Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В УСКОРЕННОМ ПОТОКЕ БЕЗГРАНИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

М. Д. Хаскинд

(Одесса)

При решении ряда практических задач требуется учитывать гидродинамические силы, действующие на твердое тело при его неустановившемся движении в ускоренных потоках. К таким задачам относятся: движение тяжелых частиц в ускоренных русловых потоках, некоторые задачи о качке судна и другие.

Частный случай обтекания неподвижного тела ускоренным потоком изучен Тейлором [1] и результаты этого исследования воспроизведены в книге Ламба [2].

Ниже производится исследование в более общем случае и определяются гидродинамические силы, действующие на твердое тело при его неустановившемся движении в ускоренном поступательном потоке безграничной жидкости.

Полученные здесь данные представляют собой дополнение и также обобщение результатов хорошо разработанной теории неустановившегося движения твердого тела в жидкости, покоящейся на бесконечности [2—5].

Пусть $\mathbf{V}_e(t)$ — вектор скорости набегающего потока, $\mathbf{V}(t)$ и $\mathbf{\Omega}(t)$ — векторы поступательной и угловой скорости тела. Положим далее, что жидкость несжимаемая и идеальная, и что ее движение является безвихревым, тогда для определения потенциала скоростей $\Phi(x, y, z, t)$ имеем условия:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{r}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{\Omega} \text{ на поверхности } S,$$

$$(\nabla\Phi)_\infty = \mathbf{V}_e, \qquad \triangle\Phi = 0 \tag{1}$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ радиус-вектор точки поверхности; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей координат, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела S.

Введем в рассмотрение потенциал скоростей φ относительного движения жидкости:

$$\varphi = \Phi - \mathbf{V}_e\cdot\boldsymbol{r} \tag{2}$$

Функция φ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{V} - \mathbf{V}_e) + (\mathbf{r}\times\mathbf{n})\cdot\Omega \text{ на } S, \qquad (\nabla\varphi)_\infty = 0, \qquad \triangle\varphi = 0 \tag{3}$$

Ввиду линейности условий потенциал скоростей φ можно представить в форме

$$\varphi = (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)\cdot\mathbf{\Phi}_1 + \Omega\cdot\mathbf{\Phi}_2 \tag{4}$$

Функции

$$\mathbf{\Phi}_1 = \varphi_1\mathbf{i} + \varphi_2\mathbf{j} + \varphi_3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{\Phi}_2 = \varphi_4\mathbf{i} + \varphi_5\mathbf{j} + \varphi_6\mathbf{k} \tag{5}$$

определяются из условий

$$\frac{\partial\mathbf{\Phi}_1}{\partial n} = n \text{ на } S, \qquad (\nabla\mathbf{\Phi}_1)_\infty = 0, \qquad \triangle\mathbf{\Phi}_1 = 0$$
$$\frac{\partial\mathbf{\Phi}_2}{\partial n} = \mathbf{r}\times\mathbf{n} \text{ на } S, \qquad (\nabla\mathbf{\Phi}_2)_\infty = 0, \qquad \triangle\mathbf{\Phi}_2 = 0 \tag{6}$$

Функции φ_i $(i = 1, \ldots, 6)$ являются потенциалами скоростей при движении тела с единичными составляющими скоростей в жидкости, покоящейся на бесконечности. В системе координат, неизменно связанной с телом, эти функции зависят только от x, y, z, т. е. полностью определяются геометрическими свойствами движущегося тела. Известно, что если тело движется в покоящейся на бесконечности жидкости, то гидродинамические силы определяются из формул

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{K}}{dt}, \qquad \mathbf{M} = -\frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{7}$$

где $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — главный вектор и главный момент импульсивных давлений (ρ — плотность жидкости)

$$\mathbf{K} = -\rho \iint_S \varphi \mathbf{n}\, dS, \qquad \mathbf{L} = -\rho \iint_S \varphi\, (\mathbf{r} \times \mathbf{n})\, dS \tag{8}$$

При помощи обозначений

$$\begin{gathered} V_x - V_{ex} = u_1, \quad V_y - V_{ey} = u_2, \quad V_z - V_{ez} = u_3, \quad \Omega_x = u_4, \quad \Omega_y = u_5, \quad \Omega_z = u_6 \\ K_x = B_1, \quad K_y = B_2, \quad K_z = B_3, \quad L_x = B_4, \quad L_y = B_5, \quad L_z = B_6 \end{gathered} \tag{9}$$

векторные формулы (8) можно представить в следующей скалярной форме

$$B_i = -\rho \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\, dS = \sum_{m=1}^{6} \mu_{mi}\, u_m \qquad (i=1,\ldots,6) \tag{10}$$

где $\mu_{im} = \mu_{mi}$ коэффициенты присоединенных масс

$$\mu_{im} = -\rho \iint_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_m}{\partial n}\, dS \tag{11}$$

Известно также, что потенциал скоростей φ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\varphi = \frac{e_1 x + e_2 y + e_3 z}{r^3} + Q\left(\frac{1}{r^5}\right) \tag{12}$$

где вектор $\mathbf{e} = e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k}$ связан с вектором $\mathbf{K}$ соотношением [6]

$$\mathbf{K} = -\rho D \mathbf{u}_c - 4\pi\rho \mathbf{e} \tag{13}$$

Здесь D — объем тела и $\mathbf{u}_c$ — скорость центра величины этого объема.

В общем же случае неустановившегося движения тела в ускоренном потоке вычисление гидродинамических сил проведем, исходя из обычных формул

$$\mathbf{F} = -\iint_S p \mathbf{n}\, dS, \qquad \mathbf{M} = -\iint_S p\, (\mathbf{r} \times \mathbf{n})\, dS \tag{14}$$

в которых давление p определяется из интеграла Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho\, |\nabla \Phi|^2 \tag{15}$$

Для удобства вычисления воспользуемся теоремой об изменении количества движения. Пусть Σ есть неподвижная поверхность, охватывающая поверхность S. Количество движения жидкости в объеме τ, заключенном между поверхностями S и Σ, определяется формулой

$$\mathbf{Q} = \rho \iiint_\tau \nabla \Phi\, d\tau$$

которую на основании теоремы Остроградского можно преобразовать к виду

$$\mathbf{Q} = \rho \iint_\Sigma \Phi\, \mathbf{n}\, dS - \rho \iint_S \Phi \mathbf{n}\, dS \tag{16}$$

Изменение за время dt количества движения частиц жидкости, заключенных в момент времени t между поверхностями S и Σ, равно импульсу сил давления, действующих на поверхности S и Σ за промежуток времени dt. Пусть $\mathbf{F}'$ — главный вектор сил давления, приложенных к поверхности Σ, тогда импульс сил давления, приложенных к поверхностям S и Σ за время dt определяется выражением $(\mathbf{F}' - \mathbf{F})\, dt$. Чтобы подсчитать изменение количества движения частиц жидкости, заключенных в момент времени t между поверхностями S и Σ, нужно учесть, что за время dt часть частиц выйдет через поверхность Σ, а другие войдут через поверхность Σ внутрь объема τ. Следовательно

$$dQ = d\iint\limits_{\Sigma} \rho\Phi\mathbf{n}\, dS - d\iint\limits_{S} \rho\Phi\mathbf{n}\, dS + \iint\limits_{\Sigma} \rho\nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\, dS\, dt$$

Приравнивая это выражение импульсу сил $(\mathbf{F}' - \mathbf{F})\, dt$, получим

$$\mathbf{F}' - \mathbf{F} = \frac{d}{dt}\iint\limits_{\Sigma} \rho\Phi\mathbf{n}\, dS - \frac{d}{dt}\iint\limits_{S} \rho\Phi\mathbf{n}\, dS + \iint\limits_{\Sigma} \rho\nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\, dS$$

Вследствие неподвижности поверхности Σ имеем

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{\Sigma} \Phi\mathbf{n}\, dS = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial t}\mathbf{n}\, dS$$

Кроме того,

$$\mathbf{F}' = -\iint\limits_{\Sigma} p\mathbf{n}\, dS = \rho\iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial t}\mathbf{n}\, dS + \frac{1}{2}\rho\iint\limits_{\Sigma} |\nabla\Phi|^2\mathbf{n}\, dR$$

Поэтому будем иметь

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\iint\limits_{S} \rho\Phi\mathbf{n}\, dS + \iint\limits_{\Sigma} \rho\left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\mathbf{n} - \nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) dS \tag{17}$$

Аналогичное выражение получаем для вычисления гидродинамического момента

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}\iint\limits_{S} \rho\Phi\,(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\, dS + \iint\limits_{\Sigma} \rho\left[\mathbf{r}\times\left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\mathbf{n} - \nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\right] dS \tag{18}$$

При помощи теоремы Остроградского легко установить, что

$$\iint\limits_{S} \rho\,(\mathbf{V}_e\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{n}\, dS = \rho D\mathbf{V}_e, \qquad \iint\limits_{S} \rho\,(\mathbf{V}_e\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\, dS = \rho D\,(\mathbf{r}_c\times\mathbf{V}_e) \tag{19}$$

где r_c — радиус-вектор центра величины объема D.

Подставим выражение (2) в первые интегральные слагаемые формул (17) и (18) и примем во внимание (8) и (19). В результате получим

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \rho D\frac{d\mathbf{V}_e}{dt} + \rho\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\mathbf{n} - \nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) dS \tag{20}$$

$$\mathbf{M} = -\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \rho D\left(\mathbf{r}_c\times\frac{d\mathbf{V}_e}{dt}\right) + \rho D\,(\mathbf{u}_c\times\mathbf{V}_e) + $$
$$+\rho\iint\limits_{\Sigma}\left[\mathbf{r}\times\left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\mathbf{n} - \nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\right] dS$$

Для вычисления интегральных слагаемых в (20) возьмем в качестве поверхности Σ сферу большого радиуса r. Тогда

$$\nabla\Phi = \nabla\varphi + \mathbf{V}_e, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{V}_e\cdot\mathbf{n} \tag{21}$$

Причем на основании (12) имеем

$$\nabla\varphi = \frac{\mathbf{e}}{r^3} - 3\frac{\mathbf{e}\cdot n}{r^3}\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -2\frac{\mathbf{e}\cdot n}{r^3} \qquad \left(n = \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \tag{22}$$

Следовательно, для интегрального слагаемого в (20) сразу находим

$$\lim_{r\to\infty}\rho\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\mathbf{n} - \nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) dS = 0 \tag{23}$$

На сфере векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$ коллинеарны, поэтому интегральному слагаемому во втором равенстве (20) можно придать вид

$$-\rho\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{r}\times\nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\, dS$$

Воспользовавшись формулами (22) и теоремой Остроградского, найдем

$$\lim_{r\to\infty} \rho \iint_{\Sigma} \mathbf{r} \times \left(\frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 \mathbf{n} - \nabla\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) dS = - \lim_{r\to\infty} \frac{\rho}{r^3} \iint_{\Sigma} \mathbf{r} \times [\mathbf{e}\,(\mathbf{V}_e \cdot \mathbf{n}) -$$

$$- 2\mathbf{V}_e\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})]\, dS = - \lim_{r\to\infty} \left[\frac{\rho}{r^3}\, 3\,(\mathbf{V}_e \times \mathbf{e})\, \frac{4}{3}\, \pi r^3 \right] = -4\pi\rho\,(\mathbf{V}_e \times \mathbf{e})$$

Замечая, что $4\pi\rho\mathbf{e} = -\mathbf{K} - \rho D\mathbf{u}_c$ получим следующее значение для предела

$$\lim_{r\to\infty} \rho \iint_{\Sigma} \mathbf{r} \times \left(\frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 \mathbf{n} - \nabla\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) dS = \mathbf{V}_e \times \mathbf{K} + \rho D\,(\mathbf{V}_e \times \mathbf{u}_c)$$

Таким образом, для гидродинамических сил и их момента имеем

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \rho D \frac{d\mathbf{V}_e}{dt}, \quad \mathbf{M} = -\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{K} + \rho D \left(\mathbf{r}_c \times \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} \right) \tag{24}$$

Производные $d\mathbf{K}/dt$ и $d\mathbf{L}/dt$ выражаются следующим образом через производные $\partial\mathbf{K}/\partial t$ и $\partial\mathbf{L}/\partial t$, вычисленные относительно системы координат, неизменно связанной с движущимся телом:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K}, \qquad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} + \mathbf{V} \times \mathbf{K} \tag{25}$$

Поэтому в подвижной системе формулы (24) принимают вид

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K} + \rho D \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} \tag{26}$$

$$\mathbf{M} = -\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} - (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e) \times \mathbf{K} + \rho D \left(\mathbf{r}_e \times \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} \right) \tag{27}$$

Отметим некоторые частные случаи. Пусть тело неподвижно ($\mathbf{V} = 0$, $\boldsymbol{\Omega} = 0$) и на него набегает ускоренный поток, тогда из (26) и (27) имеем формулы

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t} + \rho D \frac{d\mathbf{V}_e}{dt}, \qquad \mathbf{M} = -\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{K} + \rho D \left(\mathbf{r}_c \times \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} \right) \tag{28}$$

в которых

$$K_x = -\mu_{11}V_{ex} - \mu_{21}V_{ey} - \mu_{31}V_{ez}, \qquad K_y = -\mu_{12}V_{ex} - \mu_{22}V_{ey} - \mu_{32}V_{ez} \quad \text{и т.д.}$$

Если же тело движется в жидкости, покоящейся на бесконечности ($V_e = 0$), то вместо (26) и (27) приходим к известным формулам. Наконец, если на движущееся тело набегает равномерный поступательный поток ($V_e = \mathrm{const}$), то силовое воздействие одинаково в абсолютном и относительном движениях.

Поступила 11 VIII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. J. The Sorces on a Body Placed in a Curved or Converging Stream of Fluid. Proc. Roy. Soc. CXX. 260, 1928.
2. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947 г.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950 г.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат. 1948 г.
5. Биркгофф. Гидродинамика. Изд. иностранной литературы, 1954 г.
6. Седов Л. И. О неустановившемся движении внутри жидкости тела вращения. Труды ЦАГИ, вып. 515, 1940 г.