Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСЛОВИЯХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОНВЕКЦИИ В БИНАРНОЙ СМЕСИ

Б. А. Вертгейм

(Молотов)

В статье рассматриваются некоторые конвективные явления в бинарной смеси; выведены условия равновесия неравномерно нагретой бинарной смеси и уравнения малых возмущений. Задача о стационарной конвекции в вертикальном цилиндре решена в замкнутой форме, соответствующая задача для случая чистой среды подробно исследована Г. А. Остроумовым [1].

§ 1. Условия равновесия. Неравномерно нагретая жидкость может оставаться в равновесии (в поле тяжести) лишь при наличии особых условий. Для чистой среды эти условия состоят в следующем: равновесие возможно только тогда, когда градиент температуры во всей массе жидкости постоянен и направлен вертикально (см., например, [2]).

Покажем, что это правило сохраняется и для смеси, при этом к нему добавляется еще соотношение, определяющее градиент концентрации. Обратимся к общим уравнениям гидродинамики (см. [3]).

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left[-\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} + \left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\nabla \operatorname{div}\mathbf{v}\right] + \mathbf{g} \tag{1.1}$$

$$\dot{s} + \mathbf{v}\cdot\nabla s = \frac{1}{\rho T}\left[E - \operatorname{div}\mathbf{q} + \mu \operatorname{div}\mathbf{j}\right] \tag{1.2}$$

$$\dot{\rho} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho = -\rho \operatorname{div}\mathbf{v}, \qquad \dot{C} + \mathbf{v}\cdot\nabla C = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{j} \tag{1.3}$$

Здесь ρ, p и T — соответственно плотность, давление и температура в смеси, $\mathbf{v}$ — скорость жидкости (или газа), $\mathbf{g}$ — напряженность поля тяжести, E — диссипативная функция, C — концентрация одной из компонент смеси (первой), $\mathbf{j}$ — диффузионный поток массы первой компоненты, $\mathbf{q}$ — поток тепла:

$$\mathbf{j} = -\rho D\left(\nabla C + \lambda\nabla T + \frac{\alpha}{\rho\mu_c}\nabla p\right), \qquad \mathbf{q} = -\varkappa\nabla T + \left(\mu + \frac{b}{a}T\right)\mathbf{j} \tag{1.4}$$

причем $\varkappa$, D и λ — коэффициенты теплопроводности, диффузии и термодиффузии, μ — химический потенциал смеси, a и b — кинетические коэффициенты, $\alpha = \rho^{-1}(\rho_c)\ T,\ p$.

Пусть жидкость заключена в замкнутую полость, стенки которой непроницаемы для вещества. В этом случае для изучения равновесия надо в уравнениях (1.1) — (1.4) принять

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \qquad \mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{j} = 0$$

Тогда уравнения (1.3) удовлетворяются тождественно, а из (1.1) (1.2) и (1.4) получаем (очевидно, $E = 0$ при $\mathbf{v} = 0$)

$$-\nabla p + \rho\mathbf{g} = 0 \qquad \operatorname{div}\mathbf{q} = 0 \tag{1.5}$$

$$\nabla C + \lambda\nabla T + \frac{\alpha}{\rho\mu_c}\nabla p = 0, \qquad \mathbf{q} = -\varkappa\nabla T \tag{1.6}$$

Таким образом, температура удовлетворяет уравнению $\nabla^2 T = 0$. Умножим первые уравнения в (1.5) и (1.6) векторно на $\mathbf{g}$:

$$\nabla p \times \mathbf{g} = 0, \qquad (\nabla C + \lambda\nabla T)\times\mathbf{g} = 0 \tag{1.7}$$

Взяв ротор от первого уравнения (1.5), получим $\nabla\rho\times\mathbf{g}=0$. Так как в равновесии $\rho=\rho(T, C, p)$, то

$$\nabla\rho=\beta_1\nabla T+\beta_2\nabla C+\beta_3\nabla p \tag{1.8}$$

где

$$\beta_1=(\rho_T)_{C,\,p}, \qquad \beta_2=(\rho_C)_{T,\,p}, \qquad \beta_3=(\rho_p)_{TC}$$

Вместе с предыдущим равенством это дает (после умножения на $\mathbf{g}$)

$$(\beta_1\nabla T+\beta_2\nabla C)\times\mathbf{g}=0 \tag{1.9}$$

Вычтем из (1.9) второе уравнение (1.7), умноженное на β_2, получим

$$(\beta_1-\lambda\beta_2)\nabla T\times\mathbf{g}=0$$

Так как, вообще говоря, $\beta_1-\lambda\beta_2\neq0$ (см. далее, § 3), то $\nabla T\times\mathbf{g}=0$, т. е. градиент температуры вертикален. Теперь из (1.7) следует, что и градиент концентрации во всей массе жидкости также вертикален. Таким образом, температура и концентрация являются функциями только вертикальной координаты z.

Теперь из уравнения $\nabla^2T=0$ вытекает, что

$$\nabla T=-A_0\gamma \tag{1.10}$$

Здесь и в дальнейшем γ — единичный вектор, направленный вертикально вверх, A_0 — постоянная.

Градиент концентрации в равновесии определяется из первых уравнений (1.5) и (1.6):

$$\nabla C+\lambda\nabla T=-\frac{\alpha}{\mu_c}\mathbf{g} \tag{1.11}$$

Считая λ и α/μ_c постоянными, получим, что и

$$\nabla C=-B_0\gamma \tag{1.12}$$

где A_0 и B_0 связаны соотношением

$$B_0+\lambda A_0=-\frac{\alpha}{\mu_c}g \tag{1.13}$$

Таким образом, для того чтобы неравномерно нагретая смесь могла находиться в равновесии, необходимо, чтобы градиент температуры везде в жидкости был постоянным и вертикальным; градиент концентрации при этом также вертикален и связан с градиентом температуры соотношением (1.13).

В дальнейшем предполагается, что в смеси нет никаких существенных градиентов давления (см. [3], стр. 277), поэтому условие (1.13) заменится более простым:

$$B_0+\lambda A_0=0 \tag{1.14}$$

Заметим, что используемый метод решения применим и в случае, когда учет члена с ∇p в (1.4) существен.

§ 2. Уравнения малых возмущений. Равновесие неравномерно нагретой смеси, условия которого изучались выше, может быть устойчивым или неустойчивым. Для решения вопроса об устойчивости необходимо проследить, как развиваются неизбежно возникающие по разным причинам малые возмущения: будут ли они все угасать (устойчивое равновесие) или же некоторые из возмущений будут нарастать (неустойчивое равновесие). Для получения уравнений малых возмущений воспользуемся уравнениями свободной конвекции в бинарной смеси, выведенными в работе[4]:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{v}}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho_0}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{v}+g(\beta_1T+\beta_2C)\gamma\\ \dot{T}+\mathbf{v}\cdot\nabla T=(\chi+N\lambda^2D)\nabla^2T+N\lambda D\nabla^2C\\ \dot{C}+\mathbf{v}\cdot\nabla C=\lambda D\nabla^2T+D\nabla^2C, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0\end{gathered} \tag{2.1}$$

В этих уравнениях T и C — отклонения температуры и концентрации от их средних значений T_0 и C_0; через p обозначена разность между действительным давлением и тем его значением, которое было бы в механическом равновесии при температуре T_0 и концентрации C_0, ν, β_1, β_2, χ, D и λ — коэффициенты соответственно кинематической вязкости, расширения, температуропроводности, диффузии и термодиффузии, взятые при температуре T_0 и концентрации C_0;

$$\rho_0 = \rho_0(T_0, C_0), \qquad N = \left(\frac{T\mu_c}{c_p}\right)_0$$

Пусть в находившейся в равновесии смеси возникло медленное движение (скорость $\mathbf{v}$ мала) и связанные с ним изменения температуры, концентрации и давления. Ищем в уравнениях (2.1) температуру, концентрацию и давление в виде

$$-A_0\gamma\cdot\mathbf{r} + T_1, \qquad -B_0\gamma\cdot\mathbf{r} + C_1, \qquad p_0 + p_1$$

Пренебрегая квадратичными относительно малых возмущений членами и учитывая уравнения равновесия (1.5) и (1.14), получим (индекс 1 везде опускаем)

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + g(\beta_1 T + \beta_2 C)\gamma \\ \dot{T} - A_0\mathbf{v}\cdot\gamma = (\chi + N\lambda^2 D)\nabla^2 T + N\lambda D\nabla^2 C \\ \dot{C} + \lambda A_0\,\mathbf{v}\gamma = \lambda D\,\nabla^2 T + D\,\nabla^2 C, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\end{gathered} \tag{2.2}$$

Эта система уравнений должна решаться при следующих граничных условиях (* относится к значениям на границе полости)

$$\mathbf{v}^* = 0, \qquad j_n^* = 0 \qquad \text{или} \qquad \left(\frac{\partial C}{\partial n} + \lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)^* = 0 \tag{2.3}$$

Это условие получено в предположении, что при изучении возмущенного движения градиент давления в выражении (1.4) для диффузионного потока (возмущенного) несуществен (ср. § 1).

Из (1.4) и (2.3) следует, что $q_n^* = -\varkappa(\partial T/\partial n)^*$ и поэтому условие для температуры является обычным:

$$T^* = T_M^*, \qquad \varkappa\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)^* = \varkappa_M\left(\frac{\partial T_M}{\partial n}\right)^* \tag{2.4}$$

(непрерывность температуры и теплового потока на границе). Здесь индекс M относится к величинам в массиве. Уравнение для возмущений температуры в массиве обычное.

$$\dot{T}_M = \chi_M\nabla^2 T \tag{2.5}$$

Систему уравнений (2.2) и граничное условие (2.3) можно упростить, если ввести вместо C величину

$$H = C + \lambda T \tag{2.6}$$

В стационарном случае для определения $\mathbf{v}$, H и T получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}-\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p + \nu\triangle\mathbf{v} + g(\alpha_2 T + \beta_2 H)\boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (\alpha_2 = \beta_1 - \lambda\beta_2) \\ -A_0(1 + N\lambda^2)\,\mathbf{v}\cdot\gamma = \chi\triangle T, \qquad \lambda A_0\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\gamma} = D\triangle H \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \triangle T_M = 0\end{gathered} \tag{2.7}$$

Аналогичная система связывает $\mathbf{v}$, H и T и в нестационарном случае.

Система (2.7) имеет нетривиальное решение, вообще говоря, лишь при некоторых «критических» градиентах невозмущенной температуры A_0 [см. (1.13)], которые являются характеристическими числами системы. Наименьшее из этих чисел A_0 определяет начало возникновения стационарной конвекции (см. [2], где сказанное выше доказано для случая конвекции в чистой среде).

§ 3. Стационарная конвекция в вертикальном цилиндре. Пусть смесь находится в вертикальном цилиндре в состоянии механического равновесия (см. § 1). Вдоль цилиндра поддерживается постоянный градиент температуры, направленный вниз (подогрев снизу). Определим начало возникновения стационарной конвекции, т. е.

найдем, начиная с каких значений градиента температуры A_0 равновесие становится неустойчивым (подробное исследование этой проблемы для чистой среды см. [1]).

Ищем решение уравнений (2.7), считая скорость $\mathbf{v}$ параллельной оси цилиндра (оси z), а возмущения H и T не зависящими от z; имеем

$$v_x = v_y \equiv 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad v_z = v, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{3.1}$$

(последнее из уравнения непрерывности). Уравнения (2.7) принимают вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad -\frac{1}{\rho_0}\frac{dp}{dz} + \nu\triangle v + g(\alpha_2 T + \beta_2 H) = 0$$

$$\chi\triangle T = -(1 + N\lambda^2) A_0 v, \qquad D\triangle H = \lambda A_0 v, \qquad \triangle T_M = 0 \tag{3.2}$$

Граничные условия

$$v^* = 0, \quad \frac{\partial H^*}{\partial n} = 0, \quad T^* = T_M^*, \quad \varkappa\frac{\partial T^*}{\partial n} = \varkappa_M \frac{\partial T_M^*}{\partial n}, \quad T_M(\infty) = 0 \tag{3.3}$$

Для случая бесконечного цилиндра должно быть выполнено еще условие замкнутости потока: полный поток вещества как первой, так и второй компоненты через поперечное сечение должен быть равен нулю. Для первой компоненты это означает ([3], стр. 270)

$$\int\limits_{(S)} (\rho C_{\text{полн}} v + j_z)\, dS = 0 \tag{3.4}$$

Здесь $C_{\text{полн}} = -B_0 z + C$ — концентрация первой компоненты с учетом возмущений. Диффузионный поток $j_z = 0$ вследствие (3.1); так как v, C и T являются малыми, то в условии (3.4) можно, как и при выводе уравнений (2.2), пренебречь квадратичными относительно этих малых величин членами; это дает

$$\int\limits_{(S)} v\, dS = 0 \tag{3.5}$$

Выполнимость последнего условия следует из (3.2) и (3.3):

$$\int\limits_{(S)} v\, dS = \frac{D}{A_0\lambda}\int\limits_{(S)} \triangle H\, dS = -\frac{D}{A_0\lambda}\int\limits_{(\Gamma)} \frac{\partial H}{\partial n}\, dn = 0$$

(интеграл по области преобразован по формуле Грина в интеграл по контуру).

Из первых трех уравнений (3.2), учитывая (3.1), следует, что

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dp}{dz} = \text{const} = P_0$$

Эту константу можно включить в H, так как в уравнения и граничные условия входят лишь производные от H

$$H_1 = H - \frac{P_0}{g\beta_2} \tag{3.6}$$

Для H_1 имеем уравнение (индекс опускаем)

$$\nu\triangle v = -g(\alpha_2 T + \beta_2 H) \tag{3.7}$$

Исключив T и H из (3.7) и (3.2), получаем для v

$$\triangle\triangle v = p^4 v \tag{3.8}$$

Если ввести безразмерное расстояние, приняв за единицу длины радиус цилиндра, то параметр p^4 запишется в виде [при этом α_2 заменяем по (2.7)]

$$p^4 = \frac{A_0 R^4}{\nu}\left[g\alpha_2 \frac{N\lambda^2 + 1}{\chi} - g\beta_2 \frac{\lambda}{D}\right] =$$

$$= \frac{A_0 g\beta_1 R^4}{\nu\chi}\left[1 + \frac{(-\lambda\beta_2)}{\beta_1}\left(1 + \frac{\chi}{D}\right) + N\lambda^2 + N\lambda^2\frac{(-\lambda\beta_2)}{\beta_1}\right] \tag{3.9}$$

Таким образом, скорость описывается тем же уравнением, что и для случая конвекции в чистой среде (см. [1]; там же приведены кривые, изображающие распределение скорости). Из уравнения (3.9) с учетом граничных условий для v находим

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{J_n(pr)}{J_n(p)} - \frac{I_n(pr)}{I_n(p)} \right] \cos n\varphi \tag{3.10}$$

где J_n и I_n — функция Бесселя вещественного и мнимого аргументов, r и φ — полярные координаты в плоскости xOy.

Начало конвекции определяется наименьшим значением градиента A_0: оказывается (как и для конвекции в чистой среде), что это соответствует решению с $n = 1$ — антисимметричное движение: по одной половине жидкость поднимается, по другой опускается. Итак, берем

$$v = v_0 \left[\frac{J_1(pr)}{J_1(p)} - \frac{I_1(pr)}{I_1(p)} \right] \cos \varphi \tag{3.11}$$

Величины H и T находим теперь из уравнений Пуассона, температуру массива T_M — из уравнения Лапласа [см. (3.2)]:

$$\begin{gathered} H = -\frac{\lambda}{D} A_0 \frac{v_0}{p^2} \left[\frac{J_1(pr)}{J_1(p)} + \frac{I_1(pr)}{I_1(p)} \right] \cos\varphi + Mr\cos\varphi \\ T = \frac{N\lambda^2 + 1}{\chi} A_0 \frac{v_0'}{p^2} \left[\frac{J_1(pr)}{J_1(p)} + \frac{I_1(pr)}{I_1(p)} \right] \cos\varphi + Nr\cos\varphi \\ T_M = \frac{R}{r}\cos\varphi \end{gathered} \tag{3.12}$$

Гармонические функции $Mr\cos\varphi$ и $Nr\cos\varphi$ добавлены с целью удовлетворить граничным условиям (3.3). Всего введено четыре постоянных: v_0, M, N, R; две из них M и N связаны соотношением $\alpha_2 N + \beta_2 M = 0$, которое получается при подстановке выражений (3.12) в уравнение (3.7). Итак, для нахождения постоянных имеем, учитывая условия (3.3), систему четырех однородных линейных уравнений; условие разрешимости этой системы дает соотношение для определения параметра p^4 и, следовательно, критических градиентов A_0.

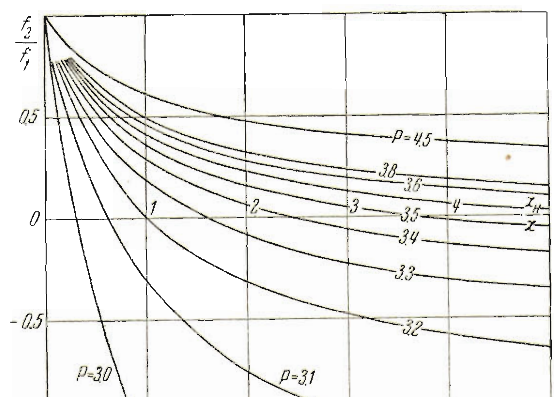
После ряда упрощений это соотношение принимает такой вид:

$$\left[\frac{J_0(p)}{J_1(p)} + \frac{I_0(p)}{I_1(p)} \right] p = 2 \left[1 - \frac{\varkappa_M / \varkappa}{1 - (1 + \varkappa_M/\varkappa) f_2/f_1} \right] \tag{3.13}$$

где обозначено

$$f_1 = \frac{N\lambda^2 + 1}{\chi}\alpha_2, \qquad f_2 = \frac{\lambda\beta_2}{D} \tag{3.14}$$

Уравнение для определения критических градиентов в случае чистой среды получается из (3.13) в предельном случае $\lambda \to 0$ (см. [1]).



Фиг. 1

Для других n, $n \neq 1$ решение аналогично; в случае $n = 0$ (симметричное движение) находим, что $p^4 = 452.1$ независимо от $\varkappa_M / \varkappa$ и f_2 / f_1, т. е. для p^4 получаем то же числовое значение, что и в случае чистой среды; критический градиент A^0 в нашем случае оказывается, однако, иным, что видно из формулы (3.9).

Выясним изменение критического градиента температуры; для простоты рассмотрим случай антисимметрии и $\varkappa_M = 0$ при $n \neq 0$. Из уравнения (3.13) находим, что

$p^4 = 67.4$ независимо от f_2/f_1. Отметим, что в типичном реальном случае выполнено неравенство $\lambda\beta_2 < 0$; оно означает, что эффект термодиффузии приводит к увеличению концентрации легкой компоненты с ростом температуры (где теплее, там концентрация легкой компоненты больше). Это следует из (1.4); напомним, что $-\rho_0\beta_2 = (\partial\rho/\partial C)_{T,p}$. Из приведенного неравенства вытекает, что при нормальном тепловом расширении, т. е. при $\beta_1 > 0$ выполнено неравенство $\beta_1 - \lambda\beta_2 > 0$, так что $\beta_1 - \lambda\beta_2 \neq 0$, что было использовано в § 1. В рассматриваемом случае ($\lambda\beta_2 < 0$) находим, что в равенстве (3.9) многочлен, стоящий в скобках, всегда больше единицы (мы принимаем, что $N > 0$; это верно во всяком случае при малых концентрациях, см. [4]). Так как для конвекции в чистой среде критический градиент при $\varkappa_M = 0$ определяется формулой

$$\frac{A_0 g\beta_1 R^4}{\nu\chi} = 67.4 \tag{3.15}$$

то, сопоставляя (3.9) и (3.15), получаем, что при подогреве снизу A_0 меньше, чем для чистой среды (конвекция начинается раньше), чего и следовало ожидать, так как концентрация легкой компоненты растет с ростом температуры.

Для облегчения расчета по формуле (3.13) при любых $\varkappa_M$ приводим семейство кривых $p^4 = \text{const}$ в координатах $\varkappa_M/\varkappa$ и f_2/f_1 (фиг. 1). Если известны параметры смеси, то по приведенным графикам можно приближенно определить p^4; после этого по формуле (3.9) определяется критический градиент A_0.

Поступила 30 XI 1954 Молотовский горный институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. ГИТТЛ, 1952.
2. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1953.
4. Шапошников И. Г. К теории конвективных явлений в бинарной смеси. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.