Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ПРИТОК ГРУНТОВЫХ ВОД К СКВАЖИНАМ

В. К. Белякова

(Москва)

К решению задачи о неустановившемся притоке грунтовых вод к скважинам применяется метод источников и стоков. Задача решается в приближенной постановке, так как граничное условие, которое должно выполняться на свободной поверхности грунтовых вод, заранее неизвестной, сносится на плоскость xy.

1. Сток, помещенный в пласте неограниченной мощности. В том случае, когда рабочая часть скважины мала по сравнению с глубиной вскрытия пласта, ее можно заменить пространственным стоком.

Рассмотрим задачу о притоке грунтовых вод к стоку в однородном, неограниченно простирающемся вниз пласте. Предположим, что первоначальное положение грунтовых вод было горизонтальным. Сток помещен на глубине h под первоначальным уровнем свободной поверхности. Оси декартовой системы координат проведем так, что плоскость xy будет совпадать с первоначальным уровнем грунтовых вод а ось z, направленная вертикально вверх, пройдет через сток, который, таким образом, будет находиться в точке с координатами $(0, 0, -h)$.

Определение потенциала скоростей $\varphi(x, y, z, t)$, создаваемого стоком, следует произвесси при выполнении граничного условия [1]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = 0 \qquad \left(c = \frac{k}{m}\right) \tag{1.1}$$

где k — коэффициент фильтрации, m — пористость, и начальном условии

$$\varphi(x, y, 0, 0) = 0 \tag{1.2}$$

Форма свободной поверхности определяется уравнением

$$\varphi(x, y, 0, t) + kz = 0 \tag{1.3}$$

Наряду со стоком в точке $(0, 0, -h)$, поместим источник той же интенсивности в симметричной относительно плоскости $z = 0$ точке $(0, 0, h)$. Введем в рассмотрение функцию φ_1, определяемую через φ следующей формулой:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q(t)}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} - \frac{q(t)}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} + \varphi_1(x, y, z, t)$$

Отметим, что при $z = 0$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}}$$

В силу этого условие (1.1) перепишется так:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + c\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{cq(t)}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} \qquad \text{при} \quad z = 0$$

Эта функция обращается в нуль при $z = 0$, не имеет во всем нижнем полупространстве особенностей и обращается в нуль при $z = -\infty$. Отсюда следует, что функция $F(x, y, z, t) \equiv 0$.

Таким образом, необходимо определить гармоническую в нижнем полупространстве функцию φ_1, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+c\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\frac{cq(t)}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}=0 \quad \text{при} \quad z=0 \tag{1.4}$$

Имея в виду известную формулу

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}=\int_0^\infty e^{\lambda(z-h)}J_0(\lambda r)\,d\lambda \quad (r=\sqrt{x^2+y^2},\ z<0)$$

где $J_0(\lambda r)$ — функция Бесселя, ищем решение уравнения (1.4) в виде следующего определенного интеграла:

$$\varphi_1(x,y,z,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\lambda,t)\,J_0(\lambda r)\,e^{\lambda(z-h)}\,d\lambda$$

После определения функции

$$\varphi_1(x,y,z,t)=\frac{c}{2\pi}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\,e^{\lambda(z-h)}\,\lambda d\lambda\int_0^t q(\tau)\,e^{c\lambda(\tau-t)}d\tau$$

потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$ примет вид:

$$\varphi(x,y,z,t)=\frac{q(t)}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}-\frac{q(t)}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}+$$

$$+\frac{c}{2\pi}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\,e^{\lambda(z-h)}\,\lambda d\lambda\int_0^t q(\tau)\,e^{c\lambda(\tau-t)} \tag{1.5}$$

Для определения расхода $q(t)$ необходимы дополнительные условия.

а) Рассмотрим случай $q=q_0=\text{const}$. Тогда, производя в выражении (1.5) интегрирование по частям по переменному t, получим

$$\varphi(x,y,z,t)=\frac{q(t)}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}+\frac{q(t)}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}-$$

$$-\frac{q_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2\,(z-h-ct)^2}}$$

Эта формула позволяет потенциалу $\varphi(x, y, z, t)$ дать простую кинематическую интерпретацию: течение грунтовых вод можно рассматривать как течение, создаваемое двумя стоками интенсивности q_0, помещенными в точках $(0, 0, -h)$ и $(0, 0, h)$ и источником удвоенной интенсивности $2q_0$, перемещающимся по оси Oz вверх со скоростью, равной c, который в начальный момент времени ($t=0$) находился в точке $(0, 0, h)$. Свободная поверхность определится уравнением

$$z=-\frac{q_0}{2\pi k}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(h+ct)^2}}\right]$$

Вид свободной поверхности для значений $q=500$ см^3 сек$^{-1}$, $k=0{,}1$ см сек$^{-1}$, $m=0{,}33$, $h=5$ м показан на фиг. 1 для $t=10$, $t=60$; на ней показано и предельное положение свободной поверхности.

б) Рассмотрим случай $\varphi=\varphi_0=\text{const}$ на некоторой эквипотенциали, проходящей через точку $(a, 0, -h)$. На основании формулы (1.5) получим

$$q_0=q(t)+\mu\int_0^t q(\tau)\,\frac{d}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{a^2+[2h+c(t-\tau)]^2}} \tag{1.6}$$

где

$$q_0 = 4\pi\varphi_0 \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}\right]^{-1}, \qquad \mu = 2\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}\right]^{-1}$$

Уравнение (1.6) является уравнением Вольтерра второго рода для $q(t)$. Решение его запишем в виде ряда по степеням

$$q(t) = q_0 + \mu q_1(t) + \mu^2 q_2(t) + \cdots$$

Тогда

$$q_1 = q_0 \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + (2h + ct)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}\right]$$

и т. д. Считая параметр μ малым, ограничимся первым приближением, т. е. будем считать

$$q(t) = q_0 - q_0 \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4h^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2h + ct)^2}}\right] \mu$$

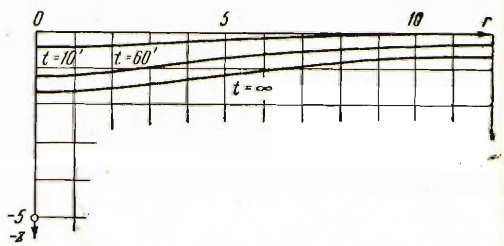
При $t \to \infty$ величина $q(t)$ будет стремиться к некоторому пределу

$$\lim_{t \to \infty} q(t) = q_0 \left(1 - \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4h^2} - a}\right)$$

Если a мало по сравнению с h, то

$$\lim_{t \to \infty} q(t) = q_0 \left(1 - \frac{a}{h}\right)$$

Таким образом, расход $q(t)$ с течением времени меняется в пределах $q_0 \geqslant q(t) \geqslant q_0 (1 - a/h)$. При малой величине a/h расход $q(t)$ практически можно считать величиной постоянной.



Фиг. 1

2. Приток грунтовых вод к стоку, расположенному над водоупором. В этом случае, кроме граничного условия (1.1), должно выполняться условие

$$\partial\varphi / \partial z = 0 \quad \text{при} \quad z = -b \tag{2.1}$$

где b — мощность пласта.

Потенциал течения грунтовых вод будем искать в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q(t)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 (z + h)^2}} + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \left[A(\lambda, t) e^{\lambda z} + B(\lambda, t) e^{-\lambda z}\right] d\lambda$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1) и (2.1) и начальному условию (1.2), получим

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q(t)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}} + \frac{q(t)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h + 2b)^2}} -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \frac{1 + e^{2\lambda(h-b)}}{1 + e^{-2\lambda b}} \left[e^{\lambda z} + e^{-\lambda(z+2b)}\right] d\lambda \int_0^t \left[\frac{dq}{dt} - c\lambda q(\tau)\right] e^{\mu(\tau - t)} d\tau$$

где $\mu = c\lambda \,\mathrm{th}\, \lambda b$.

а) Рассмотрим случай $q = q_0 = \mathrm{const}$. Потенциал имеет вид:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q_0}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}} + \frac{q_0}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2b + h)^2}} +$$

$$+ \frac{q_0}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda h} \frac{1 - e^{2\lambda(h-b)}}{1 - e^{-2\lambda b}} \left[e^{\lambda z} + e^{-\lambda(z+2b)}\right] J_0(\lambda r)\, d\lambda -$$

$$- \frac{q_0}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda h - \mu t} \frac{1 - e^{2\lambda(h-b)}}{1 - e^{-2\lambda b}} \left[e^{\lambda z} + e^{-\lambda(z+2b)}\right] J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

Уравнение свободной поверхности

$$z = \frac{q_0}{4\pi k}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(2b-h)^2}}\right\} -$$

$$-\frac{q_0}{4\pi k}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda h}(1-e^{-\mu t})(1-e^{-2\lambda b})\frac{1-e^{2\lambda(h-b)}}{1-e^{-2\lambda b}} J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

б) Пусть $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ на эквипотенциали, проходящей через точку $(a, 0, -h)$. В этом случае для расхода $q(t)$ получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$q(t) = f(t) + \alpha\int\limits_0^t q(\tau)K(t, \rho)\,d\tau \qquad \left(\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4(b-h)^2}}\right)$$

где

$$K(t, \tau) = \int\limits_0^\infty (\mu + c\lambda) J_0(\lambda r)\frac{1+e^{2\lambda(h-b)}}{1+e^{-2\lambda b}} e^{\mu(\tau-t)}\left[e^{-\lambda h} + e^{-\lambda(2b-h)}\right] d\lambda$$

$$f(t) = \alpha\left(4\pi\varphi_0 + q_0\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{1+e^{2\lambda(h-b)}}{1+e^{-2\lambda b}} e^{-\mu t}\left[e^{-\lambda h} + e^{-\lambda(2b-h)}\right]\right)$$

3. Приток к стоку в неоднородном грунте. Пусть сток помещен в неоднородный грунт, состоящий из двух пластов — верхнего с коэффициентом фильтрации k_1 и нижнего, простирающегося вниз до бесконечности, с коэффициентом фильтрации k_2. Обозначим потенциалы в слоях через φ_1 и φ_2 в верхнем и нижнем слоях соответственно. Потенциалы φ_1 и φ_2 должны удовлетворять следующим граничным условиям [1]: (1.1) и

$$\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2}, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \quad \text{при } z = -b \tag{3.1}$$

где b — мощность верхнего слоя.

а) Пусть сток в верхнем слое. Если сток расположен в верхнем слое, то искомые функции $\varphi_1(x, y, z, t)$ и $\varphi_2(x, y, z, t)$ представим в следующем виде:

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \frac{q(t)}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\left[A(\lambda, t)e^{\lambda z} + B(\lambda, t)e^{-\lambda z}\right] d\lambda$$

$$\varphi_2(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\, c(\lambda, t)\, e^{\lambda z} d\lambda$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1) и (3.1), получим

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \frac{q(t)}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}} + \frac{\delta n(t)}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(h-z-2b)^2}} +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\left[e^{\lambda z} + \delta e^{-\lambda(z+2b)}\right]\frac{1-e^{2\lambda(h-b)}}{1-\delta e^{-2\lambda b}} e^{-\lambda h} d\lambda \int\limits_0^t \left[c\lambda q(\tau) - \frac{dq}{dt}\right] e^{c\lambda\mu(\tau-i)}\,d\tau$$

$$\varphi_2(x, y, z, t) = \frac{(1-\delta)\,q(t)}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2b+h)^2}} +$$

$$+\frac{(1-\delta)}{4\pi}\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{\lambda(z-2b-h)}\frac{1-\delta e^{2\lambda(h-b)}}{1+\delta e^{-2\lambda b}}\, d\lambda\int\limits_0^t \left[c\lambda q(\tau) - \frac{dq}{dt}\right] e^{c\lambda\mu(\tau-t)}\,d\tau$$

где

$$= \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}, \qquad \mu = \frac{1-\delta e^{-2\lambda b}}{1+\delta e^{-2\lambda b}}$$

В случае $q = q_0 = \mathrm{const}$

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \frac{q_0}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} + \frac{q_0}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2b - h)^2}} +$$

$$+ \frac{q_0}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \left[e^{\lambda z} + \delta e^{-\lambda(2b+z)}\right] \frac{1 - \delta e^{2\lambda(h-b)}}{1 + \delta e^{-2\lambda b}} e^{-\lambda h} \left(1 - e^{-c\lambda\mu t}\right) \frac{d\lambda}{\mu}$$

$$\varphi_2(x, y, z, t) = \frac{(1-\delta) q_0}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2b + h)^2}} +$$

$$+ \frac{(1-\delta) q_0}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{\lambda(z - 2b - h)} \frac{1 - \delta e^{2\lambda(h-b)}}{1 + \delta e^{-2\lambda b}} \left(1 - e^{-c\lambda\mu t}\right) \frac{d\lambda}{\mu}$$

Уравнение свободной поверхности

$$z(x, z, t) = -\frac{q_0}{4\pi k_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} - \frac{q_0}{4\pi k_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (2b - h)^2}} -$$

$$- \frac{q_0}{4\pi k_1} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \left[1 + \delta e^{-2b\lambda}\right] e^{-\lambda h} \left(1 - e^{-c\mu\lambda t}\right) \frac{d\lambda}{\mu}$$

б) Сток в нижнем слое. Если сток расположен в нижнем слое, то искомые функции $\varphi_1(x, y, z, t)$ и $\varphi_2(x, y, z, t)$ представим в виде

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \left[A(\lambda, t) e^{\lambda z} + B(\lambda, t) e^{-\lambda z}\right] d\lambda$$

$$\varphi_2(x, y, z, t) = \frac{q(t)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) C(\lambda, t) e^{\lambda z} d\lambda$$

После удовлетворения граничных условий найдем

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \frac{\nu}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \left[e^{\lambda z} + \delta e^{-\lambda(2b+z)}\right] e^{-\lambda h} d\lambda \int_0^t \left[c\lambda q(\tau) - \frac{dq}{dt}\right] e^{\lambda\mu c(\tau - t)} d\tau +$$

$$+ \frac{\nu q(t)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \qquad \left(\nu = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right)$$

$$\varphi_2(x, y, z, t) = \frac{q(t)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} + \frac{(1-\nu) q(t)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2b - h)^2}} +$$

$$+ \frac{\nu(1-\delta) q(t)}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{\lambda(z-h)} d\lambda \int_0^t \left[c\lambda q(\varphi) - \frac{dq}{dt}\right] e^{\lambda\mu c(\tau - t)} d\tau$$

В случае $q = q_0 = \mathrm{const}$

$$\varphi_1 = \frac{\nu q_0}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \left[e^{\lambda z} + \delta e^{-\lambda(2b+z)}\right] e^{-\lambda h} \left[1 - e^{-\lambda\mu c t}\right] \frac{d\lambda}{\mu}$$

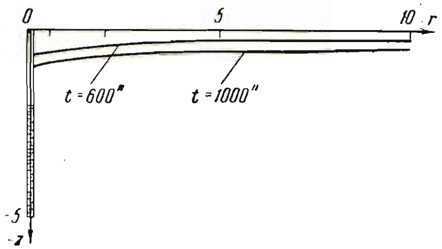
Уравнение свободной поверхности для этого случая будет

$$z = -\frac{\nu q_0}{4\pi k_1} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \left[1 - e^{-\lambda\mu c t}\right] e^{-\lambda h} \frac{[1 + \delta e^{-2b\lambda}]^2}{1 - \delta e^{-2b\lambda}} d\lambda$$

4. Скважина в однородном неограниченном пласте. Рассмотрим приток грунтовых вод к скважине, вскрывающей пласт на глубину h. Скважина имеет постоянную рабочую часть длины l.

Вместо потенциала $\varphi(x, y, z, t)$ определим функцию $\varphi_1(x, y, z, t)$, связанную с потенциалом соотношением

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-h+l}^{-h}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\xi)^2}} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{h-l}^{h}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2+y^2+(x-\xi)^2}} + \varphi_1$$



Фиг. 2

Граничное условие (1.1) для функции примет вид:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + c\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{c}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{h-l}^{h}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\xi)^2}}$$

при $z = 0$

Будем искать функцию φ_1 в виде следующего интеграла:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty A(\lambda, t)\,J_0(\lambda r)\,e^{-\lambda\xi}\,d\lambda$$

Искомый потенциал $\varphi(x, y, z, t)$ представится следующим выражением:

$$\varphi(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-h+l}^{-h}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\xi)^2}} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{h-l}^{h}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\xi)^2}} +$$

$$+\frac{c}{2\pi}\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\,e^{\lambda(z-\xi)}\,\lambda d\lambda\int\limits_{h-l}^{h}q(\xi, t)\,d\xi\int\limits_0^t e^{c\lambda(\tau-t)}\,d\tau$$

При решении конкретных задач необходимо задавать интенсивность стоков вдоль оси скважины или какие-нибудь другие условия, определяющие расход.

а) Рассмотрим случай $q(\xi, t) = q_0 = \text{const}$. Для потенциала $\varphi(x, y, z, t)$ получим выражение

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q_0}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{z-h}{\sqrt{x^2+y^2}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{z+l-h}{\sqrt{x^2+y^2}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc\,tg}\frac{z+l-ct-h}{\sqrt{x^2+y^2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{z-ct-h}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

Свободная поверхность представится выражением $\varphi(x, y, z, t)$:

$$z = -\frac{q_0}{2\pi k}\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{h+ct-l}{\sqrt{x^2+y^2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{h-l}{\sqrt{x^2+y^2}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{h+ct}{\sqrt{x^2+y^2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{h}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$

Вид свободной поверхности дан на фиг. 2 для $q_0 = 500$ см^3 сек$^{-1}$, $k = 0.1$ см сек$^{-1}$, $c = 0{,}3$ см сек$^{-1}$, $h = 5$ м, $l = 3$ м, $a = 0{,}1$ м.

б) Рассмотрим случай, когда $\varphi = \varphi_0$ на некоторой эквипотенциальной поверхности, проходящей через окружность $x^2 + y^2 = a^2$, $z = -h$. Далее предположим, что $q(\xi, t) = q(t)$. В этом случае получим

$$q_0 = q(t) + \lambda\int\limits_0^t q(\tau)\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+[2h+c(\tau-t)]^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+[2h-l+c(\tau-t)]^2}}\right\}d\tau$$

где

$$q_0 = 4\pi\varphi_0\gamma, \quad \lambda = 2c\gamma, \quad \frac{1}{\gamma} = \operatorname{arc\,tg}\frac{2h}{a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2h-l}{a}$$

Определим $q(t)$ рядом по степеням параметра λ:

$$q(t) = q_0 + \lambda q_1(t) + \lambda^2 q_2(t) + \ldots$$

Получим

$$q_1 = \frac{q_0}{c}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2h - l + ct}{a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2h - l}{a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2h + ct}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2h}{a}\right] \text{ и т. д.}$$

5. Скважина в однородном пласте ограниченной мощности. В пласте мощности b пробурена скважина, вскрывающая пласт на глубину h и имеющая постоянную рабочую часть длины l. Потенциал течения грунтовых вод будем искать в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-h+l}^{-h}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \xi)^2}} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty} J_0(\lambda r)[A(\lambda, t)\,e^{\lambda z} + B(\lambda, t)\,e^{-\lambda z}]\,d\lambda$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1) и (2.1), получим

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-h+l}^{-h}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \xi)^2}} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-h+l}^{h}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (2b + z - \xi)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty} J_0(\lambda r)\,d\lambda\int\limits_{0}^{t} dt\int\limits_{-h+l}^{-h}[e^{\lambda z} + e^{-\lambda(z+2b)}]\left[\frac{dq}{dt}(\tau, \xi) - c\lambda q(\tau, \xi)\right]e^{\lambda[\xi + c\mu(\tau - t)]}\,d\xi$$

6. Скважина в неоднородном пласте. В двуслойном грунте, имеющем коэффициенты фильтрации k_1 и k_2 верхнего и нижнего слоя соответственно, пробурена скважина, вскрывающая верхний слой на глубину h. Нижний слой предполагается простирающимся вниз до бесконечности. Мощность верхнего слоя $b > h$. Положим потенциалы течений в верхнем и нижнем слоях соответственно

$$\varphi_1 = \frac{-1}{4\pi}\int\limits_{-h+l}^{-l}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \xi)^2}} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty}[A(\lambda, t)\,e^{\lambda z} + B(\lambda, t)e^{-\lambda z}]\,d\lambda$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty} C(\lambda, t)\,e^{\lambda z}\,d\lambda$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), (3.1) и (3.2), получим

$$\varphi_1(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-h+l}^{-h}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \xi)^2}} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-h+l}^{-h}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2b - \xi)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} J_0(\lambda r)\,e^{\lambda z} + \delta e^{-\lambda(z+2b)}]\int\limits_{0}^{t} e^{\lambda c\mu(\tau - t)}\,d\tau\int\limits_{-h+l}^{-h}\left(\frac{dq}{dt} - c\lambda q\right)e^{\lambda\xi}d\xi$$

$$\varphi_2(x, y, z, t) = \frac{1 - \delta}{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty} J_0(\lambda r)\,e^{\lambda z}d\lambda\int\limits_{0}^{t} e^{\lambda c\mu(\tau - t)}\,d\tau\int\limits_{-h+l}^{-h}\left(\frac{dq}{dt} - c\lambda q\right)e^{\lambda\xi}d\xi -$$

$$-\frac{1 - \delta}{4\pi}\int\limits_{-h+l}^{-h}\frac{q(\xi, t)\,d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \xi)^2}}$$

При подготовки статьи к печати автору стала известна статья Боултона [2].

Поступила 6 IV 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод, ГИТТЛ. 1952.

2. Boulton N. The drawdown of the water table under non steady conditions neav a pumped well in an unconfined formation. Pros. Instn. Civil Engrs, part 3, 3, № 2, 564—579, 1954.