Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Ю. А. Демьянов

(Москва)

Уравнения неустановившегося пограничного слоя сжимаемого газа в плоскопараллельном случае представимы в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho F_x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(H+\frac{1}{2}v_x^2\right)+v_x\frac{\partial}{\partial x}\left(H+\frac{1}{2}v_x^2\right)+v_y\frac{\partial}{\partial y}\left(H+\frac{1}{2}v_x^2\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{N_{\rm Pr}}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{3}$$

где $p(x,t)$ — давление, ρ — плотность, H — энтальпия, F_x — составляющая внешних сил вдоль контура, $N_{\rm Pr}$ — число Прандтля, μ — коэффициент вязкости, v_x и v_y — составляющие скорости в направлении соответственно параллельном и перпендикулярном контуру тела. Предположим, что решение уравнений (1)—(3) ищется в классе функций, зависящих от двух переменных $\xi=x/t$, $\eta=y/\sqrt{x}$:

$$p=p(\xi),\ T_x=\frac{1}{t}X(\xi),\quad \rho=\rho(\xi,\eta),\quad v_x=V_x(\xi,\eta),\quad v_y=\frac{1}{\sqrt{x}}v_y^*(\xi',\eta) \tag{4}$$

Тогда уравнения (1)—(3) преобразуются к следующему виду

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial\rho}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial\eta}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial(\rho v_y^*)}{\partial\eta}=0 \tag{5}$$

$$(V_x-\xi)\frac{\partial V_x}{\partial\xi}+\left(\frac{v_y^*}{\xi}-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi}V_x\right)\frac{\partial V_x}{\partial\eta}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\xi}+X(\xi)+\frac{1}{\xi\rho}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\frac{\partial V_x}{\partial\eta}\right) \tag{6}$$

$$(V_x-\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(H+\frac{1}{2}V_x^2\right)+\left(\frac{v_y^*}{\xi}-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi}V_x\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(H+\frac{1}{2}V_x^2\right)=$$

$$=-\frac{\xi}{\rho}\frac{dp}{d\xi}+\frac{1}{\xi\rho}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu}{N_{\rm Pr}}\frac{\partial H}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{\xi\rho}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu V_x\frac{\partial V_x}{\partial\eta}\right) \tag{7}$$

Уравнения (5)—(7) должны удовлетворять следующим граничным условиям

$$V_x=v_y^*=0,\quad H=H_w(\xi)\quad \text{при}\quad \eta=0$$

$$V_x=V_{x\infty}(\xi),\quad H=H_\infty(\xi)\quad \text{при}\quad \eta=\infty \tag{8}$$

(индексами w и ∞ обозначены параметры соответственно на стенке и во внешнем потоке).

В переменных

$$\xi^*=\xi,\ \eta^*=\int_0^\eta\frac{\rho}{\rho^0}d\eta$$

где ρ^0 — некоторое фиксированное значение плотности, уравнения (5)—(7) и граничные условия для функций

$$H^*=H,\qquad V_x^*=V_x,\qquad V_y^*=(V_x-\xi)\frac{\partial\eta^*}{\partial\xi}+\frac{\rho}{\rho^0}\left(\frac{v_y^*}{\xi}-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi}V_x\right)$$

запишутся так

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial \xi^*} + \frac{V_x^*}{2\xi^*} + \frac{\partial V_y^*}{\partial \eta^*} = 0 \tag{9}$$

$$(V_x^* - \xi^*)\frac{\partial V_x^*}{\partial \xi^*} + V_y^* \frac{\partial V_x^*}{\partial \eta^*} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\xi^*} + X(\xi^*) + \frac{\nu^0}{\xi^*}\frac{\partial}{\partial \eta^*}\left(\frac{\mu\rho}{\mu^0\rho^0}\frac{\partial V_x^*}{\partial \eta^*}\right) \tag{10}$$

$$(V_x^* - \xi^*)\frac{\partial}{\partial \xi^*}\left(H^* + \frac{1}{2}V_x^{*2}\right) + V_y^*\frac{\partial}{\partial \eta^*}\left(H^* + \frac{1}{2}V_x^{*2}\right) =$$

$$= -\frac{\xi^*}{\rho}\frac{dp}{d\xi^*} + \frac{\nu^0}{N_{\mathrm{Pr}}\xi^*}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mu\rho}{\mu^0\rho^0}\frac{\partial H^*}{\partial \eta}\right) + \frac{\nu^0}{\xi^*}\frac{\partial}{\partial \eta^*}\left(\frac{\mu\rho}{\mu^0\rho^0}V_x^*\frac{\partial V_x^*}{\partial \eta^*}\right) \tag{11}$$

$$V_x^* = V_y^* = 0, \quad H^* = H_w(\xi^*) \quad \text{при} \quad \eta^* = 0$$

$$V_x^* = V_{x\infty}^*(\xi^*), \quad H^* = H_\infty(\xi^*) \quad \text{при} \quad \eta^* = \infty$$

Здесь

$$\nu^\circ = \frac{\mu^\circ}{\rho^\circ} \tag{12}$$

Уравнения неразрывности и количества движения несжимаемой жидкости в переменных $\xi^\times = x/t$, $\eta^\times = y/\sqrt{x}$ для функций

$$\overset{\times}{v}_x = v_x, \qquad \overset{\times}{v}_y = \frac{v_y}{\xi\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi}v_x$$

имеют вид

$$\frac{\partial \overset{\times}{v}_x}{\partial \xi^\times} + \frac{\overset{\times}{v}_x}{2\xi^\times} + \frac{\partial \overset{\times}{v}_y}{\partial \eta^\times} = 0 \tag{13}$$

$$(\overset{\times}{v}_x - \overset{\times}{\xi})\frac{\partial \overset{\times}{v}_x}{\partial \eta^\times} + \overset{\times}{v}_y\frac{\partial \overset{\times}{v}_x}{\partial \overset{\times}{\eta}} = -\frac{1}{\rho^\circ}\frac{dp}{d\overset{\times}{\xi}} + X(\xi^\times) + \frac{\nu^\circ}{\overset{\times}{\xi}}\frac{\partial^2 \overset{\times}{v}_x}{\partial \overset{\times}{\eta}} \tag{14}$$

с граничными условиями

$$\overset{\times}{v}_x = \overset{\times}{v}_y = 0 \quad \text{при} \quad \overset{\times}{\eta} = 0$$

$$\overset{\times}{v}_x = v_{x\infty}(\zeta^\times) \quad \text{при} \quad \overset{\times}{\eta} = \infty$$

Следовательно, для случая $dp/d\overset{\times}{\xi} = 0$ и $\mu\rho = \mu^\circ\rho^\circ$ решения уравнений (9), (10) и (13), (14) совпадают при одинаковых значениях $v_{x\infty}$ и ν°.

Аналогичный вывод справедлив для уравнений неустановившегося пограничного слоя сжимаемого газа на телах вращения, удовлетворяющих закону $R = cx^n$. К указанному классу автомодельных задач, очевидно, относятся следующие: формирование пограничного слоя при набегании равномерного потока на пластину, клин, конус, при течении газа в круглой трубе от мгновенно получившего скорость поршня как и при наличии поверхности разрыва, так и без нее.

Поступила 6 IX 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. ПММ, т. 6, в. 1942.
2. Сагомонян А. Я. Метод характеристик для неустановившегося осесимметричного автомодельного движения жидкости. Вестник Московского университета, т. XII, № 2, 1953.
3. Черный Г. Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва, Известия ОТН, АН ССР, № 12, 1954.