Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ ОСОБОМ СЛУЧАЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Ю. Д. Копейкин, М. Я. Леонов
(Львов)

При определении нагрузок, вызывающих потерю устойчивости определенных форм равновесия упругих систем, обычно находят те нагрузки, при которых существуют, наряду с исследуемой, другие формы равновесия. Ниже приводится пример, для которого этот метод Эйлера не может дать решения задачи.

Рассмотрим стержень, защемленный с одной стороны и центрально нагруженный на свободном конце продольной силой, остающейся при его изгибе нормальной к концевому сечению [см фиг. 1], Легко установить, что ни при каком значении силы он не может иметь других форм равновесия, кроме прямолинейной. В книге В. И. Федосьева [1] на этом основании ошибочно делается вывод об устойчивости стержня при любой величине сжимающей силы.

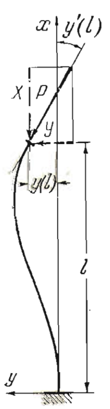
Называя критической такую наименьшую силу, при действии которой равновесие неустойчиво, найдем ее приближенное значение для указанного стержня следующим образом.

Зададимся перемещением стержня в виде

$$y = a_1 - a_2 \cos 2\pi \frac{x}{l} - a_3 \cos \frac{3}{2} \pi \frac{x}{l} - a_4 \cos \pi \frac{x}{l} - a_5 \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{l}$$

Выполняя граничные условия $y(O) = O,\ y'(O) = O,\ y''(l) = O,\ y'''(l) = O$, получим

$$a_1 = 5a_2 + 28a_3, \qquad a_4 = 4a_2, \qquad a_5 = 27a_3$$



Фиг. 1

При этом имеем

$$y = a_2\left(5 - \cos 2\pi \frac{x}{l} - 4 \cos \pi \frac{x}{l}\right) + a_3\left(28 - \cos \frac{3}{2} \pi \frac{x}{l} - 27 \cos \frac{\pi x}{2l}\right)$$

Введя обозначения $a_2 = a$ и $a_3 = ac$, получим

$$y = a\left[\left(5 - \cos 2\pi \frac{x}{l} - 4 \cos \pi \frac{x}{l}\right) + b\left(28 - \cos \frac{3}{2} \pi \frac{x}{l} - 27 \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{l}\right)\right] \qquad (1)$$

В круглых скобках стоят функции, удовлетворяющие граничным условиям. Форма изогнутой оси стержня станет определенной, если задать численную величину параметра b. Параметр a представляет масштаб перемещения.

Предположим, что перемещение осуществляется при постоянном b так, что масштаб a возрастает от нуля до какой-нибудь малой величины.

Приложенная система сил производит при этом некоторую работу. Обозначим A_1 работу силы X (фиг. 1), A_2 — работу силы Y и A_3 — работу внутренних сил упругости. При малых деформациях проекции силы P на оси x и y будут

$$X = -P, \qquad Y = -Py'(l)$$

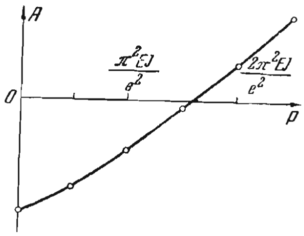
Для вычисления работ A_1 и A_3 воспользуемся общеизвестными формулами

$$A_1 = \frac{P}{2}\int_0^l (y')^2 dx, \qquad A_3 = -\frac{EJ}{2}\int_0^l (y'')^2 dx$$

Подставляя сюда выражение для y согласно формуле (1), для A_1 и A_2 получим

$$A_1 = \frac{Pa^2\pi^2}{l}(46.16b^2 + 21b + 5)$$

$$A_3 = -\frac{EJa^2\pi^4}{l^3}(12.66b^2 + 10{,}5b + 8)$$



Фиг. 2

Элементарная работа силы Y, как видно из фиг. 1, будет

$$dA_2 = Ydy\,(l) = -Py'\,(l)\,dy\,(l)$$

Подставляя сюда значения $y\,(l)$ и производит $y'\,(l)$ из формулы (1), получим

$$dA_2 = -48\,\frac{P}{l}\,(2 + 7b) - в\pi a\, da$$

или

$$A_2 = -24\,\frac{Pa^2}{l}\pi b\,(2 + 7b)$$

Следовательно, суммарная работа всех внешних и внутренних сил будет

$$A = \frac{Pa^2\pi^2}{l}(46.16b^2 + 21b + 5) - 24\,\frac{Pa^2\pi}{l}\,b\,(2 + 7b) - \frac{EJa^2\pi^4}{l^3}(12.66b^2 + 8) \qquad (2)$$

Определим изогнутую форму стержня так, чтобы работа [2] на перемещении (1) была наименьшей при данном a. Для этого требуется, чтобы

$$\frac{Pa^2\pi^2}{l}(92.32b + 21) - 48\,\frac{Pa^2\pi}{l}\,(1 + 7b) - \frac{EJa^2\pi^4}{l^3}(25.32b + 10.5) = 0$$

Отсюда находим

$$b = \frac{1.8 - 3.29u}{4.6 - 7.96u} \qquad u = \frac{\pi^2EJ}{Pl^2}$$

После подстановки этого выражения в уравнение (2) получим

$$A = \frac{\pi^3EJa^2}{l^3}\,\frac{409 + 468u - 1065u^2 - 1155u^3}{u\,(4.6 + 7.96u)^2}$$

График зависимости суммарной работы от величины силы P приведена на фиг. 2. То значение силы P_*, при котором работа всех внешних и внутренних сил на указанном перемещении равна нулю, предполагается критическим. Таким образом находим

$$P_* = 1.59\,\frac{\pi^2EJ}{l^2} \qquad (3)$$

Поступила 15 IX 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов, ГТТИ, стр. 165.