К ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

В. Н. Скимель

(Казань)

В работе Н. Г. Четаева [1], в форме необходимого условия устойчивости для задач механики консервативных систем указано на построение знакоопределенного интеграла для уравнений возмущенного движения. В динамике твердого тела при наличии известных интегралов это указание приводит к эффективному методу исследования устойчивости.

В настоящей заметке прием Н. Г. Четаева построения функции Ляпунова в форме связки интегралов (см., например, работы [2,3]) использован для получения условий устойчивости в случаях движения твердого тела, отличных от разобранных в упомянутых работах.

§ 1. Пусть A, B, C — главные моменты инерции тела для неподвижной точки, x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести в системе главных осей инерции $Oxyz$ относительно неподвижной точки; пусть далее, для тех же осей, p,q,r — проекции угловой скорости тела, а γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы вверх направленной вертикали, mg — вес тела.

Полагая $x_0 \neq 0$, $y_0 = z_0 = 0$ и обозначая $a = mgx_0$, имеем известную систему уравнений движения:

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr, \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)\,rp + a\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)\,pq - a\gamma_2, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2$$

Движение тела, соответствующее частному решению этой системы:

$$p = \omega = \text{const}, \qquad q = r = 0, \qquad \gamma_1 = 1, \qquad \gamma_2 = \gamma_3 = 0 \tag{1.1}$$

примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость по отношению к переменным p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3. Положим в возмущенном движении

$$p = \omega + \xi_1, \quad q = \xi_2, \quad r = \xi_3$$

$$\gamma_1 = 1 + \zeta_1, \quad \gamma_2 = \zeta_2, \quad \gamma_3 = \zeta_3$$

Уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned} &A\frac{d\xi_1}{dt} = (B - C)\,\xi_2\xi_3, && \frac{d\zeta_1}{dt} = \xi_3\zeta_2 - \xi_2\zeta_3 \\ &B\frac{d\xi_2}{dt} = (C - A)(\omega + \xi_1)\,\xi_3 + a\zeta_3, && \frac{d\zeta_2}{dt} = (\omega + \xi_1)\,\zeta_3 - \xi_3(1 + \zeta_1) \\ &C\frac{d\xi_3}{dt} = (A - B)(\omega + \xi_1)\,\xi_2 - a\zeta_2, && \frac{d\zeta_3}{dt} = \xi_2(1 + \zeta_1) - (\omega + \xi_1)\zeta_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

имеют следующие интегралы:

$$V_1 = A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 + 2A\omega\xi_1 + 2a\zeta_1 = \text{const}$$

$$V_2 = A\xi_1\zeta_1 + B\xi_2\zeta_2 + C\xi_3\zeta_3 + A\xi_1 + A\omega\zeta_1 = \text{const}$$

$$V_3 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + 2\zeta_1 = 0$$

Функцию Ляпунова строим в форме связки интегралов V_1 и V_2, полагая в них

$$\zeta_1 = -{}^1/_2\,(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)$$

Имеем[1]

$$V = V_1 - 2\omega V_2 = A\xi_1^2 + (A\omega^2 - a)\zeta_1^2 + B\xi_2^2 - 2B\omega\xi_2\zeta_2 + (A\omega^2 - a)\zeta_2^2 + C\xi_3^2 - \\ - 2C\omega\xi_3\zeta_3 + (A\omega^2 - a)\zeta_3^2 + \omega A\xi_1(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)$$

Очевидно, первая квадратичная форма справа будет положительной, если будут положительными вторая и третья. Полагая для определенности $B > C$, получим единственное условие[2] знакоопределенности V

$$(A - B)\omega^2 - a > 0 \tag{1.3}$$

которое будет являться достаточным условием устойчивости движения (1.1) по отношению к переменным p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3.

Поставим вопрос, когда условие (1.3) может оказаться и необходимым условием устойчивости рассматриваемого движения.

Характеристическое уравнение, соответствующее системе уравнений (1.2) возмущенного движения, записанной в вариациях, не имеет корней с положительной вещественной частью, если только выполнены условия

$$\varphi = vw \geqslant 0, \quad f = u + v + w - 2\sqrt{\varphi} \geqslant 0 \tag{1.4}$$

где

$$u = \frac{(A - B - C)^2\omega^2}{2BC}, \qquad v = \frac{(A - B)\omega^2 - a}{2C}, \qquad w = \frac{(A - C)\omega^2 - a}{2B}$$

(см., например, [4]). Если условия (1.4) нарушены, то по известной теореме Ляпунова [5] движение (1.1) будет неустойчивым.

Используя простые и известные выкладки [4], приходим к следующему результату. При

$$M = A^2 + C^2 + 3BC - 2A(B + C) < 0$$

нарушение условия (1.3) влечет за собой нарушение условий (1.4), и, следовательно, при исключении границы $v = 0$ условие (1.3) является необходимым и достаточным для устойчивости «тонкого» гироскопа ($M < 0$).

В частности, для гироскопа при $A = B = \lambda C$, когда условие (1.3) сводится к требованию $a < 0$, условие $M < 0$ будет выполнено, если

$$\lambda > {}^1/_2(1 + \sqrt{5}) = 1.618$$

При $\lambda = 2$ здесь содержится случай движения Ковалевской, рассмотренный в статье [3].

Отметим, что при $B \neq C$ изменение знака неравенства в условии (1.3) при непрерывном изменении параметров влечет за собой обязательную смену устойчивости и в тех случаях, когда само условие (1.3), может быть, и не является полностью необходимым для устойчивости.

§ 2. Пусть теперь φ, ψ, θ — углы Эйлера в обычных обозначениях. Рассмотрим аналогичным методом известную задачу об устойчивости регулярной прецессии тяжелого симметричного ($A = B$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 \neq 0$) гироскопа, т. е. движения, описываемого уравнениями

$$\varphi = \omega_1 t + \varphi_0, \quad \psi = \omega_2 t + \psi_0, \quad \theta = \theta_0 \tag{2.1}$$

в которых постоянные φ_0, ψ_0 произвольны, а постоянные ω_1, ω_2, θ_0 связаны соотношением

$$(C - A)\omega_2^2\cos\theta_0 + C\omega_1\omega_2 - mgz_0 = 0 \tag{2.2}$$

---

[1] Функция V не является первым интегралом уравнений (1.2); при условии фиксированного значения $V_3 = 0$ производная dV/dt обращается в нуль.

[2] Условие (1.3) иным способом было получено В. В. Румянцевым для условной устойчивости.

Проводя вычисления в канонических переменных Гамильтона, приняв за обобщенные координаты эйлеровы углы (см., например, [6]), будем иметь

$$H = \frac{(p_2 - p_1 \cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + \frac{p_1^2}{2C} + \frac{p_3^2}{2A} + mgz_0\cos\theta$$

где p_1, p_2, p_3 — сопряженные углам φ, ψ, θ импульсы. Обозначая отклонения переменных в возмущенном движении через ξ_1, ξ_2, ξ_3 для координат, а через η_1, η_2, η_3 для импульсов и пользуясь цикличностью углов φ и ψ, мы можем принять за функцию Ляпунова следующий интеграл:

$$V = \frac{1}{2}\left[\lambda\eta_1^2 + \mu\eta_2^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_3^2}\right)\eta_3^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2}\right)\xi_3^2 + 2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\theta\partial p_1}\right)\xi_3\eta_1 + 2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\theta\partial p_2}\right)\xi_3\eta_2\right] + H_3$$

где взятые в скобки частные производные предполагают вычисление их для невозмущенного движения, λ, μ — достаточно большие положительные постоянные, H_3 — совокупность членов выше второго порядка в разложении функции Гамильтона H.

Опуская несложные вычисления, получаем необходимое и достаточное условие знакоопределенности V относительно переменных ξ_3, η_1, η_2, η_3:

$$C^2 r_0^2 - 4Amgz_0\cos\theta_0 + A^2\omega_2^2\sin^2\theta_0 > 0$$

Так как существование вещественной регулярной прецессии требует выполнения неравенства

$$C^2 r_0^2 - 4Amgz_0\cos\theta_0 \geqslant 0$$

то мы вправе заключить, что рассматриваемое движение по отношению к переменным θ, p_1, p_2, p_3 или, что то же, по отношению к переменным θ, θ', φ', ψ' всегда устойчиво.

Неустойчивость регулярной прецессии по отношению к углам φ и ψ очевидна из уравнений (2.1).

Подобным же образом решается задача для регулярной прецессии симметричного тяжелого гироскопа в кардановом подвесе, но условие устойчивости будет содержать моменты инерции кардановых колец.

Поступила 7 XII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Об одной задаче Коши. ПММ, т. IX, вып. 2, 1945.
2. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской. ПММ. т. XVIII, вып. 4, 1954.
4. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. ИЛ, М., 1952.
5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
6. Мак-Миллан. Динамика твердого тела. ИЛ, М., 1951.