Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

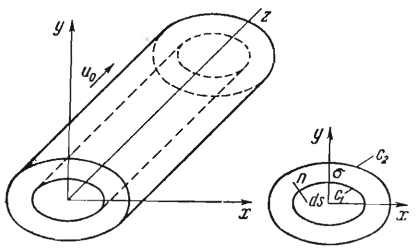
# ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА МЕЖДУ ДВУМЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Э. Л. Блох

(Москва)

1. Рассмотрим стационарное течение вязкого газа между двумя цилиндрическими поверхностями произвольной формы, образующие которых параллельны оси $z$ (фиг. 1). Пусть движение газа, заключенного между этими поверхностями, вызывается их движением вдоль образующих с разными, но постоянными скоростями. Очевидно, что стационарное движение возможно только при наличии теплопередачи через стенки — обе или одну, причем так, чтобы отводимая тепловая энергия равнялась механической энергии, затрачиваемой на поддержание движения цилиндров.

Не уменьшая общности решения, можно считать одну из цилиндрических поверхностей, например внутреннюю, неподвижной.




Фиг. 1

Указанная схема движения характерна тем, что все элементы, определяющие состояние газа, не меняются вдоль оси $z$, т. е. в уравнениях движения и теплового баланса исчезают члены, содержащие производные по $z$.

Кроме того, проекции скоростей газа

$$u_x = u_y = 0, \qquad u_z = u(x, y)$$

При этом уравнения движения и теплового баланса принимают вид [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad p = \text{const}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\,\frac{\partial}{\partial x}\left(J\,\frac{c_p}{N_{\mathrm{Pr}}}\,T + \frac{u^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\,\frac{\partial}{\partial y}\left(J\,\frac{c_p}{N_{\mathrm{Pr}}}\,T + \frac{u^2}{2}\right)\right] = 0 \tag{1.2}$$

где $p$ — давление, $\mu$ — коэффициент вязкости, $T$ — абсолютная температура, $J$ — механический эквивалент тепла, $N_{\mathrm{Pr}} = \mu c_p / \lambda$ — число Прандтля, $c_p$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении, $\lambda$ — коэффициент теплопроводности.

Таким образом, определение величин $u(x, y)$ и $T(x, y)$ сводится к решению уравнений (1.1) и (1.2) при граничных условиях: на поверхности первого (внутреннего) цилиндра $u = 0$, $T = T_1$, на поверхности второго цилиндра $u = u_0$, $T = T_2$.

Сравнивая уравнения (1.1) и (1.2), убеждаемся, что интегралом последнего может быть принята линейная функция скорости или

$$J\,\frac{c_p}{N_{\mathrm{Pr}}}\,T + \frac{u^2}{2} = A + Bu$$

где постоянные $A$ и $B$ определяются из граничных условий. Для $T$ получаем

$$T = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{u_0} + \frac{N_{\mathrm{Pr}} u_0}{2Jc_p}\right) u - \frac{N_{\mathrm{Pr}}}{2Jc_p}\,u^2 \tag{1.3}$$

Если один из цилиндров, например первый, в тепловом отношении абсолютно изолирован, то нормальная производная температуры на его поверхности равна нулю:

$$(\partial T \,/\, \partial n)_1 = 0$$

что приводит к условию между температурами $T_1$ и $T_2$:

$$T_1 = T_2 + \frac{N_{\mathrm{Pr}} u_0^2}{2Jc_p} \tag{1.4}$$

Если нетеплопроводен второй цилиндр, то $T_1$ и $T_2$ следует поменять местами.

Переходя к интегрированию уравнения (1.1), примем для $\mu$ известную степенную зависимость от температуры

$$\mu = \alpha T^n \quad (n = 0.76)$$

Тогда, принимая во внимание это соотношение и равенство (1.3), можно уравнение (1.1) представить в виде

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \tag{1.5}$$

где

$$H = \int_0^u T^n du = \int_0^u \left[ T_1 + \left( \frac{T_2 - T_1}{2u_0} + \frac{N_{\mathrm{Pr}} u_0}{2Jc_p} \right) u - \frac{N_{\mathrm{Pr}}}{2Jc_p} u^2 \right]^n du$$

и на поверхности первого цилиндра (контуре $C_1$) $H = 0$, а на поверхности второго цилиндра (контуре $C_2$) $H = H_0$

$$H_0 = u_0 \int_0^1 \left[ T_1 + \left( T_2 - T_1 + \frac{N_{\mathrm{Pr}} u_0^2}{2Jc_p} \right) v - \frac{N_{\mathrm{Pr}} u_0^2}{2Jc_p} v^2 \right]^n dv$$

Таким образом, определение распределения скоростей газа сводится к решению задачи Дирихле в области $\sigma$, заключенной между контурами $C_1$ и $C_2$, на которых искомая гармоническая функция $H$ принимает постоянные значения 0 и $H_0$. Но эта задача эквивалентна задаче об определении функции тока плоского движения идеальной несжимаемой жидкости, расположенной между контурами $C_1$ и $C_2$, которые являются линиями тока этого течения и на которых функция тока $\psi = H$ принимает соответственно значения 0 и $H_0$. Таким образом, рассматриваемый случай стационарного движения вязкого газа, так же как и в случае аналогичного движения вязкой несжимаемой жидкости[2], полностью сводится к хорошо изученной задаче о безвихревом движении идеальной несжимаемой жидкости.

Подсчитаем теперь силу трения, которая действует на одну из цилиндрических поверхностей (например, первую) со стороны газа. Рассмотрим элемент $ds$ контура $C_1$ и обозначим через $n$ нормаль, направленную внутрь области $\sigma$. Тогда на элемент рассматриваемой части поверхности (на единицу длины вдоль оси $z$) будет действовать сила, равная

$$\tau_1 ds = \mu_1 \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 ds$$

а на весь цилиндр сила трения

$$F_1 = \mu_1 \oint_{C_1} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 ds = \frac{\mu_1}{T_1^{\,n}} \oint_{C_1} \left( \frac{\partial H}{\partial n} \right)_1 ds$$

Предположим, что вместо газа между рассматриваемыми поверхностями заключена несжимаемая вязкая жидкость, скорость которой обозначим $u^*$. Тогда решение задачи сводится к решению уравнения (1.5), в котором вместо $H$ стоит величина $u^* = H^*$, принимающая на контуре $C_1$ значение 0, а на контуре $C_2$ значение $u_0$.

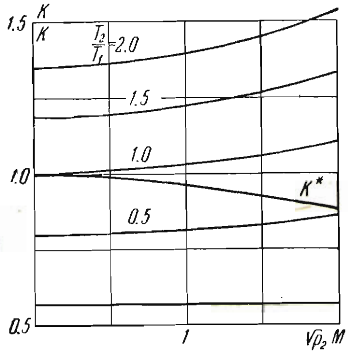
Очевидно, что гармонические функции $H$ и $H^*$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{H}{H^*} = \frac{H_0}{u_0}$$

и сопротивление трения первого цилиндра можно представить в виде

$$F_1^* = \mu_1^* \oint_{C_1} \left( \frac{\partial u^*}{\partial n} \right)_1 ds = \mu_1^* \frac{u_0}{H_0} \oint_{C_1} \left( \frac{\partial H}{\partial n} \right)_1 ds$$

Сравнивая силы сопротивления в обоих случаях при одинаковом значении коэффициента вязкости $\mu_1^* = \mu_1$, получаем




Фиг. 2

$$\frac{F_1}{F_1^*} = \frac{H_0}{T_1{}^n u_0} \tag{1.6}$$

Следовательно, для рассматриваемого типа движения отношение силы сопротивления при течении вязкого газа и вязкой несжимаемой жидкости не зависит от формы поперечного сечения цилиндров.

Заменив в последнем соотношении $H_0$ его значением и вводя число Маха, подсчитанное по температуре и скорости подвижного цилиндра

$$M = \frac{u_0}{\sqrt{\varkappa R T_2}}$$

запишем отношение (1.6) в следующем виде:

$$K = \frac{F_1}{F_1^*} = \int_0^1 \left\{ 1 + \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_2}{T_1} \frac{\varkappa - 1}{2} N_{\mathrm{Pr}} M^2 \right) v - \frac{T_2}{T_1} \frac{\varkappa - 1}{2} N_{\mathrm{Pr}} M^2 v^2 \right\}^n dv \tag{1.7}$$

Если неподвижный цилиндр нетеплопроводен, то, как было показано выше:

$$T_1 = T_2 + \frac{N_{\mathrm{Pr}} u_0{}^2}{2 J c_p} = T_2 \left( 1 + \frac{\varkappa - 1}{2} N_{\mathrm{Pr}} M^2 \right), \text{ или } \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{1 + {}^1/_2 (\varkappa - 1) N_{\mathrm{Pr}} M^2}$$

и для этого частного случая получаем

$$K^0 = \left( \frac{F_1}{F_1^*} \right)^0 = \int_0^1 \left[ 1 - \frac{{}^1/_2 (\varkappa - 1) N_{\mathrm{Pr}} M^2 v^2}{1 + {}^1/_2 (\varkappa - 1) N_{\mathrm{Pr}} M^2} \right]^n dv$$

график $K = F_1 / F_1^*$ для различных значений $T_2 / T_1$ и $\sqrt{N_{\mathrm{Pr}}} M$ и зависимость $K^0 = F_1 / F_1^*$ от $\sqrt{N_{\mathrm{Pr}}} M$ для $\varkappa = 1.4$ показана на фиг. 2.

2. В качестве простейшего примера рассмотрим движение газа между двумя параллельными плоскостями, из которых первая неподвижна и совпадает с плоскостью $xz$, а вторая двигается вдоль оси $z$ со скоростью $u_0$. Расстояние между стенками обозначим через $h$. Этот случай при дополнительном ограничении о нетеплопроводности неподвижной плоскости был недавно рассмотрен в работе [3] и при произвольных граничных условиях в работе [4].

Функция тока соответствующего безвихревого движения в этом случае имеет вид $\psi = C_1 y + C_2$, и, так как $\psi = 0$ при $y = 0$ и $\psi = H_0$ при $y = h$, находим

$$\psi = H = \frac{H_0}{h} y$$

Откуда для определения распределения скорости $u(y)$ по сечению получим

$$y = \frac{h}{H_0} H(u)$$

Так как для аналогичного течения несжимаемой вязкой жидкости сила трения на единицу площади пластинки равна $F_1^* = \mu_1 u_0 / h$, то для случая вязкого газа согласно выражению (1.7) получаем

$$F_1 = \frac{\mu_1 u_0}{h} K$$

В качестве второго примера рассмотрим движение вязкого газамежду двумя софокусными эллиптическими цилиндрами, образующие которых направлены вдоль оси $z$. Примем плоскость $xy$ за плоскость комплексного переменного $\zeta = x + iy$. Тогда конформное отображение области $\sigma$ на кольцо $R_1 \leqslant |\xi| \leqslant R_2$ дается, как известно, соотношением

$$\zeta = \frac{c}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)$$

где $2c$ — фокусное расстояние, $\xi$ — вспомогательная плоскость.

Если обозначить большие полуоси эллипсов внутреннего $a_1$ и внешнего $a_2$, то

$$R_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - c^2}}{c}, \qquad R_2 = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - c^2}}{c}$$

Функция тока плоского движения идеальной несжимаемой жидкости в этом случае имеет вид:

$$\psi = \frac{H_0}{\ln R_2 - \ln R_1} \ln \frac{|\xi|}{R_1}$$

и, следовательно, полагая $H = \psi$ для определения распределения скоростей $u(x, y)$ приходим к соотношению

$$\frac{\ln |\xi| - \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1} = \frac{H(u)}{H_0}$$

Для определения силы трения $F_1$ воспользуемся известным [2] выражением для $F_1^*$

$$F_1^* = \mu_1 \frac{2\pi u_0}{\ln R_2 - \ln R_1}$$

Откуда

$$F_1 = \mu_1 \frac{2\pi u_0}{\ln R_2 - \ln R_1} K$$

Для случая, когда эллиптические цилиндры вырождаются в коаксиальные круглые цилиндры, примем радиус внутреннего цилиндра равным 1, а внешнего $R$. В этом случае

$$\psi = H = \frac{H_0}{\ln R} \ln |\xi| = \frac{H_0}{\ln R} \ln r \qquad (r^2 = x^2 + y^2)$$

и для определения профиля скоростей и силы сопротивления соответственно получаем

$$\ln r = \ln R \frac{H(u)}{H_0}, \qquad F_1 = \mu_1 \frac{2\pi u_0}{\ln R} K$$

Точно таким же образом можно решить многочисленные задачи о стационарном движении вязкого газа между движущимися цилиндрическими поверхностями, решенные ранее для случая вязкой несжимаемой жидкости.

Поступила 20 IV 1955

## ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И., Христианович С. А., Алексеева Р. Н. Основы газовой динамики. Труды ЦАГИ, № 364, 1938.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. II. ГИТТЛ, 1948.
3. Гродзовский Г. Л. Течение вязкого газа между двумя движущимися параллельными плоскими стенками и между двумя вращающимися цилиндрами. ПММ, т. XIX, вып. 1, 1 5.
4. Тарапов И. Е. Решение задачи о движении вязкого газа между двумя движущимися параллельными пластинами с теплоотдачей, ПММ, т. XIX, в. 3, 1955 г.