Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

И. Н. Кочина

(Москва)

В неопубликованной работе «О течении несжимаемой жидкости параллельно плоскости» [1] С. А. Чаплыгин ставит задачу обобщения плоско-параллельных течений идеальной несжимаемой жидкости, сохраняя лишь то их свойство, чтобы каждая частица имела скорость, параллельную данной плоскости. Кроме того, он считает, что действующие на жидкость силы имеют потенциал $U(x, y, z)$, а движение стационарно.

В первом разделе предлагаемой работы излагаются результаты С. А. Чаплыгина, полученные другим способом, повидимому, более простым.

Во втором разделе рассматриваются на поверхности чаплыгинского потока некоторые волны малой амплитуды, вид которых выбран частным образом.

1. Уравнения гидродинамики в сделанных выше предположениях можно записать в виде

$$v^2 \frac{\partial u / v}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad -v^2 \frac{\partial u / v}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad 0 = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{1}$$

где

$$P = U(x, y, z) - p / \rho$$

Отсюда следует, что $P = P(x, y)$, а $u / v = f(\alpha, z)$, где f — неопределенная пока функция, а $\alpha(x, y) = C$ — интеграл уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial y} dx - \frac{\partial P}{\partial x} dy = 0$$

Рассмотрим потенциальные в «плоском смысле» движения в плоскостях $z = \text{const}$, т. е. предположим, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Вводя потенциал скоростей течения и функцию тока, имеем

$$u = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} = -\frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x} \tag{2}$$

Функции φ и ψ — гармонические по x и y, т. е.

$$\varphi + i\psi = f_1(x + iy, z)$$

где f_1 — аналитическая функция от $\zeta = x + iy$. Дифференцируя последнее равенство по ζ, получим

$$u - iv = f_2(\zeta, z) = e^{f_3(\zeta, z)}$$

$$f_3(\zeta, z) = \tau(x, y; z) - is(x, y; z)$$

а $\tau(x, y; z)$ и $-s(x, y; z)$ — гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши—Римана

$$\frac{}{\partial x} = -\frac{\partial s}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} \tag{3}$$

Следовательно, компоненты скорости могут быть представлены в виде

$$u = e^{\tau(x,\ y;\ z)} \cos s\,(x,\ y;\ z), \qquad v = e^{\tau(x,\ y;\ z)} \sin s\,(x,\ y;\ z) \tag{4}$$

Из уравнений (1), используя (4) и (3), получим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = e^{2\tau}\frac{\partial \tau}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = e^{2\tau}\frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{5}$$

Отсюда следует, что $\tau = \tau\,(x,\ y)$. Поэтому из условий (3) имеем

$$s\,(x,\ y;\ z) = s_1\,(x,\ y) - \theta\,(z)$$

и окончательно

$$v = e^{\tau(x,\ y)} \cos\,[s_1\,(x,\ y) - \theta\,(z)], \qquad v = e^{\tau(x,\ y)} \sin\,[s_1\,(x,\ y) - \theta\,(z)] \tag{6}$$

Отсюда следует теорема Чаплыгина: трехмерное течение, у которого вертикальная компонента скорости $w = 0$, а $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x$ в любой плоскости, параллельной плоскости $z = 0$, может быть получено из всякого плоско-параллельного потенциального течения, заданного в плоскости $z = 0$ поворотом векторов скорости на угол $\theta\,(z)$, постоянный для всей плоскости и представляющий собой произвольную функцию от z. Абсолютная величина скорости не меняется при переходе от плоскости к плоскости.

2. Рассмотрим волны малой амплитуды (заданные определенным образом) на поверхности тяжелой жидкости, текущей указанным выше образом с постоянным модулем скорости c (в предположении, что на жидкость действует только сила тяжести), т. е. рассмотрим течение вида

$$\begin{aligned} u &= c\cos\theta\,(z) + f_1\,(z)\,e^{i(\sigma t + kx + my)} \\ v &= c\sin\theta\,(z) + f_1\,(z)\,e^{i(\sigma t + kx + my)} \\ w &= \qquad\qquad\quad f_3\,(z)\,e^{i(\sigma t + kx + my)} \\ \frac{p}{\rho} &= -gz + f_4\,(z)\,e^{i(\sigma t + kx + my)} \end{aligned} \tag{7}$$

Считая функции $f_1\,(z)$, $f_2\,(z)$, $f_3\,(z)$, $f_4\,(z)$ настолько малыми, что их произведениями и квадратами можно пренебречь, легко получить из уравнений (1) функции $f_1\,(z)$, $f_2\,(z)$, $f_3\,(z)$, выраженные через $f_4\,(z)$ и $f_4'\,(z)$, а из уравнения неразрывности — уравнение для определения $f_4\,(z)$

$$f_4''\,(z) - \frac{2K'\,(z)}{K\,(z)}\,f_4'\,(z) - (k^2 + m^2)\,f_4\,(z) = 0 \tag{8}$$

где

$$K\,(z) = c\,(k\cos\theta\,(z) + m\sin\theta\,(z)) + \sigma$$

Пусть жидкость ограничена сверху свободной поверхностью, которую зададим в виде

$$z = Be^{i(\sigma t + kx + my)}$$

При этом имеем следующее граничное условие:

$$f_4'\,(z) - \frac{K^2\,(z)}{g}\,f_4\,(z) = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0 \tag{9}$$

Если жидкость имеет конечную глубину h, то на дне выполняется условие

$$f_4'\,(z) = 0 \qquad \text{при} \quad z = -h \tag{10}$$

Задача сводится, таким образом, к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (8) с граничными условиями (9) и (10).

Заменой $f_4\,(z) = K\,(z)\,\varphi\,(z)$ можно привести уравнение (8) к виду, не содержащему первой производной:

$$\varphi''\,(z) - \left[\frac{2K'^2\,(z) - K''\,(z)\,K\,(z)}{K^2\,(z)} + k^2 + m^2\right]\varphi\,(z) = 0 \tag{11}$$

с граничными условиями

$$\varphi'(z) - \frac{K^2(z) - gK'(z)}{gK(z)}\,\varphi(z) = 0 \qquad \text{при } z = 0 \tag{12}$$

$$K(z)\,\varphi'(z) + K'(z)\,\varphi(z) = 0 \qquad \text{при } z = -h \tag{13}$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Положим $\sigma = m = 0$, т. е. рассмотрим установившееся волны, распространяющиеся вдоль оси x. Уравнение (11) при этом принимает вид:

$$\varphi''(z) - [\theta''(z)\operatorname{tg}\theta(z) + \theta'^2(z)(1 + 2\operatorname{tg}^2\theta(z)) + k^2]\,\varphi(z) = 0 \tag{14}$$

Найдем решение этого уравнения при некоторых частных видах функции $\theta(z)$ и установим связь между скоростью основного течения c и длиной волны $\lambda = 2\pi/k$.

а) Пусть $\theta(z)$ подчиняется условию

$$\theta''(z)\operatorname{tg}\theta(z) + \theta'^2(z)[1 + 2\operatorname{tg}^2\theta(z)] = L^2 = \text{const} \tag{15}$$

Решением этого уравнения служит функция

$$\cos\theta(z) = -\frac{\operatorname{sh} L\alpha}{\operatorname{sh} L(z-\alpha)}$$

где α — постоянная интегрирования.

Если жидкость неограниченно простирается в глубину, то, решая уравнение (14) с граничным условием (12) и переходя затем к функции $f_4(z)$, получаем, что

$$f_4(z) = -\frac{Bg\operatorname{sh} L\alpha}{\operatorname{sh} L(z-\alpha)}\,e^{\Lambda z} \qquad \left(\Lambda = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + L^2}\right) \tag{16}$$

а связь между скоростью c и длиной волны принимает вид:

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\left[\frac{\lambda L}{2\pi}\operatorname{cth} L\alpha + \sqrt{1 + \left(\frac{L\lambda}{2\pi}\right)^2}\,\right] \tag{17}$$

Если глубина жидкости конечна и равна h, то имеем

$$f_4(z) = -\frac{Bg\operatorname{sh} L\alpha}{\operatorname{sh} L(z-\alpha)}\left[\operatorname{ch}\Lambda z + \frac{L - \Lambda\operatorname{th} L(\alpha+h)\operatorname{th}\Lambda h}{L\operatorname{th}\Lambda h - \Lambda\operatorname{th} L(\alpha+h)}\operatorname{sh}\Lambda z\right] \tag{18}$$

$$c^2 = \frac{g\lambda^2}{4\pi^2}\left[\frac{L}{\operatorname{th} L\alpha} + \frac{\Lambda\operatorname{th} L(\alpha+h)\operatorname{th}\Lambda h - L}{\Lambda\operatorname{th} L(\alpha+h) - L\operatorname{th}\Lambda h}\right] \tag{19}$$

При $h \to \infty$ формула (19) переходит в (17).

В случае очень малой глубины h получаем из (19) зависимость между c^2 и h:

$$c^2 = gh(1 + Lh\operatorname{cth} L\alpha) \tag{20}$$

б) Положив в уравнении (15) $L = 0$, будем иметь

$$\cos\theta(z) = \frac{1}{1 - \alpha z}$$

Здесь параметр α характеризует быстроту поворота скорости с глубиной.

Для бесконечно глубокой жидкости имеем в этом случае

$$f_4(z) = \frac{Bg}{1-\alpha z}\exp\frac{2\pi z}{\lambda}, \qquad c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\left(1 + \frac{\alpha\lambda}{2\pi}\right) \tag{21}$$

Для жидкости глубиной h

$$f_4(z) = \frac{Bg}{1-\alpha z}\left[\operatorname{ch}\frac{2\pi z}{\lambda} + \frac{2\pi(1+\alpha h)\operatorname{th}\frac{2\pi h}{\lambda} - \alpha\lambda}{2\pi(1+\alpha h) - \alpha\lambda\operatorname{th}\frac{2\pi h}{\lambda}}\operatorname{sh}\frac{2\pi z}{\lambda}\right] \tag{22}$$

$$c^2 = \frac{g\lambda^2}{4\pi^2}\left[\alpha + \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{2\pi\operatorname{th}\frac{2\pi h}{\lambda} - \frac{\alpha\lambda}{1+\alpha h}}{2\pi - \frac{\alpha\lambda}{1+\alpha h}\operatorname{th}\frac{2\pi h}{\lambda}}\right] \tag{23}$$

Для малых значений h (23) заменяется уравнением

$$c^2 = gh(1 + \alpha h)$$

в котором скорость не зависит от длины волны.

в) Найдем $\theta(z)$ из условия

$$\theta''(z) \operatorname{tg}\theta(z) + \theta'^2(z)\left[1 + 2\operatorname{tg}^2\theta(z)\right] = -\frac{1}{4(a-z)^2}$$

Решая это уравнение относительно $\theta(z)$, получим

$$\cos\theta(z) = \sqrt{\frac{a}{a-z}}$$

В этом случае уравнение (14) имеет вид:

$$\varphi''(z) + \left[\frac{1}{4(a-z)^2} - k^2\right]\varphi(z) = 0$$

и может быть приведено к уравнению Бесселя, решая которое, получим

$$f_4(z) = gB\,\frac{K_1\left[\frac{2\pi}{\lambda}(a+h)\right] I_0\left[\frac{2\pi}{\lambda}(a-z)\right] - I_1\left[\frac{2\pi}{\lambda}(a+h)\right] K_0\left[\frac{2\pi}{\lambda}(a-z)\right]}{K_1\left[\frac{2\pi}{\lambda}(a+h)\right] I_0\left[\frac{2\pi a}{\lambda}\right] - I_1\left[\frac{2\pi}{\lambda}(a+h)\, K_0\left[\frac{2\pi a}{\lambda}\right]\right.}$$

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\,\frac{K_1\left[\frac{2\pi}{\lambda}(a+h)\right] I_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) - I_1\left[\frac{2\pi}{\lambda}(a+h)\right] K_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)}{K_1\left[\frac{2\pi}{\lambda}(a+h)\right] I_0\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) - I_1\left[\frac{2\pi}{\lambda}(a+h)\right] K_0\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)}$$

Здесь I_n и $K_n (n = 0, 1)$ — функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента.

Автор приносит глубокую благодарность Л. Н. Сретенскому, под руководством которого выполнялась работа.

Поступила 13 V 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч а п л ы г и н С. А. О течении несжимаемой жидкости параллельно плоскости. Неопубликованная работа. Хранится в ЦАГИ, в архиве музея Н. Е. Жуковского.