное решение уравнения (1.1) при $\lambda = 1$ в точке $\theta = \pi$ соприкосновения сфер бесконечно.

2. Главный вектор реакций жидкости. Используя формулы (3.2) статьи [1], получим следующие проекции главного вектора F реакций жидкости на поверхность внутренней сферы:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{4\pi\mu R^4 (2v_0 \sin\alpha\cos\beta + \omega e \sin\gamma\sin\delta)}{\varepsilon^3} K_1(\lambda) \\ F_y &= -\frac{4\pi\mu R^4 (2v_0 \sin\alpha\sin\beta - \omega e \sin\gamma\cos\delta)}{\varepsilon^3} K_1(\lambda) \\ F_z &= -\frac{8\pi\mu R^4 v_0 \cos\alpha}{\varepsilon^3} K_2(\lambda) \end{aligned} \tag{2.1}$$

причем обозначения функций

$$K_1(\lambda) = \frac{3}{2(4+\lambda^2)}\left[\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^3}\right)\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda} - \frac{2}{\lambda^2}\right] \tag{2.2}$$

$$K_2(\lambda) = \frac{3}{4\lambda^3}\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} - \ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) \tag{2.3}$$

выбраны так, чтобы было $K_1(0) = K_2(0) = 1$.

Совокупность формул (2.1) эквивалентна одной векторной:

$$\mathbf{F} = -\frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^3} K_1(\lambda)\,\mathbf{v}_0 + \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3} K_1(\lambda)\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e} + \frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^5}\frac{K_1(\lambda)-K_2(\lambda)}{\lambda^2}(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e} \tag{2.4}$$

в которой введен вектор $\mathbf{e} = \overline{O'O}$ смещения центра внутренней сферы относительно наружной.

Считая e и ε малыми первого порядка по сравнению с радиусами сфер, а их отношение $\lambda = e/\varepsilon$ конечной величиной и замечая, что v_0 по условию неразрывности представляет также малую величину первого порядка, заключим, что все слагаемые в выражении главного вектора (2.4) имеют одинаковый порядок $1/\varepsilon^2$.

При отсутствии поступательного движения ($v_0 = 0$) выражение главного вектора будет

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3} K_1(\lambda)\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e} \tag{2.5}$$

Таким образом, при вращении внутренней сферы вокруг некоторой оси главный вектор реакций жидкости перпендикулярен плоскости, проведенной через эту ось и линию центров сфер.

Полагая в (2.5) $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{e}$, получим формулу Ванье

$$F = \frac{6\pi\mu R^4 \omega}{e^2(4\varepsilon^2+e^2)}\left[(\varepsilon^2+e^2)\ln\frac{\varepsilon+e}{\varepsilon-e} - 2\varepsilon e\right] \tag{2.6}$$

При концентрическом расположении сфер ($\lambda = 0$) независимо от характера движения главный вектор выразится формулой

$$\mathbf{F} = -\frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\mathbf{v}_0 \tag{2.7}$$

а при соприкосновении сфер ($\lambda = 1$) главный вектор становится бесконечно большим.

3. Главный момент реакций жидкости. Для вычисления главного момента реакций жидкости относительно центра внутренней сферы применим формулы (4.4) и (4.5) статьи [1]. Интегрируя по частям и используя выражения $\Theta_i(\theta)$ настоящей заметки, получим

$$L_x = -\frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon}\left[\frac{2}{3}(1+\lambda^2)\,\omega\sin\gamma\cos\delta - \frac{1}{\varepsilon^2}v_0 e\sin\alpha\sin\beta\right]K_1(\lambda)$$

$$L_y = -\frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon}\left[\frac{2}{3}(1+\lambda^2)\,\omega\sin\gamma\sin\delta + \frac{1}{\varepsilon^2}v_0 e\sin\alpha\cos\beta\right]K_1(\lambda)$$

$$L_z = -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon}\,\omega\cos\gamma\,(1-\lambda^2)\,K_2(\lambda) \tag{3.1}$$

Эта система равенств эквивалентна одному векторному:

$$\mathbf{L} = -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon}(1+\lambda^2)K_1(\lambda)\,\boldsymbol{\omega} - \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}K_1(\lambda)\,\mathbf{v}_0\times\mathbf{e} + \frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon^3}\,\frac{(1+\lambda^2)K_1(\lambda)-(1-\lambda^2)K_2(\lambda)}{\lambda^2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e} \tag{3.2}$$

При чисто вращательном движении внутренней сферы ($v_0 = 0$) будем иметь

$$\mathbf{L} = -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon}(1+\lambda^2)K_1(\lambda)\,\omega + \frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon^3}\,\frac{(1+\lambda^2)K_1(\lambda)-(1-\lambda^2)K_2(\lambda)}{\lambda^2}(\omega\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e} \tag{3.3}$$

В частном случае взаимной перпендикулярности оси вращения и линии центров сфер ($\omega\cdot\mathbf{e} = 0$) получим формулу Ванье

$$L = \frac{4\pi\mu R^4\omega}{e^3}\,\frac{\varepsilon^2+e^2}{4\varepsilon^2+e^2}\left[(\varepsilon^2+e^2)\ln\frac{\varepsilon+e}{\varepsilon-e} - 2\varepsilon e\right] \tag{3.4}$$

Поступила 29 X 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Гидродинамическая теория сферического подшипника. ПММ, т. XIX, вып. 5, 1955, стр. 531—540.
2. Wannier G. H. A contribution to the Hydrodynamics of Lubrication. Quarterly of Applied Mathematics, vol. VIII, n° 1, April 1950, pp. 1—32.