

ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ
 СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

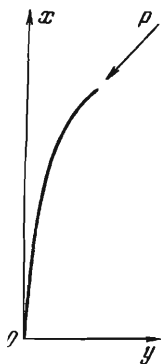
К. С. Дейнеко, М. Я. Леонов

(Львов)

§ 1. Потеря устойчивости сжатого следящей силой стержня с равномерно распределенной массой. Поперечные колебания стержня, сжатого осевой силой, описываются, как известно, дифференциальным уравнением

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

Это уравнение помимо тривиального решения $y = 0$ может допускать решения, неограниченно растущие с течением времени. В этом случае будем считать, что прямолинейная форма равновесия стержня является неустойчивой.



Указанное определение неустойчивости, вообще говоря, не совпадает с определением неустойчивости по Эйлеру, если действующие на стержень силы неконсервативны, как это показывается на нижеследующем примере.

Рассмотрим стержень, защемленный с одной стороны и центрально нагруженный на свободном конце продольной «следящей» силой, направленной по касательной к его оси (фиг. 1).

Легко установить, что ни при каких значениях силы P он не может иметь других форм равновесия, кроме прямолинейной. В книге В. И. Феодосьева [1] на этом основании делается вывод, что стержень не теряет устойчивости ни при каком значении силы P .

Используя данное выше определение неустойчивости, определим для указанного стержня наименьшую силу, при которой решение уравнения (1.1) становится неограниченно растущим с течением времени.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$y(x, t) = e^{i\omega t} f(x) \quad (1.2)$$

Пользуясь граничными условиями для стержня $y(0, t) = 0$, $y'(0, t) = 0$, $y''(l, t) = 0$, $y'''(l, t) = 0$, на основании (1.2) находим

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(l) = 0, \quad f'''(l) = 0 \quad (1.3)$$

Подставляя формулу (1.2) в уравнение (1.1), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$EJ \frac{d^4 f}{dx^4} + P \frac{d^2 f}{dx^2} - m\omega^2 f(x) = 0 \quad (1.4)$$

Частные решения этого уравнения, как обычно, ищем в виде $f(x) = ae^{kx}$, где k — корень характеристического уравнения

$$k^4 + \frac{P}{EJ} k^2 - \frac{m\omega^2}{EJ} = 0$$

Общее решение уравнения (1.4) при отсутствии кратных корней в характеристическом уравнении имеет вид:

$$f(x) = A \operatorname{sh} k_1 x + B \operatorname{ch} k_1 x + C \sin k_2 x + D \cos k_2 x \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} k_1^2 &= -\frac{P}{2EJ} + \sqrt{\frac{P^2}{4E^2 J^2} + \frac{m\omega^2}{EJ}} \\ k_2^2 &= \frac{P}{2EJ} + \sqrt{\frac{P^2}{4E^2 J^2} + \frac{m\omega^2}{EJ}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), получим следующие уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} B + D &= 0, & k_1 A + k_2 C &= 0 \\ A(k_1^2 \operatorname{sh} k_1 l + k_1 k_2 \sin k_2 l) + B(k_1^2 \operatorname{ch} k_1 l + k_2^2 \cos k_2 l) &= 0 \\ A(k_1^3 \operatorname{ch} k_1 l + k_1 k_2^2 \cos k_2 l) + B(k_1^3 \operatorname{sh} k_1 l - k_1^3 \sin k_2 l) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Система (1.7) имеет нетривиальные решения, когда

$$\begin{vmatrix} k_1^2 \operatorname{sh} k_1 l + k_1 k_2 \sin k_2 l & k_1^2 \operatorname{ch} k_1 l + k_2^2 \cos k_2 l \\ k_1^3 \operatorname{ch} k_1 l + k_1 k_2^2 \cos k_2 l & k_1^3 \operatorname{sh} k_1 l - k_1^3 \sin k_2 l \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k_1 [k_1^4 + k_2^4 + k_1 k_2 (k_2^2 - k_1^2) \operatorname{sh} k_1 l \sin k_2 l + 2k_1^2 k_2^2 \operatorname{ch} k_1 l \cos k_2 l] = 0 \quad (1.8)$$

Не останавливаясь на случае $k_1 = 0$, соответствующем равновесию стержня, определим корни уравнения

$$k_1^4 + k_2^4 + k_1 k_2 (k_2^2 - k_1^2) \operatorname{sh} k_1 l \sin k_2 l + 2k_1^2 k_2^2 \operatorname{ch} k_1 l \cos k_2 l = 0 \quad (1.9)$$

Из формул (1.6) имеем

$$k_1^4 + k_2^4 = \frac{P^2}{E^2 J^2} + 2 \frac{m\omega^2}{EJ}, \quad k_1 k_2 = \sqrt{\frac{m\omega^2}{EJ}}, \quad k_2^2 - k_1^2 = \frac{P}{EJ} \quad (1.10)$$

Положим $P = \beta (EJ\pi^2 / l^2)$, $m / EJ = \alpha (\pi / l)^4$ и, используя равенства (1.10), перепишем уравнение (1.9) в виде

$$\Delta(\beta, \alpha\omega^2) = 0 \quad (1.11)$$

где

$$\Delta(\beta, \alpha\omega^2) = \frac{\pi^4}{7^4} (\beta^2 + 2\alpha\omega^2 + \beta \sqrt{\alpha\omega^2} \operatorname{sh} k_1 l \sin k_2 l + 2\alpha\omega^2 \operatorname{ch} k_1 l \cos k_2 l) \quad (1.12)$$

причем

$$k_1 l = \pi \sqrt{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \alpha\omega^2}}, \quad k_2 l = \pi \sqrt{\frac{\beta}{4} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \alpha\omega^2}}$$

Приближенные величины первых двух корней уравнения (1.11) для некоторых значений β приведены в табл. 1.

Таблица 1

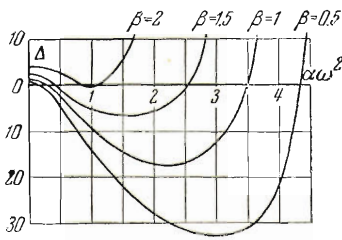
№ п.п.	Корни уравнения			№ п.п.	β	Корни уравнения	
	β	$\alpha\omega_1^2$	$\alpha\omega_2^2$			$\alpha\omega_1^2$	$\alpha\omega_2^2$
1	0	0.125	4.86	4	1.5	0.46	2.6
2	0.5	0.26	4.2	5	2.0	0.96	1.02
3	1.0	0.30	3.3	6	2.001	0.98	0.99

На фиг. 2 приведены графики $\Delta(\beta, \alpha\omega^2)$. Из этих графиков видно, что при увеличении β до величины $\beta \approx 2$ первые два корня уравнения (1.11) сближаются, принимая значения, близкие к единице. Найдем приближенно такое значение β , при котором корни становятся кратными. Положим в уравнении (1.11)

$$\beta = 2 + \epsilon, \quad \alpha\omega^2 = 1 + \eta \quad (1.13)$$

где ϵ и η — малые величины.

Пренебрегая малыми третьего порядка, получим уравнение относительно ϵ и η :



$$\eta^2 + 0.039\eta + 0.834\epsilon\eta + 0.96\epsilon^2 - 0.004 + 2.157\epsilon = 0$$

При $\epsilon = 0.0025$ это уравнение имеет кратные корни $\eta_{1,2} = -0.02$. Подставляя указанные величины в (1.13), получим

$$\beta \approx 2.0025, \quad \alpha\omega_{1,2}^2 \approx 0.98$$

Продолжая этот процесс, положим

$$\beta = 2.0025 + \epsilon, \quad \alpha\omega^2 = 0.98 + \eta$$

Фиг. 2

Подставляя последнее в уравнение (1.11), получим уравнение

$$\eta^2 - 0.026\eta + 0.626\epsilon\eta + 2.053\epsilon + 0.75\epsilon^2 + 0.0005 = 0$$

Корнями этого уравнения являются

$$\eta_{1,2} = 0.013 - 0.313\epsilon \pm \sqrt{-0.65\epsilon^2 - 2.062\epsilon + 0.0006}$$

Отсюда находим, что корни будут кратными при $\epsilon = 0.0003$. При значениях $\epsilon > 0.0003$ выполняется неравенство

$$0.65\epsilon^2 - 2.062\epsilon + 0.0006 < 0$$

и корни уравнения (1.11) становятся комплексными сопряженными. Легко убедиться что соответствующее этим корням решение системы (1.1) неограниченно растет с течением времени.

Действительно, пусть $\omega_{k,k+1} = \lambda \pm i\nu$ (λ, ν — вещественные) являются этими комплексными корнями. Решения (1.2) при этом будут

$$y_k(x, t) = e^{i\omega_k t} f_k(x) = e^{(-\nu + i\lambda)t} f_k(x)$$

$$y_{k+1}(x, t) = e^{i\omega_{k+1} t} f_{k+1}(x) = e^{(\nu + i\lambda)t} f_{k+1}(x)$$

Независимо от знака ν одно из этих решений имеет показатель с положительной вещественной частью и, следовательно, неограниченно растет с течением времени, что согласно приведенному выше определению соответствует потере устойчивости стержня. Таким образом, критическая сила $P_{кр}$ будет равна

$$P_{кр} = 2.0028 \frac{EJ\pi^2}{l^2}$$

§ 2. Влияние распределения масс на величину критической силы. Когда центрально сжатый стержень подвержен действию консервативных сил, распределение массы на нем не оказывает влияния на величину критической силы. Однако это влияние может быть весьма существенно, если сжимающие стержень силы неконсервативны, как это показано на следующем примере.

Пусть стержень, сжатый той же следящей силой, несет две сосредоточенные массы, величины которых велики по сравнению с массой стержня. Определим критическую силу для стержня с таким расположением масс (фиг. 3).

Колебания этой системы, имеющей две степени свободы, описываются уравнениями

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F_1, \quad m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = F_2 \quad (2.1)$$

где y_i — отклонения стержня в точке расположения i -й массы, F_i — сила, действующая на i -ю массу со стороны стержня ($i = 1, 2$). Силы F_i зависят некоторым образом от прогибов. Для определения этой зависимости воспользуемся уравнением изогнутой оси сжатого стержня

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (2.2)$$

Общее решение этого уравнения будет

$$y = A + Bx + C \sin kx + D \cos kx \quad \left(k = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) \quad (2.3)$$

Рассмотрим действие на стержень силы $P_1 = -F_1$, приложенной в точке $x = a$.

В силу того, что на часть стержня от его свободного конца до точки приложения силы P_1 действует только сила, направленная по касательной к оси стержня, эта часть остается прямолинейной при изгибе. Граничные условия при этом будут

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(a) = 0, \quad y'''(a) = -\frac{P_1}{EJ}$$

Удовлетворяя этим граничным условиям, имеем

$$\begin{aligned} A + D &= 0, & B + kC &= 0 \\ -Ck^2 \sin ka - k^2 D \cos ka &= 0 \\ -Ck^3 \cos ka + k^3 D \sin ka &= -\frac{P_1}{EJ} \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$A = \frac{P_1}{kP} \sin ka, \quad B = -\frac{P_1}{P} \cos ka, \quad C = \frac{P_1}{kP} \cos ka, \quad D = -\frac{P_1}{kP} \sin ka$$

Решение (2.3) при этом имеет вид:

$$y_I(x) = \frac{P_1}{kP} [\sin ka - kx \cos ka + \sin k(x-a)] \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2.4)$$

$$y_{II}(x) = \frac{P_1}{kP} [\sin ka - kx \cos ka + k(x-a)] \quad (x > a) \quad (2.5)$$

Выражение для прогибов стержня при действии силы $P_2 = -F_2$, приложенной к концу стержня, получим из (2.4), положив в нем $a = l$, т. е.

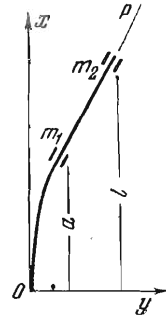
$$y_{III}(x) = \frac{P_2}{kP} [\sin kl - kx \cos kl + \sin k(x-l)] \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2.6)$$

Прогибы под силами P_1 и P_2 при одновременном их действии получим, суммируя соответствующие выражения (2.4), (2.5) и (2.6), а именно:

$$\begin{aligned} y(a) = y_1 &= \frac{P_1}{kP} [\sin ka - ka \cos ka] + \frac{P_2}{kP} [\sin kl - ka \cos kl - \sin k(l-a)] \\ y(l) = y_2 &= \frac{P_1}{kP} [\sin ka - kl \cos ka + k(l-a)] + \frac{P_2}{kP} [\sin kl - kl \cos kl] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из этой системы (2.7) находим силы:

$$P_1 = -F_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2, \quad P_2 = -F_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 \quad (2.8)$$



Фиг. 3

где

$$c_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad c_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2.9)$$

$$c_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad c_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$a_{11} = \frac{1}{kP} (\sin ka - ka \cos ka), \quad a_{12} = \frac{1}{kP} [\sin kl - ka \cos kl - \sin k(l-a)] \quad (2.10)$$

$$a_{22} = \frac{1}{kP} (\sin kl - kl \cos kl), \quad a_{21} = \frac{1}{kP} [\sin ka - kl \cos ka + k(l-a)]$$

Подставляя найденные значения сил F_i в уравнении (2.1), получим следующие уравнения движения системы:

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -c_{11} y_1 - c_{12} y_2, \quad m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -c_{21} y_1 - c_{22} y_2 \quad (2.11)$$

Решения этой системы ищем в виде $y_1 = Ac^{i\lambda t}$, $y_2 = Be^{i\lambda t}$.

Подставляя y_1 и y_2 в систему (2.11), получим уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$A(c_{11} - m_1 \lambda^2) + Bc_{21} = 0, \quad Ac_{21} + B(c_{22} - m_2 \lambda^2) = 0 \quad (2.12)$$

Условие нетривильности решений этих уравнений дает

$$\begin{vmatrix} c_{11} - m_1 \lambda^2 & c_{21} \\ c_{21} & c_{22} - m_2 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

или

$$\lambda^4 - \lambda^2 \left(\frac{m_1 c_{22} + m_2 c_{11}}{m_1 m_2} \right) + \frac{c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}}{m_1 m_2} = 0$$

Корнями этого уравнения, являющегося уравнением частот, будут

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{m_1 c_{22} + m_2 c_{11}}{2m_1 m_2} \pm \sqrt{\frac{(m_1 c_{22} + m_2 c_{11})^2}{4m_1^2 m_2^2} - \frac{c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}}{m_1 m_2}} \quad (2.14)$$

Как и в предыдущей задаче, потеря устойчивости стержня происходит, когда λ_i становятся комплексными. Критическую силу находим как такую, при которой происходит переход от действительных значений корней к комплексным, т. е. из условия

$$(m_1 c_{22} - m_2 c_{11})^2 + 4m_1 m_2 c_{12} c_{21} = 0 \quad (2.15)$$

Для определения числовых значений критической силы упростим выражения (2.14), положив

$$m_2 = 1, \quad a = \frac{l}{2}, \quad P = \beta^2 \frac{EJ\pi^2}{l^2} \quad (2.16)$$

Формула (2.14) при этом имеет вид:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{a_{11} m_1 + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} m_1 - a_{22})^2 + 4m_1 a_{12} a_{21}}}{2m_1 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \quad (2.17)$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{\beta^3} \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} - \frac{\beta\pi}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \frac{l^3}{EJ\pi^3}$$

$$a_{12} = \frac{1}{\beta^3} \left(\sin \beta\pi - \frac{\beta\pi}{2} \cos \beta\pi - \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \frac{l^3}{EJ\pi^3}$$

$$a_{21} = \frac{1}{\beta^3} \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} - \beta\pi \cos \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\beta\pi}{2} \right) \frac{l^3}{EJ\pi^3}$$

$$a_{22} = \frac{1}{\beta^3} (\sin \beta\pi - \beta\pi \cos \beta\pi) \frac{l^3}{EJ\pi^3} \quad (2.18)$$

Приведем некоторые значения для критической силы P_* , определенной для различных величин массы:

$\frac{m_1}{m_2} = 0$	1.0	2.5	5.0	7.0	15.0	∞
$\frac{P_* l^2}{EJ\pi^2} = 2.04$	1.48	1.56	2.0	2.25	4.1	8.16

§ 3. О применимости приближенных методов определения критической силы при неконсервативных силах. При решении задачи об устойчивости стержня динамическим методом мы пользовались исследованием характера решений уравнения колебаний стержня, исследуя корни уравнения частот. Это уравнение, однако, может иметь сложную структуру, и нахождение корней его может представлять значительные трудности. Вид уравнения частот может быть значительно упрощен, если задаться приближенными формами колебаний стержня.

Решим приближенно задачу о колебаниях сжатого следящей силой стержня с равномерно распределенной массой, задавая перемещения y в виде:

$$y(x, t) = \varphi(t) \left(5 - \cos \frac{2\pi x}{l} - 4 \cos \frac{\pi x}{l} \right) + \psi(t) \left(28 - \cos \frac{3\pi x}{2l} - 27 \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \quad (3.1)$$

Данная функция y удовлетворяет граничным условиям задачи, но не удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1).

При заданной функции (3.1) кинетическая энергия системы будет

$$T = \frac{m}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dx = \frac{ml}{2} (33.5 \dot{\varphi}^2 + 157.6 \dot{\varphi} \dot{\psi} + 197.8 \dot{\psi}^2) \quad (3.2)$$

Замечая, что вертикальная и горизонтальная составляющие силы при малых отклонениях представляются в виде $X = -P$, $Y = -Py'(l)$, определим обобщенные силы системы, рассматривая φ и ψ как обобщенные координаты.

Обозначим через A_x работу силы X , через A_y — работу силы Y , через A_u — работу сил упругости при вариации координат φ и ψ . Элементарная работа горизонтальной составляющей силы P на малом перемещении будет

$$dA_y = -Py'(l) dy(l) = -96 \frac{P\pi\psi}{l} d\varphi - 336 \frac{P\pi\psi}{l} d\psi \quad (3.3)$$

Работы силы X и сил упругости определяются по формулам

$$A_x = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = 5 \frac{P\pi^2}{l} \varphi^2 + 46.13 \frac{P\pi^2}{l} \psi^2 + 21 \frac{P\pi^2}{l} \varphi\psi \quad (3.4)$$

$$A_u = -\frac{2}{EJ} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx = -8 \frac{EJ\pi^4}{l^3} \varphi^2 - 12.6 \frac{EJ\pi^4}{l^3} \psi^2 - 10.6 \frac{EJ\pi^4}{l^3} \varphi\psi$$

Из формул (3.3) и (3.4) находим обобщенные силы:

$$Q_\varphi = \left(10 \frac{P\pi^2}{l} - 16EJ \frac{\pi^4}{l^3} \right) \varphi + \left(21 \frac{P\pi^2}{l} - 10.6 \frac{EJ\pi^4}{l^3} - 96 \frac{P\pi}{l} \right) \psi$$

$$Q_\psi = \left(21 \frac{P\pi^2}{l} - 10.6 \frac{EJ\pi^4}{l^3} \right) \varphi + \left(92.26 \frac{P\pi^2}{l} - 25.2 \frac{EJ\pi^4}{l^3} - 336 \frac{P\pi}{l} \right) \psi \quad (3.5)$$

Подставим выражения кинетической энергии (3.2) и обобщенных сил (3.5) в уравнения Лагранжа.

Тогда получим следующие дифференциальные уравнения колебаний системы:

$$33.5 \ddot{\varphi} + 78.7 \ddot{\psi} = a\varphi + b\psi, \quad 78.7 \ddot{\varphi} + 197.8 \ddot{\psi} = c\varphi + d\psi \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{98.6Pl^2 - 157.76EJ\pi^2}{ml^4}, & b &= \frac{-94.4Pl^2 - 104.5EJ\pi^2}{ml^4} \\ c &= \frac{207.06Pl^2 - 104.5EJ\pi^2}{ml^4}, & d &= \frac{-144.98Pl^2 - 248.5EJ\pi^2}{ml^4} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решение уравнений (3.6) ищем в виде $\varphi = Ae^{i\lambda t}$, $\psi = Be^{i\lambda t}$. После подстановки этих выражений в уравнения (3.5) из условия нетривиальности решений имеем

$$\begin{vmatrix} 33.5 \lambda^2 + a & 78.7 \lambda^2 + b \\ 78.7 \lambda^2 + c & 197.8 \lambda^2 + d \end{vmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

Раскрывая определитель и подставляя значения (3.6), получим уравнение частот

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 \left(\frac{6.68Pl^2 - 26.67EJ\pi^2}{ml^4} \right) + \frac{12.14(Pl^2)^2 + 25.75EJl^2P\pi^2 + 65.38(EJ\pi^2)^2}{(ml^4)^2} = 0 \quad (3.9)$$

При выполнении условия

$$32.48(Pl^2)^2 - 382.05EJ\pi^2Pl^2 + 645.97(EJ\pi^2)^2 < 0 \quad (3.10)$$

корни уравнения (3.9) становятся комплексными сопряженными. Решения (3.8) при этом становятся неограниченно растущими с течением времени. Решая вравенство (3.10), находим наименьшие значения силы, при которой стержень теряет устойчивость. Такой силой будет

$$P_* = 2.051 \frac{EJ\pi^2}{l^2} \quad (3.11)$$

Это значение критической силы больше точного примерно на 2%.

Приближенное решение этой задачи дано в заметке Ю. Д. Кспейкина и М. Я. Леонова (стр. 641) другим путем, на основе энергостатических соображений:

$$P_* = 1.59 \frac{EJ\pi^2}{l^2} \quad (3.12)$$

Сравнивая полученные приближенные значения критической силы (3.11) и (3.12), имея в виду результаты § 2, видим, что значение критической силы, определенное энергетически, близко к критическому значению силы при наиболее невыгодном расположении масс.

Поступила 18 III 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. ГТТИ, 1953, стр. 165.