

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ
В ВЕРТИКАЛЬНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

Е. М. Жуковичкий

(Молотов)

Рассматривается задача об условиях возникновения тепловой конвекции в вертикальном эллиптическом цилиндре, подогреваемом снизу. Задача решается приближенно методом Галеркина.

§ 1. Основные уравнения. Если в подогреваемой снизу жидкости вертикальный градиент температуры превосходит первый критический, то механическое равновесие жидкости оказывается неустойчивым, в жидкости развивается возмущение определенного вида. Уравнения для нахождения возникающих в жидкости возмущений имеют вид (см. [1]):

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta g \Upsilon T = 0 \quad (1.1)$$

$$\chi \Delta T = A \Upsilon \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость жидкости, T и p — возмущения температуры и давления, A — градиент температуры в жидкости в состоянии механического равновесия, ρ — плотность жидкости, ν , χ , β — соответственно коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения, g — ускорение силы тяжести, Υ — единичный вектор, направленный по g .

Для возмущения температуры в массиве T_M будем иметь

$$\Delta T_M = 0 \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1) — (1.3) нужно решать при следующих граничных условиях (значения величин на границе будем обозначать звездочкой):

$$(\mathbf{v})^* = 0, \quad (T)^* = (T_M)^*, \quad \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^* = \kappa_M \left(\frac{\partial T_M}{\partial n} \right)^*, \quad (T_M)_\infty = 0 \quad (1.4)$$

Здесь κ и κ_M — коэффициенты теплопроводности жидкости и массива.

В работе [2] показано, что для решения системы (1.1) — (1.3) может быть применен метод Галеркина. Схема применения метода такова. Необходимо прежде всего представить скорость в виде отрезка ряда

$$\mathbf{v} = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \dots + c_n \Phi_n \quad (1.5)$$

Каждая функция Φ_i должна удовлетворять граничному условию для скорости и уравнению непрерывности. Подставив (1.5) в первое из уравнений (1.2), находим температуру, решая его вместе с уравнением (1.3) при соответствующих граничных условиях. Подставляя затем \mathbf{v} и T в (1.1), умножаем его скалярно на каждую функцию Φ_i и интегрируем по объему жидкости. В результате получаем систему уравнений метода Галеркина для рассматриваемой задачи (см. [2], где эта система написана в безразмерном виде):

$$\nu \int \Phi_i \cdot \Delta \mathbf{v} dV - \beta g \int \Phi_i \Upsilon T dV = 0 \quad (1.6)$$

Градиент температуры входит в эту систему как множитель при T [через правую часть первого из уравнений (1. 2)]. Условие разрешимости этой однородной системы — равенство нулю ее определителя — дает приближения к первым собственным значениям задачи.

§ 2. Решение. Пусть жидкость заполняет бесконечный вертикальный эллиптический цилиндр, окруженный массивом. Обозначим полуоси эллиптического сечения цилиндра через a и b , направим оси координат x и y по осям эллипса, ось z — по оси цилиндра вертикально вверх.

В случае вертикального эллиптического цилиндра (как и в частном случае вертикального кругового цилиндра) наибольший интерес представляет исследование возмущений антисимметричного вида (жидкость в одной половине полости поднимается в другой опускается). Осесимметричные возмущения (жидкость в центре полости поднимается, по стенкам опускается) соответствуют более высоким градиентам температуры и в эксперименте не наблюдаются [3, 4].

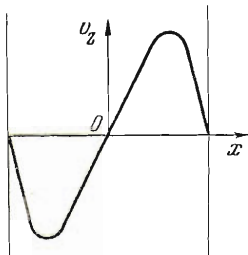
В вертикальном эллиптическом цилиндре возможны два вида антисимметричных возмущений: разбиение цилиндра восходящим и нисходящим потоками жидкости может произойти по вертикальной плоскости, проходящей как через малую, так и через большую оси эллипса. Наиболее просто антисимметричный поток жидкости в вертикальном эллиптическом цилиндре может быть описан в декартовых координатах следующим образом:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) P(x, y) \quad (2.1)$$

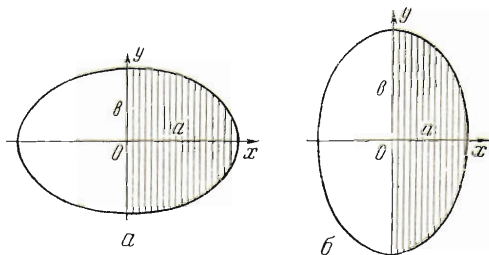
где $P(x, y)$ — полином, нечетный относительно x . В первом приближении имеем просто

$$v_z = c_1 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) x \quad (2.2)$$

Распределение вертикальной составляющей скорости в плоскости xz изображено на фиг. 1. Формула (2.2) охватывает оба возможных вида антисимметричных возму-



Фиг. 1



Фиг. 2

щений: первый осуществляется при $a/b > 1$ (разбиение происходит по малой оси, фиг. 2, а), второй — при $a/b < 1$ (разбиение по большой оси, фиг. 2, б). При $a = b$ эллипс вырождается в окружность и различие между двумя возможными видами возмущений исчезает.

Уравнение для возмущения температуры в жидкости после подстановки (2.2) принимает вид:

$$\Delta T = \frac{A}{\chi} c_1 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) x \quad (2.3)$$

В соответствии с видом правой части (2.3) ищем возмущение температуры T в декартовых координатах в виде полинома пятой степени соответствующей симметрии:

$$T = \frac{A}{\chi} c_1 (a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + a_4 x^4 + a_5 y^4 + a_6 x^2 y^2) x \quad (2.4)$$

Подставив (2.4) в уравнение (2.3), приходим к выводу, что выражение (2.4) будет являться решением этого уравнения, если коэффициенты будут связаны тремя условиями:

$$6a_2 + 2a_3 = 1, \quad 20a_4 + 2a_6 = -\frac{1}{a^2}, \quad 12a_5 + 6a_6 = -\frac{1}{b^2}$$

Для удовлетворения граничных условий в (2.4) теперь остаются три независимых коэффициента. Переходя в (2.4) к эллиптическим координатам u, v по формулам

$$x = c \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = c \operatorname{sh} u \sin v$$

($2c$ — межфокусное расстояние), получаем

$$\begin{aligned} T = \frac{A}{\chi} c_1 & \left[(a_1 c \operatorname{ch} u + \frac{3}{4} a_2 c^3 \operatorname{ch}^3 u + \frac{1}{4} a_3 c^3 \operatorname{ch} u \operatorname{sh}^2 u + \frac{5}{8} a_4 c^5 \operatorname{ch}^5 u + \frac{1}{8} a_5 c^5 \operatorname{ch} u \operatorname{sh}^4 u + \right. \\ & + \frac{1}{8} a_6 c^5 \operatorname{ch}^3 u \operatorname{sh}^2 u) \cos v + (\frac{1}{4} a_2 c^3 \operatorname{ch}^3 u - \frac{1}{4} a_3 c^3 \operatorname{ch} u \operatorname{sh}^2 u + \frac{5}{16} a_4 c^5 \operatorname{ch}^5 u - \\ & - \frac{3}{16} a_5 c^5 \operatorname{ch} u \operatorname{sh}^4 u - \frac{1}{16} a_6 c^5 \operatorname{ch}^3 u \operatorname{sh}^2 u) \cos 3v + (\frac{1}{16} a_4 c^5 \operatorname{ch}^5 u + \\ & \left. + \frac{1}{16} a_5 c^5 \operatorname{ch} u \operatorname{sh}^4 u - \frac{1}{16} a_6 c^5 \operatorname{ch}^3 u \operatorname{sh}^2 u) \cos 5v \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для нахождения температуры в массиве T_M необходимо решить уравнение (1.3). Общее решение этого уравнения, стремящееся к нулю на бесконечности (при $u \rightarrow \infty$), имеет вид:

$$T_M = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{-nu} \cos nv + c_n e^{-nu} \sin nv) \quad (2.6)$$

Входящие в (2.5) и (2.6) постоянные коэффициенты должны быть определены из граничных условий, которые в эллиптических координатах u, v записываются следующим образом:

$$T = T_M, \quad \alpha \frac{\partial T}{\partial u} = \alpha_M \frac{\partial T_M}{\partial u} \quad \text{при } u = R$$

Заметим, что на границе $c \operatorname{ch} R = a, c \operatorname{sh} R = b$ при $u = R$. Удовлетворяя граничным условиям, получаем

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{12KLM} [(5a^9b^2 + 21a^5b^6 + 38a^7b^4) + \alpha (60a^8b^3 + 50a^4b^7 + \\ & + 143a^6b^5 + 3a^{10}b) + \alpha^2 (130a^7b^4 + 24a^3b^8 + 147a^5b^6 + 19a^9b^2) + \\ & + \alpha^3 (67a^6b^5 + 3a^2b^9 + 34a^4b^7 + 24a^8b^3)] \\ a_2 &= \frac{1}{6LM} [(5a^6b^2 + 15a^2b^6 + 28a^4b^4) + \alpha (36a^5b^3 + 2a^7b + 8ab^7 + 50a^3b^5) \\ & + \alpha^2 (27a^4b^4 + 8a^6b^2 + b^8 + 12a^2b^6)] \\ a_6 &= -\frac{1}{6M} [(3a^3 + 5ab^2) + \alpha (7a^2b + b^3)] \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} K &= a + \alpha b, & L &= (a^3 + 3ab^2) + \alpha (3a^2b + b^3) \\ M &= (a^5 + 5ab^4 + 10a^3b^2) + \alpha (5a^4b + b^5 + 10a^2b^3) \end{aligned}$$

Все коэффициенты $c_n = 0$; из коэффициентов b_n отличны от нуля только b_1, b_3, b_5 , однако они не потребуются в дальнейшем и потому здесь не приводятся.

Вычислив возмущение температуры T , можно перейти к составлению системы (1.6), которая в нашем случае (первое приближение) сводится только к одному уравнению. При вычислении входящих в (1.6) интегралов оказывается полезной формула (см., например, [5], стр. 239)

$$\int_S \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) x^{2m} y^{2n} dS = \frac{\Gamma(m + 1/2) \Gamma(n + 1/2)}{(m + n + 1)!} a^{2m+1} b^{2n+1}$$

Здесь S — площадь эллиптического сечения цилиндра.

После вычислений получаем условие разрешимости системы (1.6), которое оказывается возможным представить в следующем виде

$$\frac{g\beta}{\nu\chi} Aa^2b^2 = \frac{240}{P(h)} \{ (3 + h^2) [(15h^3 + 35h^5 + 13h^7 + h^9) + \\ + \alpha(23h^2 + 91h^4 + 69h^6 + 9h^8) + \alpha^2(9h + 69h^3 + 91h^5 + 23h^7) + \\ + \alpha^3(1 + 13h^2 + 35h^4 + 15h^6)] \}$$

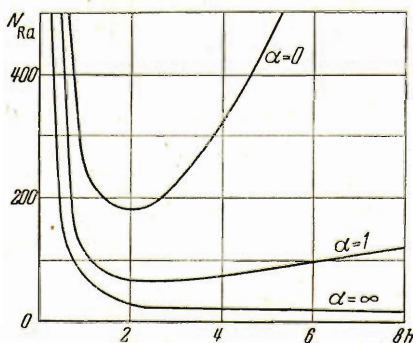
Здесь

$$P(h) = (81h^5 + 158h^7 + 17h^9) + \alpha(287h^4 + 788h^6 + 315h^8 + 18h^{10}) + \\ + \alpha^2(144h^3 + 927h^5 + 835h^7 + 142h^9) + \alpha^3(18h^2 + 217h^4 + 472h^6 + 189h^8) \quad (2.7)$$

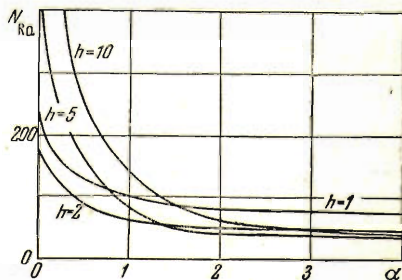
причем

$$h = \frac{a}{b}, \quad \alpha = \frac{\chi}{\chi_M}$$

Выражение (2.7) определяет критический градиент температуры, при котором покоящаяся в вертикальном эллиптическом цилиндре жидкость становится неустойчивой относительно возмущений антисимметричного вида (2.2). Это выражение представляет собой произведение числа Грассхофа N_{Gr} на число Прандтля N_{Pr} (число



Фиг. 3



Фиг. 4

Релея $N_{Ra} = N_{Pr}N_{Gr}$; в качестве характеристического размера эллипса в него входит \sqrt{ab} (среднее геометрическое из полуосей). Зависимость числа Релея от отношения $h = a/b$ для трех значений $\alpha = 0, 1, \infty$ изображена на фиг. 3. На фиг. 4 представлена зависимость числа Релея N_{Ra} от α для $h = 1, 2, 5, 10$.

Перейдем к исследованию выражения (2.7). Установим прежде всего, какой из двух возможных в вертикальном эллиптическом цилиндре видов антисимметричных возмущений соответствует меньшему градиенту температуры.

Рассмотрим два разных положения одного и того же эллиптического цилиндра (фиг. 2, а и б). По отношению к каждому такому положению возмущение (2.2) является возмущением разного вида. Пусть для первого положения $(a_1/b_1) = h > 1$, тогда для второго $a_2/b_2 = h^{-1} < 1$; площади эллипса в обоих положениях одинаковы: $\pi a_1 b_1 = \pi a_2 b_2$.

Критические градиенты температуры, соответствующие возмущениям первого и второго вида, находим из (2.7):

$$A_1 = \frac{\nu\chi}{g\beta a_1^2 b_1^2} \Phi(h, \alpha), \quad A_2 = \frac{\nu\chi}{g\beta a_2^2 b_2^2} \Phi(h^{-1}, \alpha)$$

Здесь через $\Phi(h, \alpha)$ обозначена правая часть (2.7). Найдём разность A_1 и A_2 . После вычислений получаем

$$A_1 - A_2 = \frac{\nu\chi}{g\beta a_1^2 b_1^2} (1 - h) f(h, \alpha)$$

причем для всех положительных значений h и α $f(h, \alpha) > 0$ и, следовательно,

$$A_1 \leq A_2 \quad (2.8)$$

Знак равенства соответствует случаю $h = 1$ (эллиптический цилиндр вырождается в круговой, различие между двумя видами антисимметричных возмущений исчезает).

Заметим, что аналогичный вывод может быть сделан и непосредственно из фиг. 3. В самом деле, ввиду быстрого роста функции $\Phi(h, \alpha)$ при изменении h от 0 до 1 для любого α имеет место неравенство

$$\Phi(h, \alpha) \leq \Phi\left(\frac{1}{h}, \alpha\right)$$

Таким образом, при постепенном увеличении вертикального градиента температуры в жидкости, заполняющей вертикальный эллиптический цилиндр, возникает течение антисимметричного вида: в одной половине цилиндра жидкость поднимается, а в другой опускается; разбиение цилиндра на две половины происходит по вертикальной плоскости, проходящей через малую ось его эллиптического сечения. Этот вывод находится в соответствии с экспериментальными результатами В. В. Славнова [4], наблюдавшего в вертикальной эллиптической трубе (при $a = 0.724$ см, $b = 0.375$ см) течение только указанного вида.

Для случая кругового вертикального цилиндра можно сравнить приближенное решение с точным, полученным Г. А. Остроумовым [3]. Положив $a = b = R$, получаем из (2.7) простое выражение

$$\frac{g\beta AR^4}{\nu\chi} = \frac{480(1+\alpha)}{2+7\alpha}$$

Эта приближенная функция довольно хорошо аппроксимирует сложное точное решение, на что уже обращалось внимание в работе [2] (см. § 3), где был рассмотрен приближенно случай вертикального кругового цилиндра.

При фиксированном a и $b \rightarrow \infty$ эллиптический цилиндр превращается в плоский вертикальный слой, вытянутый вдоль оси y . В этом случае будем иметь

$$\frac{g\beta A_2 a^4}{\nu\chi} = 40$$

При фиксированном b и $a \rightarrow \infty$ получим

$$\frac{g\beta A_1 b^4}{\nu\chi} \rightarrow 0$$

Поступила 29 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
2. Жуховицкий Е. М. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости неравномерно нагретой жидкости. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
3. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. Гостехиздат. 1952.
4. Славнов В. В. Диссертация. Молотовский университет, 1952.
5. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. Гостехиздат, 1950.