ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ В ГОЛОНОМНЫХ И НЕГОЛОНОМНЫХ ПАРАМЕТРАХ

М. И. Ефимов (Иваново)

В статье[1] М. Ф. Шульгин, поставив задачу показать ошибочность некоторых утверждений нашей статьи[2], выполнил это недостаточно аккуратно.

1. В указанной статье[1] М. Ф. Шульгин утверждает: «... Чаплыгин, пользуясь основным уравнением динамики в форме

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial q_i'}-\frac{\partial L_0}{\partial q_i}\right)\delta q_i=0 \qquad L_0=T_0+U \tag{1}$$

впервые в мировой литературе получил уравнения движения для механических систем с линейными неголомными связями, не вводя неопределенных множителей. Установленные для частного случая, когда коэффициенты $B_{\rho\mu}$ в уравнениях связей

$$q_\mu'=\sum_{\rho=m+1}^{n}B_{\rho\mu}q_\rho' \qquad (\mu=1,\ldots,m) \tag{2}$$

и кинетический потенциал L_0 не зависят от обобщенных координат $q_1,\ldots,q_m$, уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_\rho{}'}-\frac{\partial L}{\partial q_\rho}+\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\partial L_0}{\partial q_\mu{}'}\sum_{\nu=m+1}^{n}\left(\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\rho}-\frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_\nu}\right)q_\nu'=0 \tag{3}$$

где L обозначает функцию, полученную из L_0 исключением зависимых скоростей $q_1', \ldots, q_m'$ при помощи уравнений (2)». Это утверждение неясно. Во-первых, основное уравнение динамики имеет вид

$$\sum_i\{(m_ix_i''-X_i)\,\delta x_i+(m_iy_i''-Y_i)\,\delta y_i+(m_iz_i''-Z_i)\,\delta z_i\}=0 \tag{4}$$

где x_i, y_i, z_i — декартовы координаты материальной точки с массой m_i, X_i, Y_i, Z_i — проекции на декартовы оси силы, приложенной к m_i, а уравнение (1) является следствием уравнения (4) при строго определенных условиях.

Во-вторых, Чаплыгин в своей работе[3] не называет уравнение (1) основным уравнением динамики. Предполагая, что система определяется n параметрами $q_1,\ldots$ $\ldots, q_m$, на которые наложены связи (2), он говорит: «Начало Даламбера дает

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s'}-\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)\delta q_s=0 \tag{5}$$

где T — живая сила, U — силовая функция». Далее из вывода уравнения (3) видно, что у Чаплыгина T — первоначальная форма живой силы, выраженная через определяющие параметры $q_1,\ldots,q_n$ без принятия во внимание уравнений связей (2).

2. Условия, при которых уравнение (1) или (5) является следствием уравнения (4) и может быть принято за основное уравнение динамики состоят в следующем.

1. Во всякий момент времени механическая система определяется n параметрами $q_1,\ldots,q_n$ в том смысле, что декартовы координаты x_ν, y_ν, z_ν точек системы выражаются известными функциями этих параметров и времени в конечной форме

$$x_\nu=x_\nu(t_1,q_1,\ldots,q_n), \qquad y_\nu=y_\nu(t_1q_1,\ldots,q_n), \qquad z_\nu=z_\nu(t_1q_1,\ldots,q_n) \tag{6}$$

при этом предполагается, что переменные $q_1,\ldots,q_n$ входят в уравнение (6) существенным образом. В этом случае параметры $q_1,\ldots,q_n$ называются голономными.

2. В уравнении (5) живая сила T получена подстановкой в выражение

$$T=\sum\frac{m\nu}{2}(x_\nu'^2+y_\nu'^2+z_\nu'^2)$$

значений

$$x_\nu'=\frac{\partial x_\nu}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_k}q_k', \qquad y_\nu'=\frac{\partial y_\nu}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_k}q_k', \qquad z_\nu'=\frac{\partial z_\nu}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_k}q_k',$$

без использования каких-либо других соотношений.

3. Как следствие существенности переменных q_ν в формулах (6) выражение

$$\sum_\nu \frac{m_\nu}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_k}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_k}q_k'\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_k}q_k'\right)^2\right\}$$

представляет определенно положительную квадратичную форму всех n величин q_ν'.

3. Важность перечисленных условий можно подтвердить следующими фактами. Игнорирование первого условия о существовании зависимостей (6) при использовании уравнения (5) привело к ошибочным выводам в работе Н. П. Кастерина[4]. Пренебрежение условием, что T в уравнении (5) получено указанным путем без использования неинтегрируемых уравнений связи (2), привело Линделёфа к ошибочным уравнениям в задаче о движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости, что было замечено Чаплыгиным [3]. Ошибку, аналогичную ошибке Линделёфа, допустил Нейман [5] при составлении дифференциальных уравнений качения без скольжения тяжелого твердого тела по горизонтальной плоскости.

Необходимость существенного вхождения параметров в формулы (6) можно показать на следующем примере. Пусть точка массы m движется в плоскости. Декартовы координаты точки выражаются как функции параметров r, φ, σ

$$x = r\cos\varphi\,(\sin^2\sigma + \cos^2\sigma), \qquad y = r\sin\varphi \tag{7}$$

где r и φ — полярные координаты, а σ — секторная площадь.

Живая сила примет вид

$$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2) = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2)$$

Но так как $2\sigma' = r^2\varphi'$, то живую силу можно представить в форме

$$T' = \frac{m}{2}\left(r'^2 + \frac{4\sigma'^2}{r^2}\right)$$

Согласно перечисленным условиям справедливости уравнения (5) мы можем написать уравнение Лагранжа, беря живую силу в форме T, а не T', так как параметр σ входит в уравнение (7) не существенным образом, а T' получено с использованием, кроме уравнений (7), неинтегрируемого уравнения $2\sigma' = r^2\varphi'$.

4. Чаплыгин ввел свои уравнения (3) при рассмотренных выше условиях, и параметры $q_1, \ldots, q_n$ в этих уравнениях суть голономные координаты.

Поэтому в другой работе [6] задачу о плоском движении твердого тела он должен был решать, поскольку применял уравнения (3), в голономных определяющих параметрах ξ, η, φ при связи $\eta' = \xi' \operatorname{tg}\varphi$.

Но к определяющим параметрам он добавил неголономный параметр q соотношением $\xi' = q'\cos\varphi$, в результате чего вместо одного уравнения связей появилось два $\xi' = q'\cos\varphi$, $\eta' = q'\sin\varphi$. При этих связях для свободных параметров q и φ он применил уравнения (3), законность чего априори представляется неясной.

В нашей работе [2] эта задача решена в соответствии с теорией уравнений Чаплыгина в голономных координатах ξ, η, φ.

М. Ф. Шульгин установил [1], сравнивая наше решение с решением Чаплыгина, что эти решения по существу одинаковы. Следует отметить, что М. Ф. Шульгин исправил две вычислительные ошибки в решении Чаплыгина, после чего это решение приводится к виду, полученному нами. Однако об этом М. Ф. Шульгин умолчал в своей работе.

Поступила 4 X 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Шульгин. О динамических уравнениях Чаплыгина при существовании условных неинтегрируемых уравнений, ПММ, т. XVIII, в. 6, 1954 г., стр. 749—752.
2. М. И. Ефимов. К уравнениям Чаплыгина неголомных механических систем, ПММ, т. XVII, в. 6, 1953 г., стр. 748—750.
3. С. А. Чаплыгин. Собрание сочинений, т. I, стр. 159—171, Изд. АН СССР, Л. — 1933.

4. Н. П. Кастерин. Обобщение основных уравнений аэродинамики и электродинамики, Изд. АН СССР, 1937 г.
5. C. Neumann. Mathematische Annalen, XXVII, 1886.
6. С. А. Чаплыгин. К теории движения неголомных систем. Теорема о приводящем множителе. Собр. соч. т. I, стр. 207—215. Изд. АН СССР, Л. — 1933 г.