Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

П. В. Харламов

(Сталино)

Исследуется система, состоящая из простирающейся беспредельно идеальной несжимаемой однородной жидкости и помещенного в ней абсолютно твердого тела. Жидкость находится в безвихревом движении и покоится в бесконечности. Указаны выражения кинетической энергии этой системы, иногда оказывающиеся более удобными, чем те, которые обычно применяются при исследовании задачи. Уравнения Клебша [1] записаны для того случая, когда вес тела и определяемая по закону Архимеда выталкивающая сила образуют пару сил. Изучены поступательные движения тела в этом случае.

1. Свяжем неизменно с телом прямоугольную систему координат $0x_1x_2x_3$. Пусть $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ — скорость начала координат, $\omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость тела.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы выражается квадратичной формой[2]

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{3}(A_{ij}\omega_i\omega_j + B_{ij}u_iu_j + 2C_{ij}\omega_iu_j) \tag{1.1}$$

с определенными для данной системы постоянными коэффициентами.

Проекции импульсивной силы $\mathbf{R}$ и импульсивной пары $\mathbf{P}$ определяются соотношениями [1]

$$R_i = \frac{\partial T}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{3}(B_{ij}u_j + C_{ji}\omega_j) \qquad P_i = \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = \sum_{j=1}^{3}(A_{ij}\omega_j + C_{ij}u_j) \qquad (i=1, 2, 3) \tag{1.2}$$

из которых всегда возможно выразить u_i и ω_i $(i = 1, 2, 3)$ в зависимости от R_i, P_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$u_i = \sum_{j=1}^{3}(b_{ij}R_j + c_{ji}P_j) \qquad \omega_i = \sum_{j=1}^{3}(a_{ij}P_j + c_{ij}R_j) \qquad (i=1, 2, 3) \tag{1.3}$$

При подстановке (1.3) в (1.1) получаем

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{3}(a_{ij}P_iP_j + b_{ij}R_iR_j + 2c_{ij}P_iR_j) \tag{1.4}$$

Если оси координат направлены по главным осям эллипсоида измененных масс или эллипсоида измененных моментов инерции ([3], стр. 288), то (1.1) записывается в виде

$$T = \frac{1}{2}(B_1u_1^2 + B_2u_2^2 + B_3u_3^2) + \frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{3}(A_{ij}\omega_i\omega_j + 2C_{ij}\omega_iu_j) \tag{1.5}$$

или

$$T = \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + \frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{3}(B_{ij}u_iu_j + 2C_{ij}\omega_iu_j) \tag{1.6}$$

Если оси координат направлены по главным осям эллипсоида импульсивных сил или эллипсоида импульсивных пар ([4], стр. 200), то кинетическая энергия системы записывается в виде

$$T = \frac{1}{2}(b_1R_1^2 + b_2R_2^2 + b_3R_3^2) + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{3}(a_{ij}P_iP_j + 2c_{ij}P_iR_j) \qquad (1.7)$$

или

$$T = \frac{1}{2}(a_1P_1^2 + a_2P_2^2 + a_3P_3^2) + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{3}(b_{ij}R_iR_j + 2c_{ij}P_iR_j) \qquad (1.8)$$

2. Укажем другие выражения кинетической энергии, обладающие тем свойством, что в них отсутствуют произведения проекций различных векторов ([4], стр. 144).

a) Полагая кинетическую энергию системы записанной в виде (1.5), находим из (1.2)

$$u_i = \frac{1}{B_i}\left(R_i - \sum_{l=1}^{3} C_{li}\omega_l\right) \qquad (i=1,\,2,\,3) \qquad (2.1)$$

Подставив (2.1) в (1.5) и в (1.2), получаем

$$2T = \frac{R_1^2}{B_1} + \frac{R_2^2}{B_2} + \frac{R_3^2}{B_3} + \sum_{i,\,j=1}^{3} G_{ij}\omega_i\omega_j \qquad (2.2)$$

$$\left(G_{ij} = A_{ij} - \sum_{l=1}^{3}\frac{C_{il}C_{jl}}{B_l}\right) \qquad (i,j=1,\,2,\,3)$$

$$P_i = \sum_{j=1}^{3}\left(G_{ij}\omega_j + \frac{C_{ij}}{B_j}R_j\right) \qquad (i=1,\,2,\,3) \qquad (2.3)$$

Проекции скорости начала координат и имульсивной пары связаны с (2.2) соотношениями

$$u_i = \frac{\partial}{\partial R_i}(T - S), \qquad P_i = \frac{\partial}{\partial \omega_i}(T + S) \qquad \left(S = \sum_{i,\,j=1}^{3}\frac{C_{ij}}{B_j}\,\omega_iR_j\right) \qquad (i=1,\,2,\,3)$$

b) Подобным же образом из (1.8) находим

$$2T = \frac{\omega_1^2}{a_1} + \frac{\omega_2^2}{a_2} + \frac{\omega_3^2}{a_3} + \sum_{i,\,j=1}^{3} g_{ij}R_iR_j \qquad \left(g_{ij} = b_{ij} - \sum_{l=1}^{3}\frac{c_{li}c_{lj}}{a_l}\right) \qquad (i,\,j=1,\,2,\,3)$$

В этом случае

$$P_i = \frac{\partial}{\partial \omega_i}(T - S), \qquad u_i = \frac{\partial}{\partial R_i}(T + S) \qquad \left(S = \sum_{i,\,j=1}^{3}\frac{c_{ij}}{a_i}\,\omega_iR_j\right) \qquad (i=1,\,2,\,3)$$

c) Выражение кинетической энергии через проекции векторов **u** и **P** получаем из (1.6): (2.4)

$$2T = \frac{P_1^2}{A_1} + \frac{P_2^2}{A_2} + \frac{P_3^2}{A_3} + \sum_{i,\,j=1}^{3} K_{ij}u_iu_j \qquad \left(K_{ij} = B_{ij} - \sum_{l=1}^{3}\frac{C_{li}C_{lj}}{A_l}\right) \qquad (i,\,j=1,\,2,\,3)$$

Проекции угловой скорости и импульсивной силы находим из (2.4) при помощи формы

$$S = \sum_{i,\,j=1}^{3}\frac{C_{ji}}{A_j}u_iP_j$$

в виде

$$\omega_i = \frac{\partial}{\partial P_i}(T - S), \qquad R_i = \frac{\partial}{\partial u_i}(T + S) \qquad (i=1,\,2,\,3)$$

d) Наконец, исходя из (1.7), получаем еще одну запись кинетической энергии:

$$2T = \frac{u_1^2}{b_1} + \frac{u_2^2}{b_2} + \frac{u_3^2}{b_3} + \sum_{i, j=1}^{3} k_{ij} P_i P_j \qquad \left(k_{ij} = a_{ij} - \sum_{l=1}^{3} \frac{c_{il} c_{jl}}{b_l}\right) \qquad (i, j=1, 2, 3)$$

При этом

$$R_i = \frac{\partial}{\partial u_i}(T - S), \qquad \omega_i = \frac{\partial}{\partial P_i}(T + S) \qquad \left(S = \sum_{i, j=1}^{3} \frac{c_{ij}}{b_j} P_i u_j\right) \qquad (i=1, 2, 3)$$

3. Обозначим через $\mathbf{r}(r_1, r_2, r_3)$ вектор, приложенный в начале координат и геометрически равный вектору, проведенному в центр тяжести тела из центра тяжести его объема.

Если вес тела Q равен весу вытесненной им жидкости, то уравнения движения тела в жидкости записываются в виде [1]

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times Q\mathbf{n}, \qquad \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = 0 \tag{3.1}$$

где $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор, указывающий направление силы тяжести. Соотношение

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0 \tag{3.2}$$

выражает постоянство вектора $\mathbf{n}$ в неподвижном пространстве.

Из (3.1), (3.2) получаем

$$\mathbf{R}^2 = \text{const}, \qquad \mathbf{n}^2 = 1, \qquad \mathbf{R}\mathbf{n} = R\cos\alpha$$

где R — величина импульсивной силы, α — угол между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{n}$.

Интеграл живых сил имеет вид:

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{P} + \mathbf{u}\mathbf{R} - 2Q\,\mathbf{r}\mathbf{n} = h \qquad (h\text{—постоянная интегрирования})$$

Если импульсивная сила вертикальна, то уравнения движения (3.1) допускают еще один интеграл Кирхгоффа [2]:

$$\mathbf{P}\mathbf{R} = \text{const}$$

При совпадении центра тяжести тела с центром тяжести его объема тело движется по инерции. Такая задача неоднократно рассматривалась в литературе [5]. Движущееся по инерции тело имеет в общем случае лишь три направления для поступательных движений. В последующем поступательные движения изучаются в предположении, что расстояние r между этими центрами отлично от нуля.

4. Пусть

$$\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{4.1}$$

Неизменные в неподвижном пространстве векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{n}$ постоянны и по отношению к осям $Ox_1x_2x_3$, перемещающимся поступательно.

Полагаем, что начало координат помещено в первой центральной точке тела ([3], стр. 286). Записывая кинетическую энергию системы в виде (2.2), из формул (2.1), (2.3) заключаем, что при отсутствии вращения тела скорость начала координат и импульсивная пара постоянны. Вледствие этого уравнение (3.1) записывается в виде

$$\mathbf{u} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times Q\mathbf{n} \tag{4.2}$$

Равновесие рассматриваемого тела в жидкости возможно лишь в том случае, если вектор $\mathbf{r}$ вертикален.

Вследствие (4.1) из (2.1) получаем $R_i = B_i u_i$. Уравнению (4.2) соответствуют три скалярных уравнения:

$$(B_3 - B_2)\,u_2 u_3 = Q\,(r_2 n_3 - r_3 n_2) \qquad (123) \tag{4.3}$$

Здесь и в дальнейшем символ (123) указывает, что остальные уравнения получаются круговой перестановкой этих индексов. Из (4.2) следует $\mathbf{R}(\mathbf{u}\times\mathbf{r})=0$, т. е. направления поступательных движений тела определяются образующими конуса

$$r_1(B_2-B_3)x_2x_3+r_2(B_3-B_1)x_3x_1+r_3(B_1-B_2)x_1x_2=0 \qquad (4.4)$$

Этот конус распадается на плоскости, если

$$r_1r_2r_3(B_2-B_3)(B_3-B_1)(B_1-B_2)=0$$

Так, например, при $r_1=0$ поверхность (4.4) распадается на две плоскости:

$$x_1=0 \qquad (4.5)$$

$$r_2(B_3-B_1)x_3+r_3(B_1-B_2)x_2=0 \qquad (4.6)$$

Вытекающее из (4.2) равенство $\mathbf{u}(\mathbf{r}\times\mathbf{n})=0$ показывает, что при данной ориентации тела в жидкости направление поступательного движения принадлежит плоскости

$$(r_2n_3-r_3n_2)x_1+(r_3n_1-r_1n_3)x_2+(r_1n_2-r_2n_1)x_3=0 \qquad (4.7)$$

5. Поступательные движения по направлению главных осей поверхности измененных масс могут происходить в том и только в том случае, если вектор $\mathbf{r}$ вертикален. При этом уравнение (4.2) не накладывает ограничений на величину скорости.

6. Рассмотрим вначале такие системы, для которых конус (4.4) не распадается, т. е. допустим, что все измененные массы различны и вектор $\mathbf{r}$ не лежит ни в одной из главных плоскостей эллипсоида

$$B_1x_1^2+B_2x_2^2+B_3x_3^2=1 \qquad (6.1)$$

Укажем те положения тела в жидкости, при которых оно может совершать поступательные движения по направлению вектора $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{u}=\frac{u}{r}\,\mathbf{r} \qquad (6.2)$$

Из (4.3) и (6.2) находим

$$u^2(B_3-B_2)r_3r_2=Qr^2(r_2n_3-r_3n_2) \quad (123) \qquad (6.3)$$

Умножая эти уравнения соответственно на n_1, n_2, n_3 и складывая их, получаем

$$u^2[r_2r_3(B_3-B_2)n_1+r_3r_1(B_1-B_3)n_2+r_1r_2(B_2-B_1)n_3]=0$$

Полагая $u\neq 0$ (случай $u=0$ отмечен в п. 4), приходим к заключению, что поступательные движения по направлению вектора $\mathbf{r}$ возможны лишь в том случае, если связанная с телом плоскость

$$r_2r_3(B_3-B_2)x_1+r_3r_1(B_1-B_3)x_2+r_1r_2(B_2-B_1)x_3=0 \qquad (6.4)$$

вертикальна. Эта плоскость касается конуса (4.4) по образующей, содержащей вектор $\mathbf{r}$.

Обозначим через φ угол наклона вектора $\mathbf{r}$ к вертикали, которую полагаем принадлежащей плоскости (6.4). Из (6.3) находим

$$u^2=Q\varkappa\sin\varphi$$

где $\varkappa$ зависит только от r_i, B_i $(i=1,2,3)$.

7. Пусть тело погружено в жидкость так, что плоскость, проходящая через вектор $\mathbf{r}$ и ось Ox_1, вертикальна.

Образующими, по которым эта плоскость пересекает конус (4.4), являются ось Ox_1 и прямая, идущая по направлению вектора $\mathbf{r}$. Если вектор $\mathbf{r}$ не вертикален, то тело не может совершать поступательных движений ни по направлению оси Ox_1 (п. 5), ни по направлению вектора $\mathbf{r}$ (п. 6).

Таким образом, приходим к заключению о невозможности поступательных движений, если тело погружено в жидкость так, что плоскость, проходящая через вектор $\mathbf{r}$ и одну из главных осей эллипсоида измененных масс, вертикальна, а вектор $\mathbf{r}$ не вертикален.

8. Допустим теперь, что проходящая через первую центральную точку тела прямая, направленная в неподвижном пространстве вертикально, не содержится ни в плоскости (6.4), ни в одной из плоскостей, отмеченных в п. 7. Проходящая через эту вертикаль и вектор $\mathbf{r}$ плоскость, кроме образующей, содержащей $\mathbf{r}$, пересекает конус (4.4) еще по одной образующей, которая дает направление поступательного движения тела, так как поступательное движение по направлению вектора $\mathbf{r}$ совершаться не может вследствие того, что рассматриваемая вертикаль не принадлежит плоскости (6.4).

Из (4.3) находим

$$u_1 = \pm \sqrt{Q \frac{(r_3 n_1 - r_1 n_3)(r_1 n_2 - r_2 n_1)(B_3 - B_2)}{(B_1 - B_3)(B_2 - B_1)(r_2 n_3 - r_3 n_2)}} \qquad (123)$$

Поступательное движение тела оказывается возможным лишь в том случае, если из двух лучей рассматриваемой вертикали вниз направлен тот, для которого выполнено условие

$$(B_1 - B_3)(B_2 - B_1)(B_3 - B_2)(r_3 n_1 - r_1 n_3)(r_1 n_2 - r_2 n_1)(r_2 n_3 - r_3 n_2) > 0$$

Таким образом, если конус (4.4) не распадается на плоскости, то каждой прямой, проходящей через центральную точку тела (за исключением прямых, лежащих в плоскостях, отмеченных в п. 7), соответствует определенное направление и скорость поступательного движения, если вниз направлен соответствующий луч этой прямой.

9. Рассмотрим систему, удовлетворяющую условиям

$$r_1 = 0 \qquad r_2 r_3 (B_1 - B_3)(B_2 - B_1)(B_3 - B_2) \neq 0 \qquad (9.1)$$

В этом случае конус (4.4) распадается на плоскости (4.5) и (4.6).

Из второго уравнения (4.3) заключаем, что поступательные движения тела, направления которых принадлежат плоскости (4.5), возможны лишь в том случае, если плоскость (4.5) вертикальна.

Обозначая через θ угол наклона оси Ox_3 к вертикали, а через α — угол наклона вектора $\mathbf{r}$ к оси Ox_3, находим из первого уравнения (4.3) зависимость величины скорости от направления поступательного движения:

$$u^2 = \frac{2Qr \sin(\theta - \alpha)}{B_2 - B_3} \frac{1}{\sin 2\lambda} \qquad (9.2)$$

где λ — угол между вектором $\mathbf{u}$ и осью Ox_3.

Таким образом, каждому положению тела в жидкости, при котором плоскость (4.5) вертикальна, соответствует бесчисленное множество направлений поступательного движения. Эти направления стеснены условием положительности правой части равенства (9.2). Каждому направлению соответствует определенное значение скорости поступательного движения. Направления, определяемые значениями $\lambda = 0$, $^1/_2\pi$, отмечены в п. 5.

10. Если тело, удовлетворяющее условиям (9.1), погружено в жидкость так, что плоскость (4.5) не вертикальна, то направление поступательного движения определяется прямой, по которой пересекаются плоскости (4.6) и (4.7):

$$\begin{aligned} r_2 (B_3 - B_1) x_3 + r_3 (B_1 - B_2) x_2 &= 0 \\ (r_2 n_3 - r_3 n_2) x_1 + r_3 n_1 x_2 - r_2 n_1 x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (9.3)$$

Так как $n_1 \neq 0$, то из второго и третьего уравнений (4.3) получаем $u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$, вследствие чего из первого уравнения (4.3) находим

$$r_2 n_3 - r_3 n_2 \neq 0$$

Скорость поступательного движения определяется из (4.3):

$$u_1 = \pm n_1 \sqrt{Q \frac{r_2 r_3 (B_3 - B_2)}{(B_1 - B_3)(B_2 - B_1)(r_3 n_2 - r_2 n_3)}}$$

$$u_2 = \pm \sqrt{Q \frac{r_2 (r_3 n_2 - r_2 n_3)(B_1 - B_3)}{r_3 (B_2 - B_1)(B_3 - B_2)}},$$

$$u_3 = \pm \sqrt{Q \frac{r_3 (r_3 n_2 - r_2 n_3)(B_2 - B_1)}{r_2 (B_3 - B_2)(B_1 - B_3)}}$$

Поступательные движения тела возможны в том случае, если n_2, n_3 удовлетворяют неравенству:

$$(B_3 - B_2)(B_1 - B_3)(B_2 - B_1) r_2 r_3 (r_3 n_2 - r_2 n_3) > 0$$

11. Если измененные массы различны, а вектор **r** направлен по одной из главных осей эллипсоида (6.1), то конус (4.4) распадается на две главные плоскости этого эллипсоида, содержащие вектор **r**. Для каждой из этих плоскостей справедливы выводы, подобные полученным в п. 9 для плоскости (4.5).

Если две измененные массы равны и через вектор **r** проходит единственная главная плоскость эллипсоида (6.1), то поступательные движения возможны лишь в том случае, если эта плоскость вертикальна. На этот случай распространяются выводы п. 9, если оси координат занумерованы так, что рассматриваемая главная плоскость является плоскостью Ox_2x_3.

Если же вектор **r** перпендикулярен к плоскости равных измененных масс, то выводы п. 9 применимы к любой из бесчисленного множества главных плоскостей, проходящих через вектор **r**.

Поступила 11 X 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Clebsch A. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Math. Ann Bd. 3, 1870.
2. Kirhhoff G. Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 71, 1869.
3. Жуковский Н. Е. Лекции по гидродинамике. Собр. соч., т. II, ОНТИ, М.— Л., 1935.
4. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. I, Гостехиздат, М.— Л., 1948.
5. Мещерский И. В. Гидродинамические труды В. А. Стеклова. Сборник «Памяти В. А. Стеклова». Изд. АН СССР, Л., 1928.